2005

Runde 1

Aufgabe 1

Ein Stück Papier wird in 7 oder 10 Stücke zerschnitten. Nun wird eines der vorhandenen Stücke wieder wahlweise in 7 oder 10 Stücke zerschnitten; dieser Vorgang wird mehrmals wiederholt.

Kann man auf diese Weise 2006 Papierstücke erhalten?

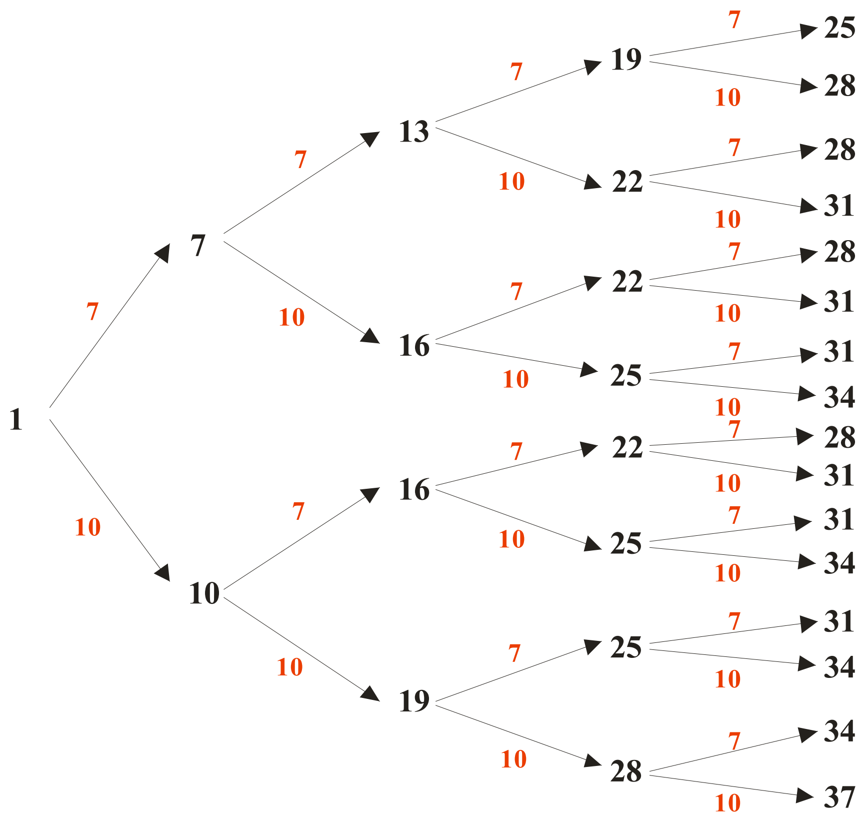
Beispiel:

Wenn man das erste Stück Papier in 7 Stücke zerschneidet, so hat man danach **7** Stücke Papier. Wenn man jetzt eins davon wieder in 7 Stücke zerschneidet, so hat man nach dem zweiten Schneiden insgesamt **13** Stücke: die sechs alten, die beim zweiten Schneiden nicht zerschnitten wurden, plus die 7 neuen, die aus dem einen beim zweiten Schneiden entstanden sind. Schneidet man nun beim dritten Schneiden eins der 13 in 10 Stücke, so hat man nach dem dritten Schneiden 9 Stücke mehr, also insgesamt 22 Stücke. In dem Diagramm erkennt man, wie viele Stücke man z.B. nach jedem Schneiden haben kann. Über dem Pfeil steht jeweils, in wie viele Stücke eins der vorhandenen Stücke zerschnitten wird.

$$\mathbf{1} \xrightarrow{7} \mathbf{7} \xrightarrow{7} \mathbf{13} \xrightarrow{10} \mathbf{22} \xrightarrow{7} \mathbf{28} \xrightarrow{10} \mathbf{37} \xrightarrow{10}$$

Übersicht:

Eine genauere Übersicht, wie viele Stücke nach den ersten Schnitten entstanden sind, erhält man, wenn man ein Baumdiagramm zeichnet, denn man hat ja immer zwei Möglichkeiten.



Man erkennt dass nicht alle Anzahlen von Papierstücken möglich sind. Wenn man sich die vorkommenden Anzahlen 1, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25,… anschaut, so fällt auf, dass aufeinander folgende Zahlen den Abstand 3 haben, genauer, dass die Anzahlen beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen. Diese Beobachtung muss man aber allgemein beweisen.

Lösung:

Nein, auf diese Weise kann man niemals 2006 Papierstücke erhalten.

1. Beweisvorschlag:

Wenn ein Stück Papier in 7 Stücke zerschnitten wird so erhöht sich die Anzahl der Papierstücke um 6, wenn ein Stück Papier in 10 Stücke zerschnitten wird, so erhöht sich die Anzahl um 9.
Da 6 und 9 beide durch 3 teilbar sind, erhöht sich die Anzahl der Papierstücke also bei jedem Schneiden um eine durch 3 teilbare Zahl. Auch nach zweimaligem Schneiden, dreimaligem Schneiden usw. hat sich die Anzahl insgesamt um eine durch 3 teilbare Zahl erhöht. Es kann sich bei diesem Vorgehen also die Anzahl ausgehend von einem Papierstück am Anfang insgesamt nur um eine durch 3 teilbare Anzahl erhöhen.
Man kann also nur Anzahlen erhalten, die um 1 vermindert durch 3 teilbar sind.

Nun ist aber $2006 - 1 = 2005$ nicht durch 3 teilbar, denn die Quersumme von 2005 ist 7. Also kann man niemals 2006 Papierstücke erhalten.

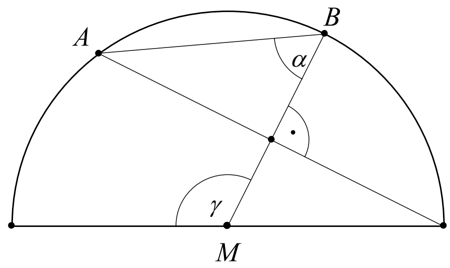
2. Beweisvorschlag:

Mit jedem Schneidevorgang werden aus einem Papierstück 7 oder 10 Papierstücke, mit jedem einzelnen Schneidevorgang erhöht sich die Gesamtzahl der Papierstücke also um 6 oder 9. Hat man x Mal in 7 Stücke geschnitten und y Mal in 10 Stücke, so kamen also x Mal 6 Stücke und y Mal 9 Stücke dazu. Da am Beginn bereits ein Stück vorhanden war, beträgt die Anzahl der Stücke am Ende $1 + 6x + 9y$.

Nun kann man 3 ausklammern und erhält $1 + 6x + 9y = 1 + 3 \cdot (2x + 3y)$.
Das zeigt, dass die Anzahl der erhaltenen Stücke immer um eins größer als eine durch 3 teilbare Zahl ist.
Die Zahl 2006 ist aber nicht um 1 größer als eine durch 3 teilbare Zahl, denn 2005 ist nicht durch 3 teilbar.
Man kann somit nicht 2006 Papierstücke erhalten.

Aufgabe 2

Wie kann man α berechnen, wenn γ gegeben ist?

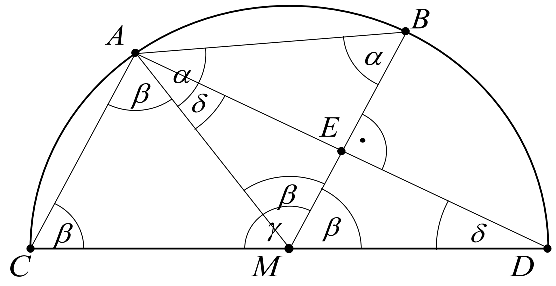


Lösung:

Es ist $\alpha = \frac{\gamma}{2}$.

Vorbemerkung: Diese Zeichnung ist nur für $\gamma > 90°$ möglich. Daher wird im Folgenden immer $\gamma > 90°$ angenommen.

1. Beweisvorschlag: (Mit Winkeln in gleichschenkligen Dreiecken)



(1) Der Winkel $\sphericalangle DME$ ist ein Nebenwinkel des Winkels γ. Daher gilt $\beta = \sphericalangle DME = 180° - \gamma$.

(2) Da *MB* senkrecht auf *AD* steht, ist das Dreieck *MDE* rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei *E*. Aus dem Winkelsummensatz für dieses Dreieck ergibt sich $\sphericalangle DME = \beta = 180° - (90° + \delta) = 90° - \delta$.

(3) Das Dreieck *MDA* ist gleichschenklig mit Basis *AD*, denn die Schenkel *AM* und *MD* sind als Radien gleich lang. Es ist daher $\sphericalangle ADM = \sphericalangle EDM = \sphericalangle MAD = \delta$.

(4) Nach dem Winkelsummensatz fürs Dreieck *AME* ist $\sphericalangle EMA = 180° - (90° + \delta) = 90° - \delta$, da *MB* senkrecht auf *AD* steht. Also ist nach (2) $\sphericalangle EMA = \sphericalangle DME = \beta$.

(5) Das Dreieck *MBA* ist gleichschenklig mit Basis *AB*, denn die Schenkel *AM* und *MB* sind als Radien gleich lang. Es ist daher $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MAB = \alpha$. Nach dem Winkelsummensatz fürs Dreieck *AMB* ist $2\alpha + \beta = 180°$, also $\alpha = \frac{180° - \beta}{2}$.

(6) Setzt man (1) in (5) ein, so ergibt sich $\alpha = \frac{180° - (180° - \gamma)}{2} = \frac{\gamma}{2}$. Das ist die behauptete Beziehung.

Variante: (Mit der Mittelsenkrechten im gleichschenkligen Dreieck)

Die Gleichheit $\sphericalangle EMA = \sphericalangle DME = \beta$, die im obigen Beweisvorschlag in den Punkten (2) bis (4) gezeigt wird, kann man auch wie folgt beweisen:
Das Dreieck *MDA* ist gleichschenklig mit Basis *AD*, denn die Schenkel *AM* und *MD* sind als Radien gleich lang. Im gleichschenkligen Dreieck *MDA* ist *ME* eine Höhe, da *ME* senkrecht auf *AD* steht. Daher ist *ME* Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende von $\sphericalangle DMA$. Somit gilt $\sphericalangle EMA = \sphericalangle DME = \beta$.
Der Rest des Beweises ist gleich.

2. Beweisvorschlag: (Mit Wechselwinkeln und Satz des Thales)

(1) Nach Voraussetzung ist die Strecke *MB* orthogonal zur Strecke *AD*. Da *A* auf dem Thaleskreis über *CD* liegt, ist *CA* ebenfalls orthogonal zu *AD*. Deshalb ist *AC* parallel zu *MB*.

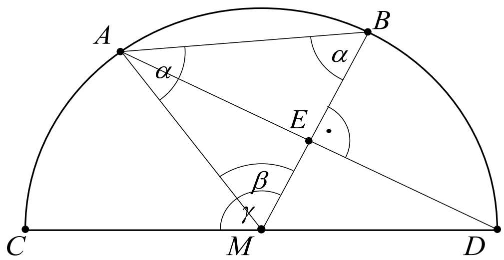
(2) Die Winkel $\sphericalangle CAM$ und $\sphericalangle BMA$ sind Wechselwinkel an den parallelen Geraden (*CA*) und (*MB*), deshalb ist $\beta = \sphericalangle CAM = \sphericalangle BMA$.

(3) Das Dreieck *AMB* ist gleichschenklig, denn *MA* und *MB* sind Kreisradien. Daher ist $\alpha = \sphericalangle ABM = \sphericalangle MAB$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck *AMB* folgt $\alpha = \frac{180° - \beta}{2}$.

(4) Ebenso gilt im gleichschenkligen Dreieck *CMA* nach dem Winkelsummensatz $2\beta + (\gamma - \beta) = 180°$ oder $\beta = 180° - \gamma$.

(5) Eingesetzt in (3) ergibt sich jetzt $\alpha = \frac{180° - (180° - \gamma)}{2} = \frac{\gamma}{2}$.

3. Beweisvorschlag: (Mit dem Kongruenzsatz Ssw)



(1) Der Winkel $\sphericalangle DME$ ist ein Nebenwinkel des Winkels γ. Daher gilt $\sphericalangle DME = 180° - \gamma$.

(2) Die Dreiecke *AME* und *DEM* sind kongruent nach dem Kongruenzsatz Ssw, denn $\overline{AM} = \overline{DM}$ (Radien), die Seite *ME* ist gemeinsame Seite beider Dreiecke und der Gegenwinkel der größeren Seite ist jeweils 90°. Daher ist $\sphericalangle DME = \sphericalangle EMA = \beta$.

(3) Das Dreieck *AMB* ist gleichschenklig, da die Strecken *AM* und *MB* als Radien gleich lang sind. Aus der Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck *AMB* ergibt sich $\alpha = \frac{180° - \beta}{2}$.

(4) Setzt man (1) und (2) in (3) ein, so ergibt sich $\alpha = \frac{180° - (180° - \gamma)}{2} = \frac{\gamma}{2}$.

4. Beweisvorschlag: (Mit dem Satz vom Mittelpunktswinkel)

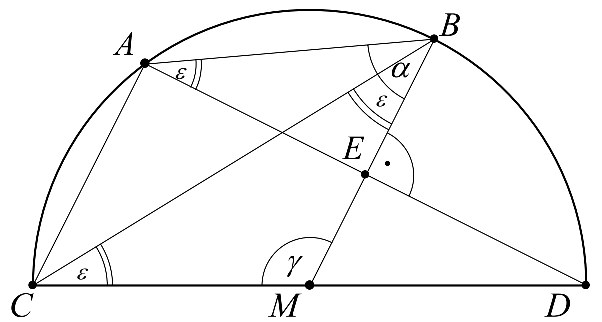
(1) Die Winkel $\sphericalangle DMB$ und γ sind Nebenwinkel, deshalb gilt $\sphericalangle DMB = 180° - \gamma$.

(2) Der Winkel $\sphericalangle DMB$ ist der Mittelpunktswinkel des Winkels *DAB* über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{DB}$. Aus dem Satz über den Mittelpunktswinkel folgt $\sphericalangle DAB = \frac{\sphericalangle DMB}{2}$.

(3) Nach Voraussetzung ist das Dreieck *AEB* rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei *E*. Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck folgt deshalb $\alpha = 90° - \sphericalangle DAB$.

(4) Durch Einsetzen von (2) und (1) in (3) ergibt sich $\alpha = 90° - \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$.

5. Beweisvorschlag: (Mit dem Umfangswinkelsatz)



(1) Das Dreieck *CMB* ist nach Voraussetzung gleichschenklig mit der Basis *BC*, denn für die Kreisradien gilt $\overline{BM} = \overline{CM}$. Somit $\varepsilon = \sphericalangle MCB = \sphericalangle CBM$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck *CMB* folgt $\varepsilon = \frac{180° - \gamma}{2}$.

(2) Die Winkel $\sphericalangle EAB$ und $\sphericalangle DCB$ sind Umfangswinkel über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{DB}$. Aus dem Umfangswinkelsatz ergibt sich mit (1) $\varepsilon = \sphericalangle EAB = \sphericalangle DCB = \frac{180° - \gamma}{2}$.

(3) Nach Voraussetzung ist das Dreieck *AEB* rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei *E*. Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck folgt deshalb $\alpha = 90° - \varepsilon$.

(4) Setzt man (2) in (3) ein, so ergibt sich $\alpha = 90° - \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$.

Aufgabe 3

Ein Quader mit quadratischer Grundfläche ist aus Würfeln der Kantenlänge 1 cm aufgebaut. Die Anzahl dieser Würfel ist so groß, wie die Anzahl der außen liegenden Würfelflächen.

Welche Kantenlängen kann der Quader haben?

Lösung:

Es gibt vier Möglichkeiten für einen solchen Quader:

1) Länge und Breite 5 cm, Höhe 10 cm.
2) Länge und Breite 6 cm, Höhe 6 cm.
3) Länge und Breite 8 cm, Höhe 4 cm.
4) Länge und Breite 12 cm, Höhe 3 cm.

Beweis:

Im Folgenden wird mit *a* die Maßzahl der Seitenlänge der Grundfläche und mit *h* die Maßzahl der Höhe des Quaders bezeichnet. Laut Aufgabenstellung sind für *a* und *h* nur ganzzahlige Werte möglich.

Für den Quader werden insgesamt $a^2 \cdot h$ Würfel verwendet.
Die Anzahl der Würfelflächen, die außen an der Unterseite und der Oberseite des Quaders liegen, ist jeweils a^2. An jeder der vier Seitenwände befinden sich $a \cdot h$ Würfelflächen. Die Gesamtzahl der außen liegenden Würfelflächen ist also $2a^2 + 4ah$.
Laut Aufgabenstellung ist nun $a^2 \cdot h = 2a^2 + 4ah$.
Teilt man diese Gleichung durch *a*, so ergibt sich $ah = 2a + 4h$ bzw. $ah - 4h = 2a$, und somit $h = \frac{2a}{a-4}$ für $a \neq 4$. (Für $a = 4$ entsteht die nicht erfüllbar Aussage $4h = 8 + 4h$.)

Durch Umformung erhält man:

$$h = \frac{2a}{a-4} = \frac{2(a-4)+8}{a-4} = 2 + \frac{8}{a-4}.$$

Da *h* eine natürliche Zahl ist, muss $a - 4$ ein Teiler von 8 sein. Dafür gibt es die gesuchten vier Möglichkeiten:

$a-4$	a	$h = \frac{2a}{a-4}$	Anzahl der Würfel $a^2 \cdot h$	Anzahl der außen liegenden Würfelflächen $2a^2 + 4ah$
1	5	10	250	250
2	6	6	216	216
4	8	4	256	256
8	12	3	432	432

Bei allen vier Lösungen sind also die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Variante 1:

Die Gleichung $h = \frac{2a}{a-4}$ wird wie oben abgeleitet. Durch Probieren findet man die vier oben aufgeführten ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung. Es sind die einzigen ganzzahligen Lösungen für $a \leq 12$.
Nun ist noch zu zeigen, dass für größere Werte von *a* keine weiteren ganzzahligen Lösungen mehr auftreten. Dazu untersucht man den Bruch $\frac{2a}{a-4}$.

Wegen $2a > 2a - 8 = 2(a-4)$ ist der Zähler stets größer als das Doppelte des Nenners, der Bruch ist also immer größer als 2. Für $a = 12$ nimmt er den Wert 3 an.

Mit weiter wachsendem a wird der Wert des Bruchs $\frac{2a}{a-4}$ immer kleiner. Dies kann man der folgenden Tabelle mit auf zwei Dezimalen gerundeten Werten entnehmen:

a	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$\frac{2a}{a-4}$	3,00	2,89	2,80	2,73	2,67	2,62	2,57	2,53	2,50	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38	2,36

Der Wert nähert sich für wachsende a immer mehr der Zahl 2 an, ohne dass 2 erreicht werden kann. Somit sind für $a > 12$ keine weiteren ganzzahligen Werte des Bruchs möglich und damit gibt es für $a > 12$ auch keine ganzzahligen Lösungen mehr.

Für einen Beweis genügt es zu zeigen, dass $2 < \frac{2a}{a-4} < 3$ für $a > 12$ gilt. Denn zwischen 2 und 3 gibt es keine ganzen Zahlen. Daher kann $h = \frac{2a}{a-4}$ für $a > 12$ nicht mehr ganzzahlig sein.

Wegen $2a > 2a - 8 = 2(a-4)$ ist stets $2 < \frac{2a}{a-4}$. Die Ungleichung $\frac{2a}{a-4} < 3$ ist für $a > 4$ äquivalent zu $2a < 3(a-4) = 3a - 12$. Dies wiederum ist äquivalent zu $a > 12$. Also ist die Behauptung bewiesen.

Variante 2:

Die Gleichung $ah = 2a + 4h$ wird wie oben abgeleitet.

Auflösen nach a ergibt $a = \frac{4h}{h-2}$. Da a eine positive natürliche Zahl ist, muss $h > 2$ gelten.

Auflösen nach h ergibt wie oben: $h = \frac{2a}{a-4}$. Da h eine positive natürliche Zahl ist, muss $a > 4$ gelten.

Wegen $a > 4$ und $a = \frac{4h}{h-2}$ gilt $a = \frac{4h}{h-2} > 4$ bzw. $a = \frac{4h}{h-2} \geq 5$. (Wenn $a > 4$, dann muss auch $a \geq 5$ sein, da a ja eine natürliche Zahl ist.)

Die Ungleichung $\frac{4h}{h-2} \geq 5$ ist aber für $h > 2$ äquivalent zu $h \leq 10$.

Man muss also nur für h die natürlichen Zahlen von 3 bis 10 in $a = \frac{4h}{h-2}$ einsetzen, und untersuchen, wann sich für a eine natürliche Zahl ergibt. Dies führt genau auf die vier obigen Lösungen.

Variante 3:

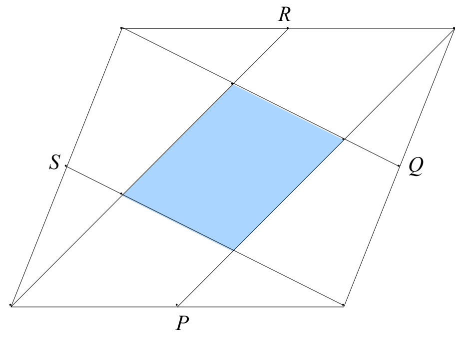
Die Gleichung $ah = 2a + 4h$ wird wie oben abgeleitet. Die Division dieser Gleichung durch $2ah$ ergibt $\frac{1}{2} = \frac{1}{h} + \frac{2}{a}$. Die Summe der beiden positiven Brüche kann aber nur $\frac{1}{2}$ ergeben, wenn einer der beiden Brüche $\frac{1}{h}$ bzw. $\frac{2}{a}$ mindestens $\frac{1}{4}$ ist. Außerdem müssen sie beide kleiner als $\frac{1}{2}$ sein.

Somit muss $3 \leq h \leq 4$ oder $5 \leq a \leq 8$ gelten. Durch Probieren findet man daraus die vier obigen Lösungen.

Aufgabe 4

Die Punkte P, Q, R, S sind die Seitenmittelpunkte eines Parallelogramms.

Bestimme den Anteil der markierten Fläche an der Gesamtfläche des Parallelogramms.



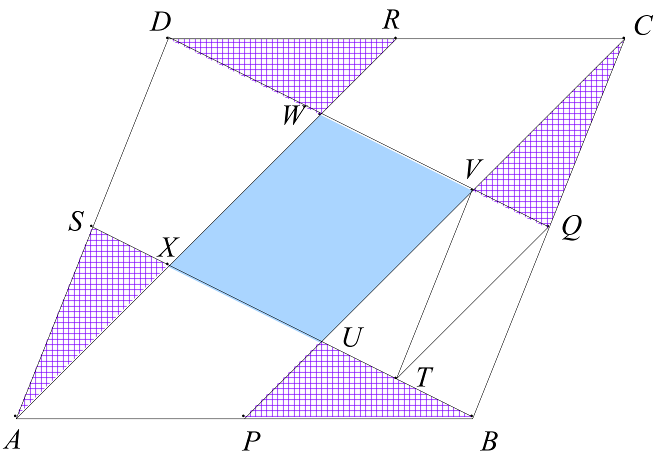
Lösung:

Der Flächeninhalt der markierten Fläche beträgt ein Fünftel des Flächeninhalts der Gesamtfläche des Parallelogramms.

Vorbemerkung:

Die vier Eckpunkte des Parallelogramms werden *A*, *B*, *C* und *D* genannt, die vier Eckpunkte der markierten Fläche werden *U*, *V*, *W* und *X* genannt (vgl. Zeichnung unten).
Da *S* und *Q* Seitenmittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms sind, ist $\overline{SD} = \overline{BQ}$ und $SD \parallel BQ$. Da ein Viereck mit einem Paar von gleich langen und parallelen gegenüberliegenden Seiten ein Parallelogramm ist, ist *SBQD* ein Parallelogramm, also $SB \parallel DQ$. Analog folgt: $AR \parallel PC$.
Damit ist gezeigt, dass das markierte Viereck *UVWX* ein Parallelogramm ist.

1. Beweisvorschlag: (Mit Mittelparallelen)



Da *P*, *Q*, *R* und *S* Seitenmitten sind, beträgt der Flächeninhalt der vier Dreiecke *ABS*, *BCP*, *CDQ* und *DAR* jeweils ein Viertel des Flächeninhalts des großen Parallelogramms. Die Summe der Flächeninhalte dieser vier Dreiecke ist also so groß wie der Flächeninhalt des großen Parallelogramms. Die vier Dreiecke überdecken zusammen das ganze Parallelogramm *ABCD,* bis auf die markierte Fläche *UVWX* in der Mitte. Andererseits überlappen sich die vier Dreiecke an den Ecken in den vier karierten Dreiecken *VQC, WRD, XSA*, und *UPB.* Die überlappte Fläche muss genauso groß sein, wie die nicht überdeckte Fläche. Die Summe der Flächeninhalte der vier kleineren Dreiecke ist folglich genauso groß wie der Flächeninhalt des markierten Parallelogramms.

<u>*Behauptung:*</u> Es sei $x = A(VQC)$ der Flächeninhalt des kleinen Dreiecks *VQC* und $y = A(WRD)$ der Flächeninhalt des kleinen Dreiecks *WRD*. Dann ist $x = y = \frac{1}{20}A(ABCD)$.

Beweis der Behauptung: Da nach Vorbemerkung $VQ \parallel UB$ und *Q* die Mitte von *BC* ist, ist *VQ* eine Mittelparallele im Dreieck *UBC*. Somit ist $2 \cdot \overline{VQ} = \overline{UB}$. Das Dreieck *UBC* ist also ähnlich zum Dreieck *VQC* mit dem Streckfaktor 2, es hat somit den vierfachen Flächeninhalt $A(UBC) = 4x$. Dies kann man auch erkennen, wenn man die beiden anderen Mittelparallelen *VT* und *QT* im Dreieck *UBC* einzeichnet. Dann wird das Dreieck *UBC* durch vier kleine Dreiecke parkettiert, die alle zum Dreieck *VQC* kongruent sind, so dass $A(UBC) = 4x$ (siehe obige Zeichnung). Analog ist $A(VCD) = 4y$.

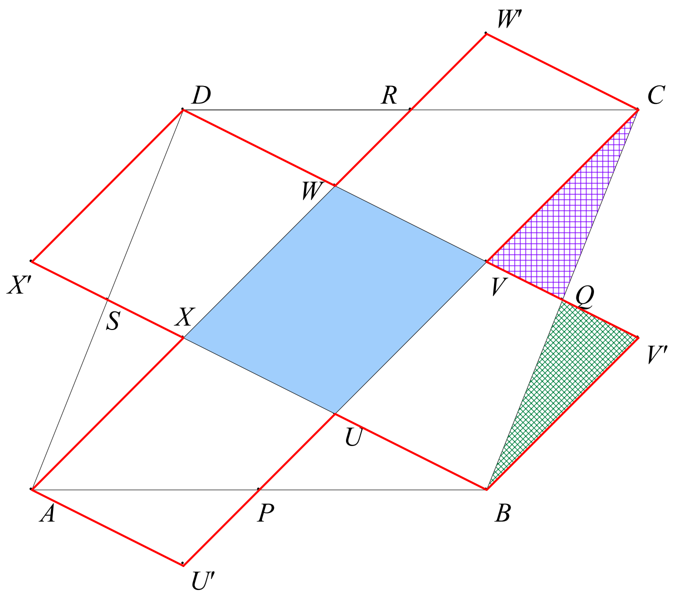
Es ergibt sich $A(BCP) = A(UBC) + A(PBU) = 4x + y$ und $A(CDQ) = A(VCD) + A(VQC) = 4y + x$. Da die Dreiecke *BCP* und *CDQ* den gleichen Flächeninhalt $\frac{1}{4} \cdot A(ABCD)$ haben, folgt $4x + y = 4y + x$. Somit ist $x = y$ und $A(CDQ) = 5x$. Also $x = y = \frac{1}{5} \cdot A(CDQ) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot A(ABCD) = \frac{1}{20} \cdot A(ABCD)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Da die Summe der Flächeninhalte der kleinen Dreiecke so groß ist wie der Flächeninhalt des markierten Parallelogramms *UVWX*, beträgt der Anteil der markierten Fläche an der Gesamtfläche also vier Zwanzigstel oder ein Fünftel.

2. Beweisvorschlag: (Mit Punktspiegelung)

Die Ecken *U, V, W, X* des markierten Parallelogramms werden an den Seitenmitten des großen Parallelogramms ABCD gespiegelt. Es entsteht eine kreuzförmige Figur *U'UBV'VCW'WDX'XA* , deren Flächeninhalt so groß ist wie der Flächeninhalt des ursprünglichen Parallelogramms, da nach Konstruktion die karierten Dreiecke gleich groß sind.

Behauptung: Diese Kreuzfigur lässt sich in fünf kongruente Parallelogramme zerlegen, wovon eins das markierte Parallelogramm ist. Der Anteil der markierten Fläche ist also ein Fünftel der Gesamtfläche.



Beweis der Behauptung:

(1) *Sei V'* der Bildpunkt von *V* bei der Spiegelung an *Q*. Dann liegt *V'* auf der Geraden (*DQ*). Wegen $VQ \parallel UB$ (s. Vorbemerkung), gilt auch $VV' \parallel UB$.

(2) *BV'* ist das Bild von *VC* bei der Punktspiegelung an *Q*, daher ist $BV' \parallel VC$.

(3) Aus (1) und (2) ergibt sich, dass *UBV'V* ein Parallelogramm ist, also $\overline{BV'} = \overline{UV}$.

(4) Mit $\overline{BV'} = \overline{VC}$ folgt $\overline{UV} = \overline{VC}$. Analog kann man zeigen $\overline{XU} = \overline{UB}$.

Aus (3) und (4) ergibt sich, dass das Parallelogramm *UBV'V* kongruent ist zum markierten Parallelogramm *UVWX.*

Analog kann man zeigen, dass auch die Vierecke *AU'UX*, *CW'WV* und *DX'XW* kongruent zum markierten Parallelogramm sind.

Damit ist gezeigt, dass sich die „Kreuzfigur" in 5 kongruente Parallelogramme zerlegen lässt. Die Behauptung ist also bewiesen.

Aufgabe 5

Von vier verschiedenen Primzahlen, die alle größer als 5 sind, unterscheiden sich die größte und die kleinste um weniger als 10.
Zeige, dass die Summe dieser vier Primzahlen durch 60 teilbar ist.

Beispiele:

Die folgenden Beispiele zeigen, dass es unterhalb von 1000 vier solche „Primzahlvierlinge“ gibt, wie sie in der Aufgabe beschrieben werden:

1) **11, 13, 17, 19;** Summe 60
2) **101, 103, 107, 109;** Summe 420
3) **191, 193, 197, 199;** Summe 780
4) **821, 823, 827, 829;** Summe 3300

In allen Beispielen ist die Summe durch 60 teilbar. Das muss allgemein bewiesen werden.

1. Beweisvorschlag:

Der allgemeine Beweis folgt aus den folgenden acht Überlegungen:

(1) Alle vier Primzahlen sind ungerade, die Differenz der größten und der kleinsten der vier Primzahlen ist also gerade.

(2) Da je zwei verschiedene ungerade Zahlen mindestens die Differenz zwei haben, ist die Differenz der größten und der kleinsten Primzahl mindestens 6. Da sie nach Voraussetzung kleiner als 10 sein soll, kommt also nur 6 oder 8 für diese Differenz in Frage.

(3) Wäre die Differenz zwischen der größten und der kleinsten Primzahl 6, so würde es sich um vier aufeinander folgende ungerade Zahlen handeln. Bereits bei drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen ist aber eine durch 3 teilbar: die drei Zahlen haben beim Teilen durch 3 unterschiedliche Reste, eine von ihnen hat also Rest 0 und ist somit durch 3 teilbar. Also ist die Differenz zwischen der größten und der kleinsten der vier Primzahlen 8.

(4) Wenn p die kleinste der vier Primzahlen ist, so muss die nächst größere Primzahl $p + 2$ sein. Andernfalls bliebe für die drei anderen Primzahlen nur noch $p + 4$, $p + 6$ und $p + 8$ übrig. Das wären drei aufeinander folgende ungerade Zahlen. Wie in (3) festgestellt wurde, müsste eine dieser drei ungeraden Zahlen durch 3 teilbar sein und kann daher keine Primzahl sein.

(5) Da p und $p + 2$ Primzahlen sind, kann $p + 4$ keine Primzahl sein, da sonst wieder drei aufeinander folgende ungerade Zahlen vorlägen. Es bleibt für die beiden letzten Primzahlen nur $p + 6$ und $p + 8$ übrig.

(6) Die Zahl $p + 4$ ist durch 3 teilbar: Von den drei aufeinander folgenden Zahlen p, $p + 2$ und $p + 4$ ist eine durch drei teilbar. Da p und $p + 2$ Primzahlen sind (siehe (3)), kann nur $p + 4$ durch 3 teilbar sein.

(7) Die Zahl $p + 4$ ist durch 5 teilbar: Bei fünf aufeinander folgenden ungeraden Zahlen ist eine durch 5 teilbar, denn die fünf Zahlen lassen beim Teilen durch 5 alle unterschiedliche Reste. Also ist eine der Zahlen p, $p + 2$, $p + 4$, $p + 6$, $p + 8$ durch 5 teilbar. Da p, $p + 2$, $p + 6$ und $p + 8$ Primzahlen größer als 5 sind, ist $p + 4$ durch 5 teilbar.

(8) Die Summe der vier Primzahlen ist $p+(p+2)+(p+6)+(p+8)=4p+16=4(p+4)$. Da p+4 durch 3 und durch 5 teilbar ist, ist die Summe durch 3, 4 und 5 teilbar. Sie ist also auch durch 60 teilbar.

2. Beweisvorschlag:

Voraussetzungen:

(1) Die Zahlen p_1, p_2, p_3 und p_4 sind Primzahlen

(2) $5 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4$

(3) $p_4 - p_1 < 10$

Nun zum eigentlichen Beweis:

Da alle vier Primzahlen größer als 5 sind (Voraussetzung (2)) kommt 5 nicht als Endziffer von einer der Primzahlen in Frage, denn Zahlen mit Endziffer 5 sind durch 5 teilbar. Da die Differenz aus der größten und der kleinsten der vier Primzahlen kleiner ist als 10 (Voraussetzung (3)), können nicht zwei der Zahlen die gleiche Endziffer haben. Die Primzahlen können als Endziffern also nur die Ziffern 1, 3, 7 und 9 haben. Dabei gibt es die folgenden vier Möglichkeiten für die Endziffernquadrupel:

Fall 1: (1/3/7/9)
Fall 2: (3/7/9/1)
Fall 3: (7/9/1/3)
Fall 4: (9/1/3/7)

Nur **Fall 1** ist für vier verschiedene Primzahlen möglich:

Untersuchung von Fall 2:

Wenn p_1 bei Division durch 3 den **Rest 1** lässt, so ist die um 8 größere Zahl p_4 durch 3 teilbar, ist also keine Primzahl. Dies ist nach Voraussetzung (1) ausgeschlossen.
Wenn p_1 bei Division durch 3 den **Rest 2** lässt, so ist die um 4 größere Zahl p_2 durch 3 teilbar, ist also keine Primzahl. Dies ist nach Voraussetzung (1) ausgeschlossen.
Somit lässt p_1 bei Division durch 3 den **Rest 0** und ist keine Primzahl. Das widerspricht Voraussetzung (1).

Fall 3 und Fall 4 kann man auf ähnliche Weise ausschließen.

Somit ist nur Fall 1 zu untersuchen.

Nachweis der Teilbarkeit der Summe durch 5

Die Summe der vier Endziffern ist $1 + 3 + 7 + 9 = 20$. Daher hat $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ die Einerziffer 0 und ist folglich durch 10 und somit durch 5 teilbar.

Nachweis der Teilbarkeit der Summe durch 3

Nach Voraussetzungen (1) und (2) ist keine der vier Zahlen p_1, p_2, p_3 und p_4 durch 3 teilbar.

Da Fall 1 vorliegt, gilt folgendes:
Wenn p_1 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, so ist die um 2 größere Zahl p_2 durch 3 teilbar, ist also keine Primzahl. Dies ist nach Voraussetzung (1) ausgeschlossen.
Wenn p_1 bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, so lässt die um 2 größere Zahl p_2 den Rest 1, die um 6 größere Zahl p_3 den Rest 2 und die um 8 größere Zahl p_4 den Rest 1. Die Summe der vier Primzahlen lässt daher bei der Division durch 3 den Rest 0, ist also durch 3 teilbar.
Wenn also die vier Zahlen Primzahlen sind, dann ist die Summe dieser vier Primzahlen durch 3 teilbar.

Nachweis der Teilbarkeit der Summe durch 4

Da Fall 1 vorliegt, gilt folgendes:
Wenn p_1 bei Division durch 4 den Rest 1 lässt, so lässt die um 2 größere Zahl p_2 den Rest 3, die um 6 größere Zahl p_3 den Rest 3 und die um 8 größere Zahl p_4 den Rest 1. Die Summe der vier Primzahlen lässt daher bei der Division durch 4 den Rest 0, ist also durch 4 teilbar.
Wenn p_1 bei Division durch 4 den Rest 3 lässt, so lässt die um 2 größere Zahl p_2 den Rest 1, die um 6 größere Zahl p_3 den Rest 1 und die um 8 größere Zahl p_4 den Rest 3. Die Summe der vier Primzahlen lässt daher bei der Division durch 4 den Rest 0, ist also durch 4 teilbar.
Die Divisionsreste 0 und 2 bei Division durch 4 sind bei ungeraden Primzahlen nicht möglich.

Zusammenfassung
Damit ist gezeigt: Wenn die vier Primzahlen p_1, p_2, p_3 und p_4 die in der Voraussetzung genannten Eigenschaften haben, dann ist ihre Summe durch 60 teilbar.

3. Beweisvorschlag:

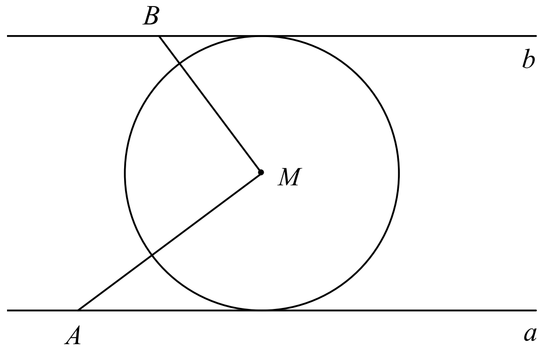
Streicht man nach dem Sieb des Erathostenes aus der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen alle durch 2, 3, 5 teilbaren Zahlen, so erhält man das rechts stehende Schema. Dabei müssen nicht alle acht Zahlen einer Zeile wirklich Primzahlen sein. Zwei untereinander stehende Zahlen dieses Schemas unterscheiden sich stets um 30.

	7	**11**	**13**	**17**	**19**	23	29
31	37	**41**	**43**	**47**	**49**	53	59
61	67	**71**	**73**	**77**	**79**	83	89
91	...						

Primzahlvierlinge können nicht zeilenübergreifend vorkommen, da es beim Zeilenübergang im Schema keine vier Zahlen hat, deren Abstand kleiner 10 ist. Dies erkennt man beim Übergang von Zeile 1 zu Zeile 2. Wegen der periodischen Wiederholung ergibt sich dasselbe bei jedem Zeilenübergang. Primzahlvierlinge können deswegen – falls überhaupt – nur im fettgedruckten Mittelteil des Schemas vorkommen. Wenn jedoch vier Primzahlen die fettgedruckte Mitte des Schemas bilden, so ist ihre Summe durch $4 \cdot 15 = 60$ teilbar.

Aufgabe 6

Die Geraden a und b sind parallele Tangenten an einen Kreis mit Mittelpunkt M. Der Punkt A liegt auf der Tangente a, der Punkt B auf der Tangente b.
Beweise:
Die Gerade (AB) ist genau dann Tangente an den Kreis, wenn AM senkrecht zu BM ist.



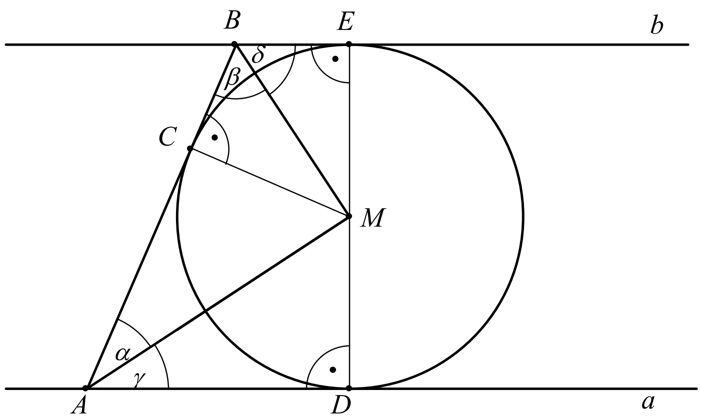
Lösung:

Zur Lösung muss man zwei Schlussrichtungen beweisen:

(A) Wenn die Gerade (*AB*) eine Tangente an den Kreis ist, so ist *AM* senkrecht zu *BM*.

(B) Wenn *AM* senkrecht zu *BM* ist, so ist die Gerade (*AB*) eine Tangente an den Kreis.

1. Beweisvorschlag für die Schlussrichtung (A):



Voraussetzung: Die Gerade (*AB*) ist eine Tangente an den Kreis. Der Punkt C sei der Berührpunkt der Tangente mit dem Kreis.

Die Dreiecke *MEB* und *MBC* sind nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent:

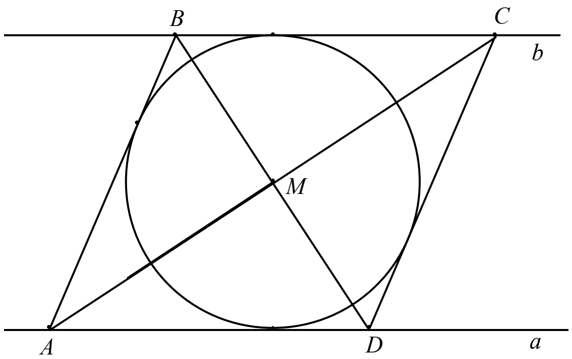
- *ME* und *MC* sind Kreisradien, folglich gleich lang;
- die Strecke *MB* ist beiden Dreiecken gemeinsam;
- in beiden Dreiecken liegt der längeren Seite ein rechter Winkel gegenüber, da eine Tangente orthogonal zum zugehörigen Radius ist.

Somit ist $\delta = \beta$. Analog ergibt sich $\alpha = \gamma$.
Die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle CBE$ ergänzen sich aber zu 180°, da der Wechselwinkel zu $\sphericalangle DAC$ an den parallelen Geraden *a* und *b* der Nebenwinkel von $\sphericalangle CBE$ ist. Somit: $2\alpha + 2\beta = 180°$ und $\alpha + \beta = 90°$. Aus der Winkelsumme im Dreieck *AMB* folgt daher $\sphericalangle BMA = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$. Also ist *AM* senkrecht zu *BM*.

Variante für diesen 1. Beweisvorschlag der Schlussrichtung (A):

Die Winkelgleichheiten $\delta = \beta$ und $\alpha = \gamma$ kann man auch so begründen: Der Mittelpunkt *M* ist von den Geraden *b* und (*BA*) gleich weit entfernt, da dieser Abstand in beiden Fällen der Radius des Kreises ist. Somit liegt *M* auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle CBE$, d.h. $\delta = \beta$. Analog folgt $\alpha = \gamma$.

2. Beweisvorschlag für die Schlussrichtung (A):

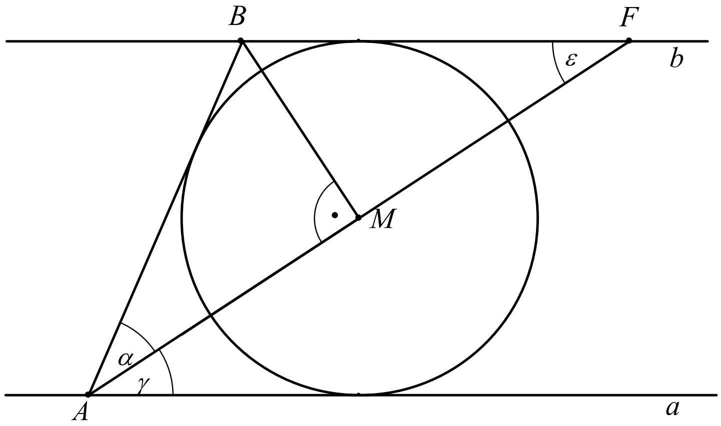


Voraussetzung: Die Gerade (*AB*) ist eine Tangente an den Kreis.

Durch eine Punktspiegelung am Kreismittelpunkt *M*, wird (*AB*) auf die Tangente (*CD*) abgebildet, wobei *C* auf *b* und *D* auf *a* liegt. Das Viereck *ADCB* ist ein Parallelogramm mit einem Inkreis. Es ist daher ein achsensymmetrisches Parallelogramm mit den Symmetrieachsen (*AC*) und (*BD*). Somit ist es eine Raute. Da in einer Raute die Diagonalen senkrecht stehen, ist *BM* senkrecht zu *AM*.

1. Beweisvorschlag für die Schlussrichtung (B): (Mit Abbildungen)

Voraussetzung: *AM* steht senkrecht auf *BM*.

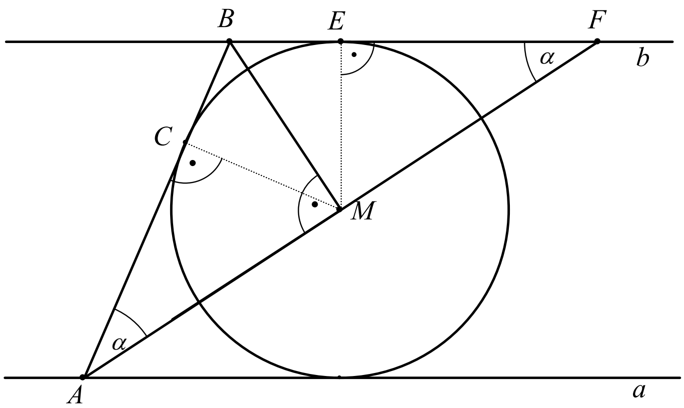


Die Gerade (*AM*) schneide die Gerade *b* im Punkt *F*. Die Winkel werden wie in der Zeichnung benannt.
Bei Spiegelung der Tangente *a* am Kreismittelpunkt *M* wird die Gerade *a* auf die parallele Tangente *b* abgebildet. Damit wird *A* auf *F* abgebildet und *M* ist der Mittelpunkt der Strecke *AF* ist. Folglich ist die Gerade (*BM*) die Mittelsenkrechte von *AF*, denn nach Voraussetzung steht ja *BM* senkrecht auf *AF*.

Damit ist gezeigt, dass das Dreieck *AFB* gleichschenklig mit der Spitze bei *B* ist. Die Achsenspiegelung an der Mittelsenkrechten (*BM*) bildet das gleichschenklige Dreieck auf sich ab, also *b* = (*BF*) auf (*AB*). Der Kreis wird bei dieser Spiegelung an einer Geraden durch den Kreismittelpunkt ebenfalls in sich selbst überführt. Da *b* eine Tangente an den Kreis ist, ist auch das Bild (*AB*) von *b* eine Tangente an den Kreis.

2. Beweisvorschlag für die Schlussrichtung (B): (Mit Abstandsberechnungen)

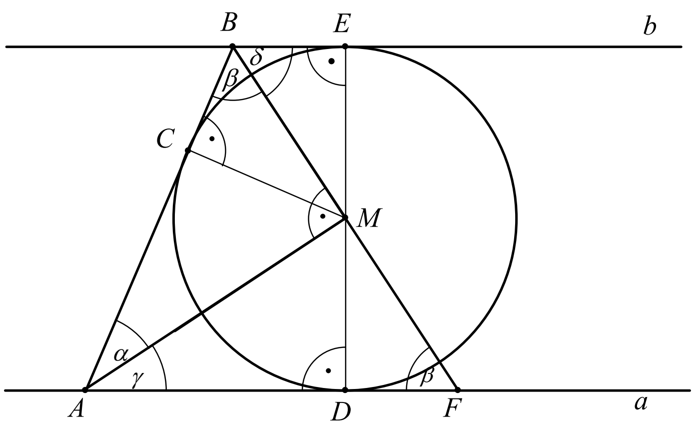
Voraussetzung: *AM* steht senkrecht auf *BM*.



Sei C der Fußpunkt des Lots von M auf die Gerade (AB) und *E* der Fußpunkt des Lots von M auf die Tangente *b*. Es ist dann $\overline{ME} = r$, wobei *r* der Radius des Kreises ist. Die Gerade (AM) schneide *b* im Punkt *F*.
Da M auf der Mittelparallelen zwischen a und b liegt und diese Mittelparallele alle Querstrecken des Streifens halbiert, gilt: $\overline{MA} = \overline{MF}$ und (*MB*) ist daher die Mittelsenkrechte zu *AF*. Somit ist das Dreieck *AFB* gleichschenklig mit Basis *AF*. Damit sind die Basiswinkel dieses Dreiecks beide gleich weit: $\sphericalangle BFM = \sphericalangle MAC = \alpha$. Die Dreiecke *FEM* und *CAM* sind nach dem Kongruenzsatz wsw also kongruent.
Es folgt $\overline{MC} = \overline{ME} = r$. Somit hat die Gerade (*AB*) von *M* gerade den Abstand *r* und sie ist somit eine Tangente an den Kreis.

3. Beweisvorschlag der Schlussrichtung (B): (Mit Winkelberechnungen)

Voraussetzung: *AM* steht senkrecht auf *BM*.



Da B außerhalb des Kreises liegt, gibt es neben *b* eine zweite Kreistangente durch *B*. Ihren Berührpunkt mit dem Kreis nennen wir *C*. Der Radius *MC* ist senkrecht zu *(BC)*.
Es soll gezeigt werden, dass unter der Voraussetzung, dass *AM* senkrecht auf *BM* steht, der Punkt *A* auf dieser Tangente *(BC)* liegt.

Sei *F* der Schnittpunkt der Geraden (*BM*) mit *a*, *D* der Fußpunkt des Lots von *M* auf *a* und *E* der Fußpunkt des Lots von *M* auf *b*. Da *M* von *b* und (*BC*) gleich weit entfernt ist, liegt *M* auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle CBE$, d.h. $\delta = \beta$. Außerdem $\sphericalangle MBE = \sphericalangle MFA = \beta$ (Wechselwinkel an den Parallelen *a* und *b*).

Die Winkelsumme im (nach Voraussetzung) rechtwinkligen Dreieck *AFM* liefert $\gamma = 90° - \beta$. Deshalb gilt im rechtwinkligen Dreieck *BCM*: $\sphericalangle BMC = 90° - \beta = \gamma$.

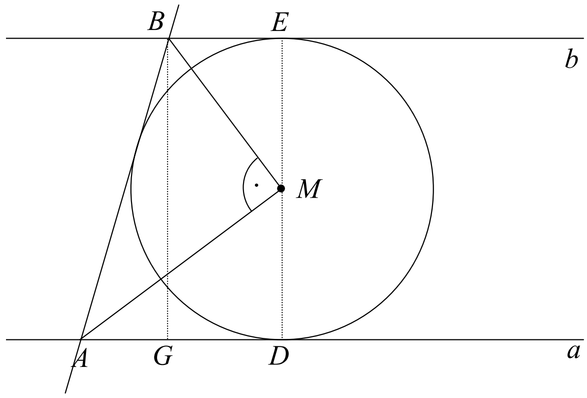
Es folgt: $\sphericalangle CMA = \sphericalangle BMA - \sphericalangle BMC = 90° - \gamma = \beta$.

Die Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck *ADM* ergibt ebenfalls $\sphericalangle AMD = 90° - \gamma = \beta$. Somit sind die Dreiecke *ADM* und *CAM* nach dem Kongruenzsatz sws kongruent ($\overline{CM} = \overline{DM}$ ist der Kreisradius, *AM* ist gemeinsame Seite und der eingeschlossene Winkel hat in beiden Dreiecken die Weite *β*). Es folgt $\sphericalangle CAM = \alpha = \sphericalangle MAD = \gamma$. Aus der Winkelsumme im Dreieck *AMC* ergibt sich $\sphericalangle ACM = 180° - \alpha - \beta = 180° - \gamma - \beta = 90°$.

Somit ist $\sphericalangle ACB = 180°$ ein gestreckter Winkel und *A* liegt daher auf der Geraden (*BC*).

4. Beweisvorschlag der Schlussrichtung (B): (Mit dem Satz des Pythagoras)

Es wird gezeigt, dass der Mittelpunkt *M* des Kreises von der Geraden (*AB*) den Abstand *r* hat. In diesem Fall berührt die Gerade den Kreis, ist also eine Tangente an diesen Kreis.



Sei *D* der Fußpunkt des Lots von *M* auf *a* und *E* der Fußpunkt des Lots von *M* auf *b*. Außerdem sei (*BG*) eine Parallele zu (*ED*) durch *B*, wobei *G* auf *a* zwischen *A* und *D* liege, wie wir aus Symmetriegründen annehmen können.

In den rechtwinkligen Dreiecken *ADM* und *MEB* berechnen wir mit dem Satz von Pythagoras:

$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DM}^2 = u^2 + r^2,\quad \overline{AM} = \sqrt{u^2 + r^2},$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EM}^2 = v^2 + r^2,\quad \overline{BM} = \sqrt{v^2 + r^2}.$$

Hierbei ist $u = \overline{AD}$ und $v = \overline{BE}$.

Damit erhält man den Flächeninhalt *F* des nach Voraussetzung rechtwinkligen Dreiecks *AMB*:

$$(*) \qquad F = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{u^2 + r^2} \cdot \sqrt{v^2 + r^2}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks *AMB* kann auf eine zweite Weise berechnet werden.

Die Länge der Strecke *AB* ergibt sich im rechtwinkligen Dreieck *AGB* nach dem Satz von Pythagoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GB}^2 = (u - v)^2 + (2r)^2.$$

Bezeichnet man den Abstand des Punktes *M* von der Geraden durch *A* und *B* mit *d*, so folgt:

$$(**) \qquad F = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(u - v)^2 + (2r)^2} \cdot d.$$

Der Vergleich von (*) mit (**) und Quadrieren ergibt:

$$(***) \qquad (u^2 + r^2)(v^2 + r^2) = [(u - v)^2 + 4r^2] \cdot d^2.$$

Einen weiteren Zusammenhang zwischen *u*, *v* und *r* erhält man über die beiden rechtwinkligen Dreiecke *ADM* und *MEB*. Diese Dreiecke sind ähnlich, da sie in allen drei Winkeln übereinstimmen.

Daher gilt $\overline{AD} : \overline{DM} = \overline{ME} : \overline{BE}$, **d.h.** $u : r = r : v$ **oder** $r^2 = uv$.

Durch Einsetzen in (***) ergibt sich $(u^2 + uv)(v^2 + uv) = (u^2 - 2uv + v^2 + 4uv) \cdot d^2$.

Daraus folgt durch Umformung $d = r$. Die Gerade (*AB*) hat also von *M* den Abstand *r* und ist daher eine Tangente.