2005

Runde 2

Aufgabe 1

Eine natürliche Zahl besteht aus paarweise verschiedenen Ziffern, von denen keine Null ist. Streicht man in dieser Zahl eine beliebige Ziffer k, so ist die neu entstandene Zahl durch k teilbar.

Bestimme die größte Zahl mit dieser Eigenschaft.

Lösung:

Die Zahl 9721368 ist die größte Zahl mit der in der Aufgabenstellung genannten Eigenschaft.

Beweis:

Die Zahl 9721368 erfüllt alle Teilbarkeitsbedingungen der Aufgabe:
1 teilt 972368.
2 teilt 971368, da die Endziffer 8 gerade ist.
3 teilt 972168, da die Quersumme 33 durch 3 teilbar ist.
6 teilt 972138, da diese Zahl gerade ist und ihre Quersumme 30 durch 3 teilbar ist.
7 teilt 921368, da $921368 = 7 \cdot 131624$.
8 teilt 972136, da die aus den letzten 3 Ziffern gebildete Zahl 136 durch 8 teilbar ist.
9 teilt 721368, da die Quersumme 27 durch 9 teilbar ist.

Es wird nun gezeigt, dass es keine Zahl N gibt, die größer als 9721368 ist und zugleich die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft besitzt.

Sei N die größte Zahl mit der in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaft. Im Folgenden ist N(k) die Zahl, die aus N entsteht, wenn man aus N die Ziffer k streicht.

Da die Ziffer 0 nicht verwendet werden darf, kann auch die Ziffer 5 nicht in der Darstellung von N auftreten. Nach dem Streichen der Ziffer 5 müsste nämlich N(5) durch 5 teilbar sein, N(5) müsste also entweder mit der Ziffer 0 oder mit der Ziffer 5 enden. Dies ist unmöglich, da 0 nicht vorkommen darf und die 5 gestrichen wurde.

Die Zahl N kann nicht aus allen verbleibenden acht Ziffern bestehen, denn die Quersumme von N(9) wäre dann 1+2+3+4+6+7+8 = 31, so dass N(9) nicht durch 9 teilbar wäre. N kann also höchstens sieben Stellen besitzen. Es muss also eine der Ziffern 1, 2, … ,9 in der Darstellung von N fehlen. Damit N möglichst groß wird, sollte die Ziffer 9 enthalten sein, daher muss die Quersumme von N durch 9 teilbar sein (damit N(9) durch 9 teilbar bleibt). Da 1+2+3+4+6+7+8+9 = 40, ist 36 die einzige durch 9 teilbare Zahl, die man durch Subtraktion einer einstelligen Zahl von 40 erhalten kann. Somit kann die Ziffer 4 nicht in der Darstellung von N enthalten sein.
Eine siebenstellige Zahl mit den geforderten Eigenschaften kann also nur aus den Ziffern 1, 2, 3, 6, 7, 8 und 9 bestehen.

Die letzte Ziffer von N kann nicht ungerade sein, denn beim Streichen jeder der drei geraden Ziffern k muss N(k) gerade sein.
Streicht man diese letzte Ziffer, so erkennt man, dass aus dem gleichen Grund die vorletzte Ziffer gerade sein muss.

Damit kommen nur die Endziffernkombinationen 26, 28, 62, 68, 82 und 86 in Frage.

Die Zahl N(8) muss auch durch 4 teilbar sein. Aus diesem Grund kommen die Endziffernkombinationen 26 und 62 nicht in Frage, da diese Zahlen nicht durch 4 teilbar sind, was sie nach der bekannten Teilbarkeitsregel für 4 sein müssten.
Es bleiben also die vier möglichen Endziffernkombinationen 28, 68, 82 und 86.

In allen vier Fällen endet N(8) entweder auf die Ziffer 2 oder auf die Ziffer 6. Aus der Teilbarkeit von N(8) durch 4 folgt, dass die drittletzte Ziffer von N ungerade sein muss: Nur die zweistelligen Zahlen 12, 32, 52, 72 und 92 bzw. 16, 36, 56, 76 und 96 sind durch 4 teilbar und enden mit der Einerziffer 2 bzw. 6.

Da nach dem Gezeigten 8 an der Einer- oder Zehnerstelle steht, muss eine Zahl, die größer als 9721368 ist und die angegebenen Bedingungen erfüllt, auch mit der Ziffernkombination 97 beginnen. Untersucht man die vier Fälle der möglichen Endziffernkombinationen 28, 68, 82 und 86 systematisch, so sind pro Fall nur noch vier Zahlen zu betrachten, denn in jedem dieser vier Fälle bleiben für die drei mittleren Stellen drei Ziffern. Dabei muss die drittletzte Ziffer von N ungerade sein.

Endziffernkombination 28 (Die verbleibenden Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 6, 3 und 1.)

9763128: N(7) = 963128 = 137589 · 7 + 5 ist nicht durch 7 teilbar.
9761328: N(7) = 961328 = 137332 · 7 + 4 ist nicht durch 7 teilbar.
9736128: N(7) = 936128 = 133732 · 7 + 4 ist nicht durch 7 teilbar.
9716328 ist kleiner als 9721328
(Bemerkung: 9716328 erfüllt auch die gestellten Bedingungen.)

Endziffernkombination 68 (Die verbleibenden Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 3, 2 und 1.)

9732168: N(7) = 932168 = 133166 · 7 + 6 ist nicht durch 7 teilbar.
9723168: N(7) = 923168 = 131881 · 7 + 1 ist nicht durch 7 teilbar.
9721368: erfüllt alle Eigenschaften (siehe oben).
9712368 ist kleiner als 9721368.

Endziffernkombination 82 (Die verbleibenden Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 6, 3 und 1.)

9763182: N(7) = 963182 = 137597 · 7 + 3 ist nicht durch 7 teilbar.
9761382: N(7) = 961382 = 137340 · 7 + 2 ist nicht durch 7 teilbar.
9736182: N(7) = 936182 = 133740 · 7 + 2 ist nicht durch 7 teilbar.
9716382 ist kleiner als 9721368.

Endziffernkombination 86 (Die verbleibenden Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 3, 2 und 1.)

9732186: N(7) = 932186 = 133169 · 7 + 3 ist nicht durch 7 teilbar.
9723186: N(7) = 923186 = 131883 · 7 + 5 ist nicht durch 7 teilbar.
9721386: N(7) = 921386 = 131626 · 7 + 4 ist nicht durch 7 teilbar.
9712386 ist kleiner als 9721368.

Da alle Fälle vollständig behandelt wurden, ist gezeigt, dass 9721368 die größte Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist.

Aufgabe 2

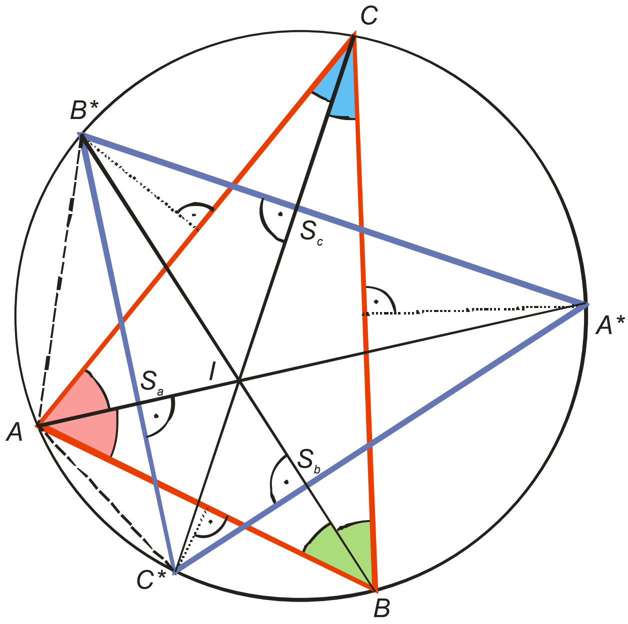
In den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks ABC werden die Lote auf die Seiten nach außen errichtet. Diese schneiden den Umkreis des Dreiecks ABC in den Punkten A^*, B^* und C^*.

Zeige, dass der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A^*B^*C^*$ zugleich der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist.

Beweis:

Schritt 1:

Zunächst wird gezeigt, dass AA^*, BB^* und CC^* die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sind. Ihr Schnittpunkt ist demnach der Mittelpunkt I des Inkreises des Dreiecks ABC.



α, β und γ bezeichnen die drei Innenwinkel des Dreiecks ABC.

Da A^* nach Aufgabenstellung auf der Mittelsenkrechten zur Seite BC des Dreiecks ABC liegt, ist $\overline{BA^*} = \overline{CA^*}$.
Nach dem Umfangswinkelsatz sind Umfangswinkel zu gleich langen Sehnen auch gleich weit. Daher folgt

$$\sphericalangle A^*AC = \sphericalangle BAA^* = \frac{\alpha}{2}.$$

Analog ist

$$\sphericalangle CBB^* = \frac{\beta}{2} \text{ und } \sphericalangle ACC^* = \frac{\gamma}{2}.$$

Schritt 2:

Nun wird bewiesen, dass AA^*, BB^* und CC^* senkrecht auf den Seiten des Dreiecks $A^*B^*C^*$ stehen; ihr Schnittpunkt ist demnach der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A^*B^*C^*$.

1. Beweismöglichkeit zu Schritt 2:

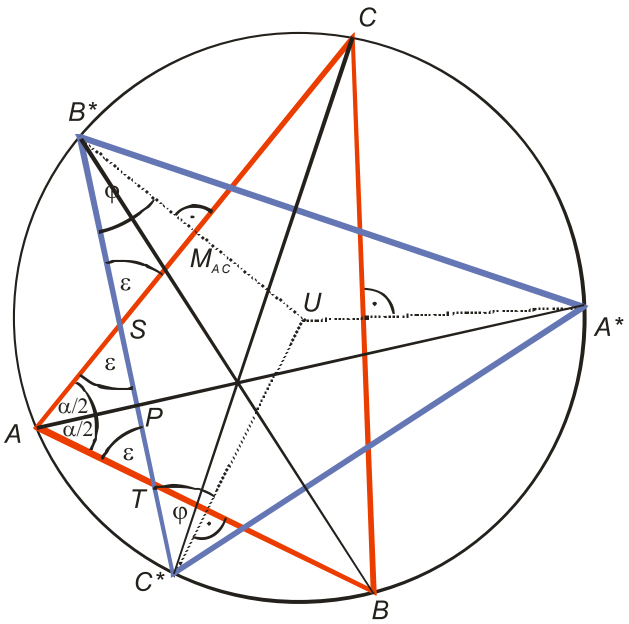
Die Winkel $\sphericalangle CAB^*$ und $\sphericalangle CBB^*$ sind beide Umfangswinkel über der Sehne CB^*, daher ist $\sphericalangle CAB^* = \sphericalangle CBB^* = \frac{\beta}{2}$ (siehe Schritt 1). Die Winkel $\sphericalangle AB^*C^*$ und $\sphericalangle ACC^*$ sind beide Umfangswinkel über der Sehne AC^*, daher ist $\sphericalangle AB^*C^* = \sphericalangle ACC^* = \frac{\gamma}{2}$.

Sei S_a der Schnittpunkt der Strecken AA^* und B^*C^*. Dann ergibt sich im Dreieck AS_aB^*:

$$\begin{aligned}\sphericalangle B^*S_aA &= 180° - \sphericalangle A^*AB^* - \sphericalangle AB^*C^* \\ &= 180° - \sphericalangle A^*AC - \sphericalangle CAB^* - \sphericalangle AB^*C^* \\ &= 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90°.\end{aligned}$$

Daher steht AA^* senkrecht auf B^*C^*. Analog steht BB^* senkrecht auf A^*C^* und CC^* steht senkrecht auf A^*B^*. Somit sind A^*S_a, B^*S_b und C^*S_c die Höhen im Dreieck $A^*B^*C^*$. Nach Schritt 1 ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks $A^*B^*C^*$ der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

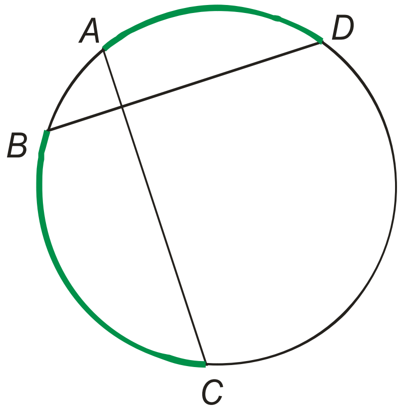
2. Beweismöglichkeit zu Schritt 2:



Die in der Aufgabenstellung beschriebenen Lote auf die Seiten sind die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC. Sie schneiden sich im Umkreismittelpunkt U. Da UB^* und UC^* Radien sind, ist C^*UB^* ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis B^*C^*. Demnach gilt für die Basiswinkel:
$\sphericalangle C^*B^*U = \sphericalangle UC^*B^* = \varphi$. (1)
Sei M_{AC} der Mittelpunkt der Strecke AC, S sei der Schnittpunkt von AC mit B^*C^*, P sei der Schnittpunkt von AA^* mit B^*C^* und T sei der Schnittpunkt von AB mit B^*C^*. Da $\sphericalangle AM_{AC}B^* = 90°$, ist $\varepsilon = \sphericalangle M_{AC}SB^* = 90° - \varphi$ (Winkelsumme im Dreieck $SM_{AC}B^*$).
Der Winkel $\sphericalangle ASP$ ist Scheitelwinkel zu $\sphericalangle M_{AC}SB^*$, also ist auch $\sphericalangle ASP = \varepsilon$. Analog folgt aus der Beziehung (1), dass $\sphericalangle PTA = \varepsilon$. Da AA^* die Winkelhalbierende des Winkels bei A ist, gilt $\sphericalangle TAP = \sphericalangle PAS = \frac{\alpha}{2}$. Somit haben die Dreiecke PAT und SAP zwei gleichgroße Winkelpaare. Nach dem Winkelsummensatz muss in beiden Dreiecken auch der dritte Winkel, der sich in beiden Dreiecken bei P befindet, übereinstimmen. Die Summe dieser beiden gleich weiten Winkel $\sphericalangle APT$ und $\sphericalangle SPA$ ergibt aber 180°, da sie Nebenwinkel sind. Somit sind die beiden Winkel jeweils 90° und AA^* ist senkrecht zu B^*C^*.
Analog steht BB^* senkrecht auf A^*C^* und CC^* steht senkrecht auf A^*B^*.

3. Beweismöglichkeit zu Schritt 2:

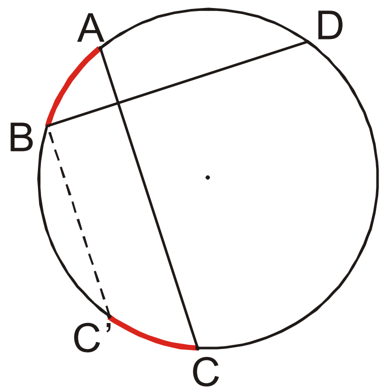
Vorbemerkung:



Gegeben sind zwei Sehnen *AC* und *BD* eines Kreises.

Wenn die Kreisbögen $\overset{\frown}{DA}$ und $\overset{\frown}{BC}$ zusammen einen Halbkreis bilden, dann sind die Strecken *AC* und *BD* orthogonal.

Beweis der Vorbemerkung:

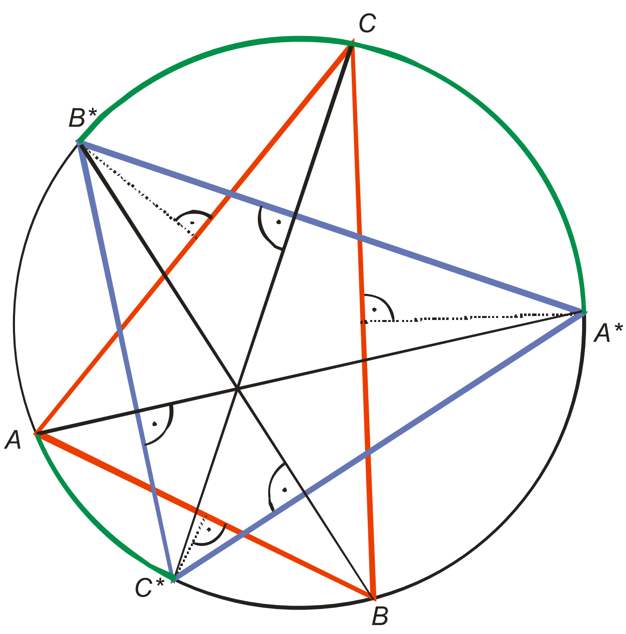


Die Parallele zu *AC* durch *B* schneide den Kreis in dem weiteren Punkt *C'*. Bei einer Spiegelung an der Mittelsenkrechten von *AC* wird *A* auf *C* und *B* auf *C'* abgebildet. Somit ist $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{C'C}$ und

$\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC'} = \overset{\frown}{BC'} + \overset{\frown}{C'C} = \overset{\frown}{BC}$.

Da nach Voraussetzung $\overset{\frown}{DA}$ und $\overset{\frown}{BC}$ zusammen einen Halbkreis bilden, bilden also auch $\overset{\frown}{DA}$ und $\overset{\frown}{AC'}$ zusammen einen Halbkreis. Somit ist $\overset{\frown}{DC'}$ ein Halbkreis. Die Strecke *DC'* ist also ein Durchmesser des Kreises.
Nach dem Satz von Thales sind nun die Strecken *DB* und *BC'* orthogonal.
Da *BC'* und *AC* parallel sind, sind auch die Strecken *AC* und *BD* orthogonal.

Zum 3. Beweis von Schritt 2:



Da *A**, *B** und *C** auf den Mittelsenkrechten des Dreiecks *ABC* liegen, gilt für die Bogenlängen (immer gegen den Uhrzeigersinn bezeichnet):

$\overset{\frown}{A^*C} = \overset{\frown}{BA^*}$, $\overset{\frown}{C^*B} = \overset{\frown}{AC^*}$ und

$\overset{\frown}{B^*A} = \overset{\frown}{CB^*}$.

Diese sechs Kreisbögen bilden zusammen den vollen Kreis, also ergeben die drei Bögen $\overset{\frown}{A^*C}$, $\overset{\frown}{AC^*}$ und $\overset{\frown}{CB^*}$ zusammen einen Halbkreis.

Es ist aber $\overset{\frown}{A^*C} + \overset{\frown}{CB^*} = \overset{\frown}{A^*B^*}$. Nach der Vorbemerkung steht demnach *AA** senkrecht auf *B*C**.
Analog steht *BB** senkrecht auf *A*C** und *CC** senkrecht auf *A*B**.

Aufgabe 3

Nach folgendem Verfahren werden Zahlenketten gebildet:
(V1) Die erste Zahl ist eine natürliche Zahl größer als 1.
(V2) Ist eine Zahl gerade, so ist die nächste Zahl halb so groß.
(V3) Ist eine Zahl ungerade und größer als 1, so ist die nächste Zahl um 1 kleiner.
(V4) Die Kette endet mit dem Erreichen der Zahl 1.

(Beispiele: 20 / 10 / 5 / 4 / 2 / 1 oder 19 / 18 / 9 / 8 / 4 / 2 / 1)

Bestimme zu gegebenem n > 1 die größte und die kleinste Anfangszahl, die zu einer Kette mit n Gliedern führt.

Lösung:

1. Die größte Anfangszahl, die zu einer Kette mit n Gliedern führt, ist 2^{n-1}.
2. Die kleinste Anfangszahl, die zu einer Kette mit n Gliedern führt, ist
   a. $2^{\frac{n+1}{2}}-1$, wenn n eine ungerade Zahl ist, und
   b. $3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}-1$, wenn n eine gerade Zahl ist.

Beweis:

Teil 1:

Mit den folgenden drei Schritten wird die **größte** Zahl, die zu einer Kette der Länge n führt, bestimmt.

(1) 2 ist die einzige Ausgangszahl, die zu einer Kette der Länge 2 führt. Denn für jede Zahl $x > 2$ ist sowohl $x-1$ als auch $\frac{x}{2}$ noch größer als 1. Man kann also nicht nach nur einer Anwendung der Vorschriften (V2) oder (V3) auf die Ausgangszahl x schon bei 1 ankommen.

(2) Für jede natürliche Zahl $x > 2$ ist $\frac{x}{2} < x-1$. Die Division durch 2 (Vorschrift (V2)) führt also zu einem größeren Abstieg in der Kette, als die Subtraktion von 1 (Vorschrift (V3)).

(3) Für die Bildung einer Kette der Länge n sind $n-1$ Anwendungen der Vorschriften (V2) und (V3) notwendig.

Daraus folgt, dass 2^{n-1} die größte Zahl ist, die zu einer Kette der Länge n führt. Denn ausgehend von 2^{n-1} kann man mit $n-1$ Anwendungen von Vorschrift (V2), die jeweils zum größtmöglichen Abstieg in der Kette führt, zur 1 gelangen.

Teil 2:

Nun wird die **kleinste** Zahl, die zu einer Kette der Länge n führt, bestimmt.

Vorbemerkung:

Ist a die kleinste Zahl, die zu einer Kette der Länge n führt, so ist $2a+1$ die kleinste Zahl, die zu einer Kette der Länge n+2 führt.

Beweis der Vorbemerkung:

Die Zahl $2a+1$ ist ungerade. Geht man von ihr aus, so muss man zunächst (V3) anwenden und erhält $2a$. Das nächste Glied der Kette ist dann nach Anwendung von (V2) die Zahl a. Ausgehend von a schließt sich dann nach Annahme eine Kette der

Länge n an. Somit erhält man mit $2a+1$ als Ausgangszahl eine Kette der Länge $n+2$. Man muss zeigen, dass $2a+1$ die kleinste solche Zahl ist.
Sei dazu b irgendeine Zahl, die zu einer Kette der Länge n+2 führt. Es wird $2a+1 \le b$ gezeigt:

- Ist b ungerade, so führt nach Vorschrift (V3) die Zahl $b-1$ zu einer Kette der Länge n+1. Die Zahl $b-1$ ist gerade. Somit führt nach Vorschrift (V2) die Zahl $\frac{b-1}{2}$ zu einer Kette der Länge n. Da a nach Annahme die kleinste Zahl ist, die zu einer Kette der Länge n führt, ist $a \le \frac{b-1}{2}$. Somit $2a+1 \le b$.
- Ist b gerade, so führt nach Vorschrift (V2) die Zahl $\frac{b}{2}$ zu einer Kette der Länge n+1.
  - Wenn $\frac{b}{2}$ ungerade ist, so führt $\frac{b}{2}-1$ nach Vorschrift (V3) zu einer Kette der Länge n. Da a die kleinste Zahl ist, die zu einer Kette der Länge n führt, ist $a \le \frac{b}{2}-1$. Somit $2a+1 < 2a+2 \le b$.
  - Wenn $\frac{b}{2}$ gerade ist, so führt $\frac{b}{4}$ nach Vorschrift (V2) zu einer Kette der Länge n. Da a nach Annahme die kleinste Zahl ist, die zu einer Kette der Länge n führt, ist $a \le \frac{b}{4}$. Somit $2a+1 < 4a \le b$.

Mit dieser Vorbemerkung kann man ausgehend von 2 und 3 (den kleinsten Zahlen, die zu einer Kette der Länge 2 bzw. 3 führen) der Reihe nach die kleinsten Zahlen a_n, die zu Ketten der Länge n führen, bestimmen. In der folgenden Tabelle ist dies für die Zahlen bis 12 durchgeführt:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	2	3	5	7	11	15	23	31	47	63	95

Fall 1: n ist eine ungerade natürliche Zahl. Dann gilt $a_n = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1$.

Beweis für Fall1:

Offensichtlich ist a_n für ungerade n (weiße Spalten der Tabelle) immer um 1 kleiner als eine Zweipotenz. Der Exponent ist gemäß der Tabelle bei den ersten ungeraden natürlichen Zahlen n immer die Hälfte von $n+1$.

Gilt für eine ungerade Zahl n nun $a_n = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1$, so ist nach der Vorbemerkung

$$a_{n+2} = 2 \cdot a_n + 1 = 2 \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2}} - 1\right) + 1 = 2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}+1} - 1 = 2^{\frac{n+3}{2}} - 1.$$

Es ist also weiterhin auch für die nächste ungerade Zahl $n+2$ die kleinste Zahl a_{n+2} zur Kette der Länge $n+2$ um 1 kleiner als eine Zweipotenz. Deren Exponent ist wieder die Hälfte von $(n+2)+1$. Somit gilt die Formel $a_n = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1$ der Reihe nach für alle ungeraden natürlichen Zahlen n.

Fall 2: n ist eine gerade natürliche Zahl. Dann gilt $a_n = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1$.

Beweis für Fall 2:

Den grau gefärbten Spalten der Tabelle entnimmt man, dass a_n für gerades n immer um 1 kleiner als das Dreifache einer Zweipotenz ist (nämlich um 1 kleiner als 3, 6, 12, 24, 48, 96, ….). Der Exponent von 2 ist gemäß der Tabelle bei den ersten geraden natürlichen Zahlen n immer um 1 kleiner als die Hälfte von n.

Gilt für eine gerade Zahl n nun $a_n = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1$, so ist nach der Vorbemerkung

$$a_{n+2} = 2 \cdot a_n + 1 = 2 \cdot \left(3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1 \right) + 1 = 3 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1 = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - 1 = 3 \cdot 2^{\frac{n+2}{2}-1} - 1.$$

Es ist also weiterhin auch für die nächste gerade Zahl $n+2$ die kleinste Zahl a_{n+2} zur Kette der Länge $n+2$ um 1 kleiner als das Dreifache einer Zweipotenz. Der zugehörige Exponent ist wieder um 1 kleiner als die Hälfte von $n+2$. Somit gilt die Formel $a_n = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1$ der Reihe nach für alle geraden natürlichen Zahlen n.

Variante für die Beweise für Fall 1 und 2 unter Verwendung von Dualzahlen:

Nach der Vorbemerkung im Beweis von Teil 2 gelangt man sukzessive von der kleinsten Zahl a_n zur kleinsten Zahl a_{n+2} durch die Rechenoperation „mal 2 plus 1“. Die Anwendung dieser Rechenoperation ist besonders einfach, wenn man die Zahlen im Zweiersystem schreibt, also als so genannte Dualzahlen. Für eine Zahl im Zweiersystem bedeutet nämlich die Rechenoperation „mal 2“, dass eine 0 hinten angehängt wird (so wie bei Zahlen im Zehnersystem die Rechenoperation „mal 10“). Addiert man anschließend die 1, so wird aus der angehängten 0 eine 1. Die Rechenoperation „mal 2 plus 1“ angewandt auf eine Dualzahl bedeutet also, dass an die Dualzahl rechts eine 1 angehängt wird.

<u>*Zu Fall 1:*</u> Aus $a_3 = 3 = (11)_2$ folgt $a_5 = (111)_2$, $a_7 = (1111)_2$ usw.

Folglich ist für eine ungerade Zahl $n = 2k-1$: $a_n = \left(\underbrace{1 \ldots 1}_{k} \right)_2 = 2^k - 1 = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1$.

<u>*Zu Fall 2:*</u> Aus $a_2 = 2 = (10)_2$ folgt $a_4 = (101)_2$, $a_6 = (1011)_2$, $a_8 = (10111)_2$ usw.

Folglich ist für eine gerade Zahl $n = 2k$:

$$a_n = \left(10\underbrace{1 \ldots 1}_{k-1} \right)_2 = 2^k + \left(2^{k-1} - 1 \right) = 3 \cdot 2^{k-1} - 1 = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1.$$

Aufgabe 4

Auf einem Kreis liegen die Punkte A, B und C mit $\sphericalangle BAC < 90^o$.

Es gibt Kreispunkte P, für die der Thaleskreis über AP die von A ausgehenden Halbgeraden durch B bzw. C in A und in je einem weiteren Punkt schneidet. Diese Schnittpunkte werden mit S bzw. T bezeichnet.

Für welchen dieser Kreispunkte P hat die Strecke ST maximale Länge?

Lösung:

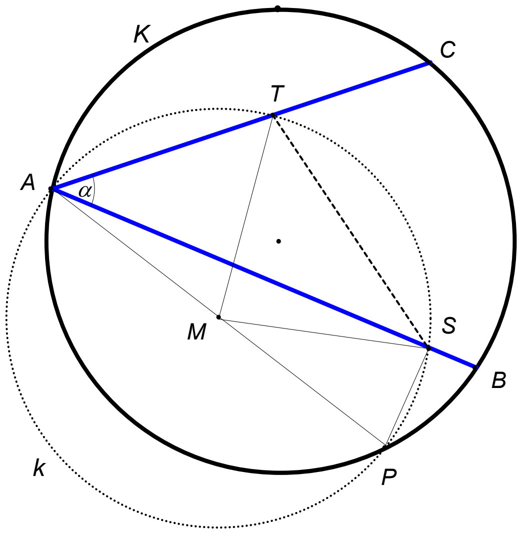
Sei *K* der Ausgangskreis durch *A*, *B,* und *C.* Die Strecke *ST* hat genau dann maximale Länge, wenn *AP* ein Kreisdurchmesser des Kreises *K* ist.

1. Beweismöglichkeit:

Behauptung: Sei *M* der Mittelpunkt des Thaleskreises *k* über *AP* und $\alpha = \sphericalangle BAC$.
Dann gilt $\sphericalangle SMT = 2\alpha$.

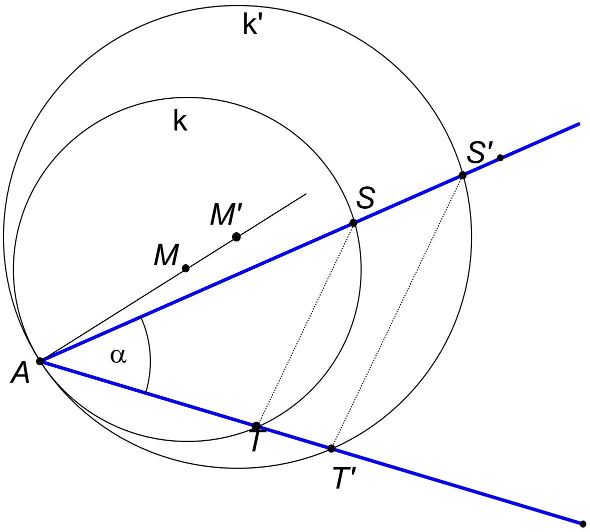
Beweis der Behauptung:

Unabhängig von der Lage von *P* ist α der Umfangswinkel zur Sehne *ST* im Kreis *k*. Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel ist also der zugehörige Mittelpunktswinkel $\sphericalangle SMT = 2\alpha$.



Nach dieser Behauptung ist die Sehne *ST* im Kreis *k* immer eine Sehne zum Mittelpunktswinkel 2α. Eine Sehne zu einem festen Mittelpunktswinkel ist aber umso länger, je größer der Kreisradius des zugehörigen Kreises ist. Somit wird ihre Länge maximal, wenn der Durchmesser *AP* von *k* die maximal mögliche Länge hat. Da *P* nach Aufgabenstellung auf dem Umkreis *K* des Dreiecks *ABC* liegen muss, ist *AP* dann maximal, wenn *AP* ein Kreisdurchmesser von *K* ist. In diesem Fall fällt der Thaleskreis *k* über *AP* mit *K* zusammen. Er hat mit der von *A* ausgehenden Halbgeraden durch *B* den weiteren Schnittpunkt *B,* mit der von *A* ausgehenden Halbgeraden durch *C* den weiteren Schnittpunkt *C*. Somit fällt *S* mit *B* und *T* mit *C* zusammen.

2. Beweismöglichkeit:



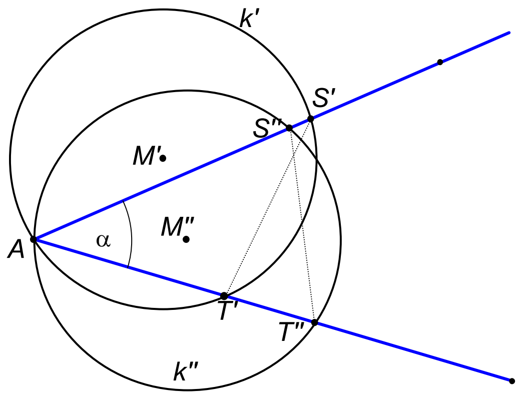
Vorbemerkung:

Gegeben ist ein Winkel α mit Scheitelpunkt *A*. Gegeben sind weiter zwei Kreise *k* und *k'* durch *A*, die beide die beiden Schenkel des Winkels schneiden. Die Schnittpunkte von *k* mit den Schenkeln seien mit *S* bzw. *T* bezeichnet, die Schnittpunkte von *k'* mit den Schenkeln seien mit *S'* bzw. *T'* bezeichnet.
Wenn *k'* einen größeren Durchmesser als *k* hat, so ist auch die Sehne *S'T'* länger als die Sehne *ST.*

Beweis der Vorbemerkung:

Zunächst betrachten wir den Sonderfall, der in der obigen Zeichnung dargestellt ist: Der Mittelpunkt *M'* von *k'* liege auf der Geraden (*AM*). Hierbei bezeichnet *M* den Mittelpunkt von *k*. In diesem Fall geht *k'* aus *k* durch eine zentrische Streckung mit Streckzentrum *A* und Streckfaktor $\frac{\overline{M'A}}{\overline{MA}}$ hervor. Diese zentrische Streckung bildet die Sehne *ST* auf die parallele Sehne *S'T'* ab. Wenn der Radius $\overline{M'A}$ von *k'* größer ist als der Radius $\overline{MA}$ von *k*, so ist der Streckfaktor größer als 1 und somit ist *S'T'* länger als *ST*.

Im allgemeinen Fall geht aber *k'* aus *k* durch eine zentrische Streckung mit Zentrum *A* und eine anschließende Drehung um *A* hervor. Durch die zentrische Streckung wird *k* auf einen Kreis *k''* mit gleichem Radius wie *k'* abgebildet. Nach dem eben bewiesenen ist die zugehörige Sehne *S''T''* länger als die Sehne *ST,* wenn der Radius von *k''* größer als der Radius von *k* ist.



Es bleibt zu zeigen, dass die gleich großen, aber um *A* gegeneinander verdrehten Kreise *k''* und *k'* gleich lange Sehnen *S'T'* und *S''T''* haben (siehe Abbildung).

Der Winkel α ist in *k'* Umfangswinkel zur Sehne *S'T'* und in *k''* Umfangswinkel zur Sehne *S''T''*. Da die Weite des Umfangswinkels die Länge der zugehörigen Sehne nach der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes eindeutig bestimmt, ist die Länge von *S'T'* durch α eindeutig bestimmt. Da *k'* und *k''* kongruent sind, müssen *S'T'* und *S''T''* gleich lang sein.

Somit ist die Vorbemerkung bewiesen.

Zum Beweis der Aufgabe:

Sei nun die Figur wie in der Aufgabenstellung gegeben (siehe Abbildung rechts). Die Sehne ST des Thaleskreises über der Strecke AP hat nach der Vorbemerkung dann maximale Länge, wenn der Durchmesser AP dieses Thaleskreises möglichst groß ist. Da P nach Aufgabenstellung auf dem Umkreis K des Dreiecks ABC liegen muss, ist AP dann maximal, wenn AP ein Kreisdurchmesser von K ist. In diesem Fall fällt der Thaleskreis über AP mit K zusammen. Er hat mit der von A ausgehenden Halbgeraden durch B den Schnittpunkt B, mit der von A ausgehenden Halbgeraden durch C den Schnittpunkt C. Somit fällt S mit B und T mit C zusammen.