2004

Runde 2

Aufgabe 1

Die zwölf natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 11, n (n > 11) werden an die Kanten eines Oktaeders geschrieben. An jede Ecke schreibt man die Summe der vier Zahlen, die an den dort stehenden Kanten stehen.
Für welche Werte von n kann man an allen Ecken denselben Summenwert erhalten?

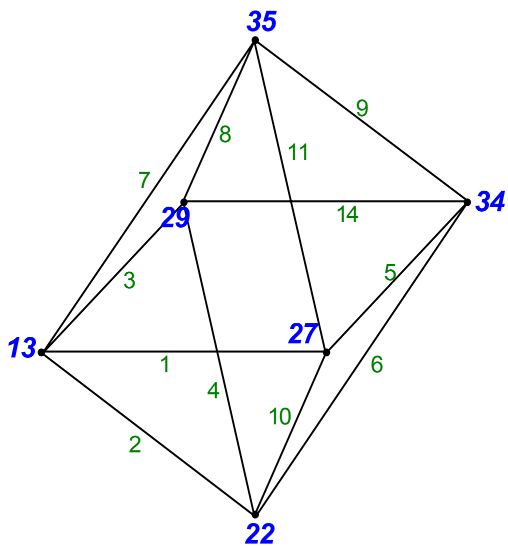
Lösung:

Für $n = 12$ und $n = 15$ kann man allen Ecken denselben Summenwert erhalten.

Beweis:

Sei n eine natürliche Zahl. Die Zahlen 1, 2, 3, ... , 11, *n* werden an die zwölf Kanten eines Oktaeders geschrieben. Für eine Kante des Oktaeders heißt die Zahl, die an dieser Kante steht, *Kantenzahl* der Kante. Die Summe der vier Kantenzahlen, die zu einer Ecke gehören, heißt *Eckenzahl* der Ecke. Die Eckenzahl wird an die zugehörige Ecke geschrieben.

Rechts ist eine solcher Oktaeder für *n* = 14 gezeichnet. Die sich aus der Verteilung der Kantenzahlen ergebenden Eckenzahlen sind blau und fett gedruckt. Man sieht, dass die Eckenzahlen nicht alle gleich groß sind. Es muss untersucht werden, für welche *n* man die Kantenzahlen so verteilen kann, dass alle sechs Eckenzahlen gleich groß werden.



1. Bedingung für *n*:

Da jede Kante zu genau zwei Ecken gehört, ist die Summe der sechs Eckenzahlen doppelt so groß wie die Summe der Kantenzahlen, also
$(1+2+3+\ldots+11+n)\cdot 2 = 132+2n$.
Wenn alle Eckenzahlen gleich groß sind, so ist jede Eckenzahl

$$\frac{132+2n}{6} = 22+\frac{n}{3}.$$

Da die Eckenzahl eine natürliche Zahl ist, muss *n* durch 3 teilbar sein.

2. Bedingung für *n*:

An den beiden Ecken, die zur Kante mit Kantenzahl *n* gehören, treffen jeweils drei weitere Kanten zusammen. Die Kantenzahlen der drei Kanten der einen Ecke sind x_1, x_2, x_3 die Kantenzahlen der drei Kanten der anderen Ecke sind x_4, x_5, x_6. Hierbei ist $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Somit sind $x_1 + x_2 + x_3 + n$ und $x_4 + x_5 + x_6 + n$ die Eckenzahlen der beiden Ecken, die zur Kante mit Kantenzahl *n* gehören. Wenn die Eckenzahlen alle gleich groß sind, so ist $e = x_1 + x_2 + x_3 + n = x_4 + x_5 + x_6 + n$.

Also

$$x = e - n = x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 .$$

Die Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sind paarweise verschiedene natürliche Zahlen, daher ist $2x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1+2+3+4+5+6 = 21$. Somit $x \geq \frac{21}{2} = 10{,}5$.

Es folgt $x \geq 11$.

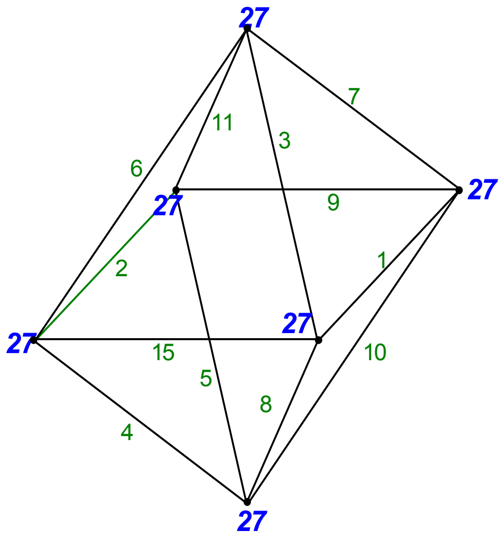
Wegen $e = n + x = 22 + \frac{n}{3}$ ergibt sich nun $n = 33 - \frac{3}{2}x \leq 33 - \frac{3}{2} \cdot 11 = 16{,}5$.

Es ist also $n \leq 16$.

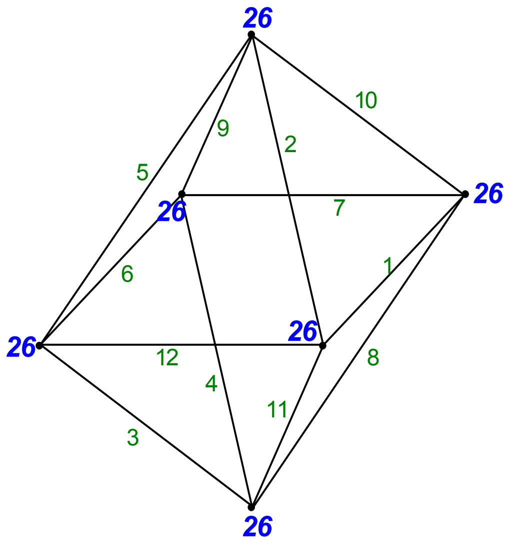
Da nach Aufgabenstellung $n > 11$ ist, erfüllen nur noch die Werte $n = 12$ und $n = 15$ beide Bedingungen für *n*. Für $n = 12$ ergibt sich die Eckenzahl $e = 22 + \frac{n}{3} = 26$, für $n = 15$ ist es die Eckenzahl $e = 22 + \frac{n}{3} = 27$.

Durch geschicktes Probieren findet man die folgenden Lösungen für $n = 12$ und $n = 15$. Dabei geht man am besten zunächst von der Kante mit Kantenzahl *n* aus und untersucht die möglichen Ergänzungen mit drei verschiedenen Summanden auf die berechnete Eckenzahl.

Für $n = 15$:



Für $n = 12$:



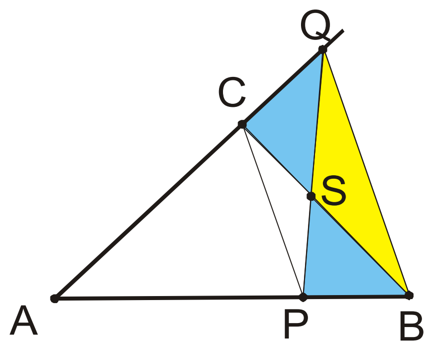
Aufgabe 2

Auf der Seite AB eines Dreiecks ABC liegt ein von A und B verschiedener Punkt P. Zwei Geraden durch P zerlegen die Dreiecksfläche in drei Teile.
Konstruiere die Geraden so, dass die drei Flächenstücke den gleichen Inhalt haben.

1. Lösungsmöglichkeit:

Vorüberlegung:
Gegeben ist ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf der Halbgeraden mit Endpunkt A durch B.
Sei Q der Schnittpunkt der Parallelen zu PC durch B mit der Geraden (AC). Dann haben die Dreiecke ABC und APQ den gleichen Flächeninhalt.

Beweis der Vorüberlegung:
Der Flächeninhalt $A(BQC)$ des Dreiecks BQC ist gleich groß, wie der Flächeninhalt $A(BQP)$ des Dreiecks BQP, da beide Dreiecke die gleiche Grundseite BQ und die gleiche Höhe haben.
Wenn S den Schnittpunkt der Strecken BC und PQ bezeichnet, so haben auch die Dreiecke BSP und CSQ denselben Flächeninhalt, da sie aus den flächengleichen Dreiecken BQP und BQC durch Abtrennen desselben Dreiecks BQS entstehen.



Damit $A(ABC) = A(APSC) + A(BSP) = A(APSC) + A(CSQ) = A(APQ)$.

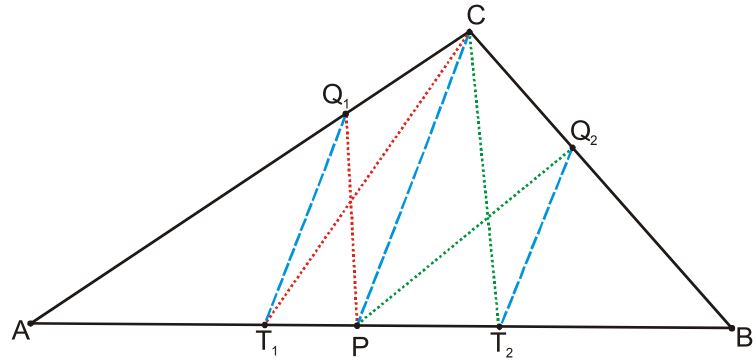
Lösung der Aufgabe:
Man konstruiert auf der Strecke AB die Teilungspunkte T_1 und T_2 mit

$$\overline{AT_1} = \overline{T_1T_2} = \overline{T_2B} = \frac{1}{3}\overline{AB}.$$

Das Dreieck ABC wird durch die Strecken T_1C und T_2C in drei gleich große Dreiecke geteilt, da diese Dreiecke gleich lange Grundseiten und Höhen haben.

<u>*Fall 1:*</u> P liegt auf T_1T_2.

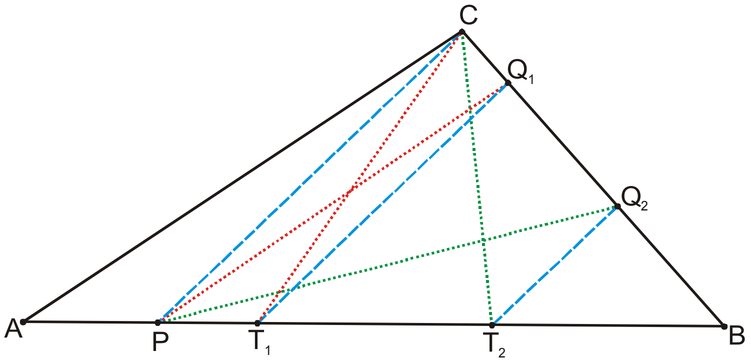
Der Punkt Q_1 wird konstruiert als Schnittpunkt der Parallelen zu PC durch T_1 mit AC, der Punkt Q_2 wird konstruiert als Schnittpunkt der Parallelen zu PC durch T_2 mit BC.
Damit liefern die Geraden (PQ_1) und (PQ_2) durch P die gesuchte Dreiteilung des Dreiecks.



Nach der Vorbemerkung ist nämlich
$A(APQ_1) = A(AT_1C) = A(ABC)/3 = A(T_2BC) = A(PBQ_2) = A(PQ_2CQ_1)$.

Fall 2: P liegt auf AT_1.

Die Punkte Q_i werden als Schnittpunkte der Parallelen zu *PC* durch T_i mit *BC* konstruiert ($i = 1{,}2$).
Die Geraden (PQ_1) und (PQ_2) durch *P* teilen das Dreiecks in drei gleiche Teile: Nach der Vorbemerkung ist nämlich
$A(PBQ_2) = A(T_2BC) = A(ABC)/3$
und



$A(PBQ_1) = A(T_1BC) = \frac{2}{3}A(ABC)$. Also ist auch

$A(PQ_2Q_1) = A(PBQ_1) - A(PBQ_2) = \frac{1}{3}A(ABC)$ und $A(APQ_1C) = \frac{1}{3}A(ABC)$.

Fall 3: P liegt auf T_2B.

In diesem Fall ist der Beweis analog wie im Fall 2. Nur die Rolle von *A* und *B* ist vertauscht.

2. Lösungsmöglichkeit:

Vorüberlegungen

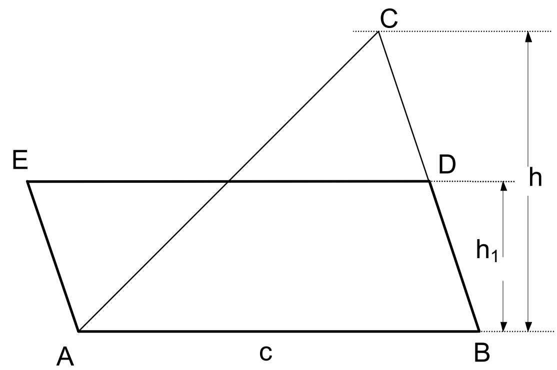
1. *Zu jedem Dreieck ABC kann man ein flächeninhaltsgleiches Parallelogramm mit derselben Grundseite konstruieren.*

In der Zeichnung ist c diese Grundseite.
Für den Inhalt von Dreieck ABC gilt:

$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$.

Das Parallelogramm ABDE hat den Inhalt:

$A(ABDE) = c \cdot h_1$.

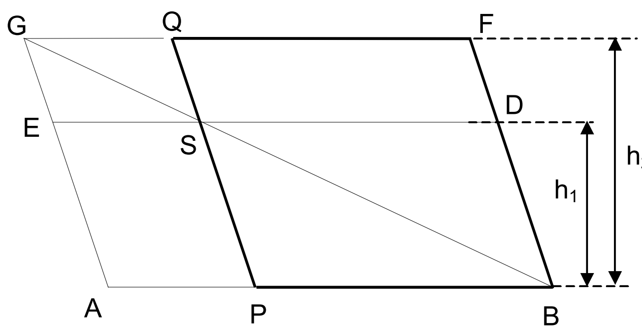


Die beiden Inhalte sind gleich für $h_1 = \frac{1}{2} \cdot h$, wenn also *D* der Mittelpunkt von *BC* ist.

2. *Zu jedem Parallelogramm ABDE und jedem Punkt P auf AB lässt sich ein flächeninhaltsgleiches Parallelogramm mit Grundseite PB konstruieren. Dabei ist*

$\overline{FB} \cdot \overline{PB} = \overline{AB} \cdot \overline{DB}$. (*)

Um das Parallelogramm *ABDE* in das flächeninhaltsgleiche Parallelogramm mit der Grundseite *PB* zu verwandeln, konstruiert man die Parallele durch *P* zu (*BD*). Diese schneidet (*ED*) im Punkt *S*. Die beiden Geraden (*BS*) und (*AE*)



schneiden sich in G. Die Parallele durch G zu (AB) schneidet (BD) in F und (PS) in Q. Dann hat das Parallelogramm $PBFQ$ denselben Flächeninhalt wie das Parallelogramm $ABDE$.

Begründung der Konstruktion:
Jede Diagonale zerlegt ein Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke. Diese Dreiecke haben denselben Flächeninhalt. Folglich $A(ABG) = A(BFG)$.
Nun gilt: $A(ABG) = A(APSE) + A(PBS) + A(ESG)$ und
$A(BFG) = A(SDFQ) + A(BDS) + A(SQG)$
Wegen $A(PBS) = A(BDS)$ und $A(ESG) = A(SQG)$ folgt daraus: $A(APSE) = A(SDFQ)$.
Folglich ist $A(PBFQ) = A(SDFQ) + A(PBDS) = A(APSE) + A(PBDS) = A(ABDE)$.

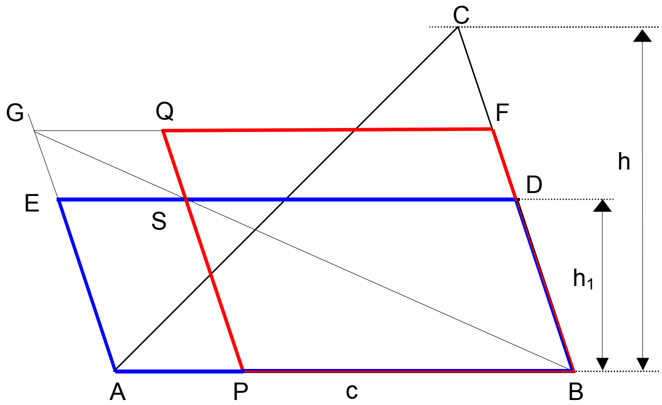
Aus der Flächengleichheit folgt $h_2 \cdot \overline{PB} = h_1 \cdot \overline{AB}$. Da nach dem Strahlensatz $\frac{h_2}{h_1} = \frac{\overline{FB}}{\overline{DB}}$,

folgt $\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{DB}}$, es gilt also auch die Beziehung (*).

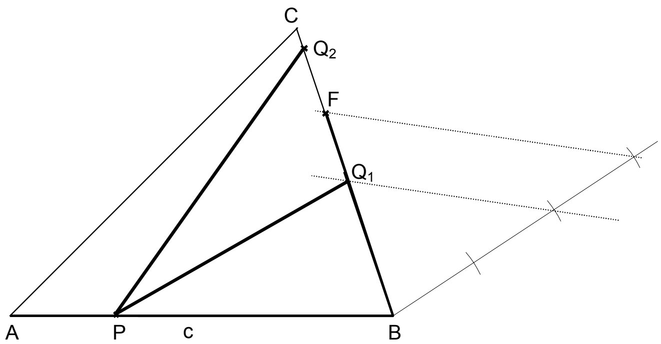
Lösung der Aufgabe:

Fall 1: *Es gilt* $\overline{PB} \geq \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$.

In diesem Fall verwandelt man wie in der ersten Vorüberlegung das Dreieck ABC in ein Parallelogramm $ABDE$ von gleichem Flächeninhalt. Der Punkt D ist hierbei der Mittelpunkt der Strecke BC. Dieses Parallelogramm verwandelt man dann wie in der zweiten Vorüberlegung in das flächengleiche Parallelogramm $PBFQ$ mit Grundseite PB. Auf diese Weise entsteht der Punkt F auf der Geraden (BC). Nach (*) gilt wegen $\overline{PB} \geq \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$ die Beziehung $\overline{DB} \geq \frac{2}{3} \cdot \overline{FB}$. Insbesondere liegt F auf BC.



Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind in der nebenstehenden Abbildung die Parallelogramme nicht mehr eingezeichnet.
Die Strecke BF wird nach der üblichen Grundkonstruktion im Verhältnis 2:1 von B aus geteilt. Es entsteht der Teilpunkt Q_1 mit $\overline{Q_1B} = \frac{2}{3} \cdot \overline{FB} \leq \overline{DB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CB}$.



<u>Behauptung:</u> *Der Flächeninhalt des Dreiecks PBQ_1 ist ein Drittel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC*.

<u>Begründung:</u>
Der Teilpunkt Q_1 zerlegt die Grundseite *BF* des Parallelogramms *PBFQ* so, dass $\overline{Q_1B} = \frac{2}{3}\overline{FB}$ ist. Die Parallele zu (*PB*) durch Q_1 zerlegt das Parallelogramm *PBFQ* in zwei Parallelogramme, deren Flächeninhalte sich ebenfalls wie 2:1 verhalten. Das Dreieck PBQ_1 halbiert das größere dieser beiden Parallelogramme und sein Flächeninhalt ist daher ein Drittel des Flächeninhalts des Parallelogramms *PBFQ.* Er ist somit ein Drittel des Flächeninhalts *ABC*.
Damit ist die Behauptung bewiesen und die Gerade (PQ_1) gefunden.

Durch Spiegelung des Punktes *B* an Q_1 erhält man in diesem Fall 1 den Punkt Q_2 auf *BC*, denn es ist ja Q_1B höchstens halb so lang wie *BC*. Da die beiden Dreiecke PBQ_1 und PQ_1Q_2 nach Konstruktion gleiche Grundseitenlängen $\overline{BQ_1} = \overline{Q_1Q_2}$ und wegen der gemeinsamen dritten Ecke *P* auch die gleiche zugehörige Höhe haben, sind ihre Flächeninhalte gleich und jeder Flächeninhalt ist ein Drittel des Flächeninhalts des gegebenen Dreiecks *ABC*. Damit hat die viereckige Restfläche APQ_2C ebenfalls ein Drittel des Flächeninhalts des Dreiecks *ABC* und das Dreieck ist wie gefordert zerlegt. Beide Teilpunkte liegen auf der Seite *BC*.

<u>Fall 2:</u> *Es gilt* $\frac{1}{3}\cdot\overline{AB} \le \overline{PB} \le \frac{2}{3}\cdot\overline{AB}$.
Wie im ersten Fall verwandelt man mit der ersten und zweiten Vorüberlegung das Dreieck *ABC* in ein flächengleiches Parallelogramm *PBFQ* mit Grundseite *PB*. Wieder liegt der Punkt *F* auf der Geraden (*BC*)*.* Nach (*) gilt wegen $\frac{1}{3}\cdot\overline{AB} \le \overline{PB}$ die Beziehung $\overline{FB} \le 3\cdot\overline{DB} = \frac{3}{2}\cdot\overline{CB}$. Wie im 1. Fall wird Q_1 auf *FB* mit $\overline{Q_1B} = \frac{2}{3}\overline{FB}$ konstruiert.
Der Punkt Q_1 liegt also auf der Seite *BC* des Dreiecks.

Der zweite Teilpunkt Q_2 muss aber wegen $\overline{PB} \le \frac{2}{3}\cdot\overline{AB}$ auf der anderen Dreiecksseite *AC* liegen. Man erhält Q_2 auf *AC* auf analoge Weise wie Q_1 auf *BC*:

- Das Dreieck *ABC* in ein flächeninhaltsgleiches Parallelogramm verwandeln, dessen eine Seite *AB* ist und dessen andere Seite auf *AC* liegt.
- Dieses Parallelogramm in ein flächeninhaltsgleiches Parallelogramm verwandeln, dessen eine Seite *PA* ist; der Eckpunkt des Parallelogramms auf *AC* sei H.
- Dann wird *AH* von A aus im Verhältnis 2:1 teilen. Der Teilpunkt ist Q_2. Da $\overline{PA} \ge \frac{1}{3}\cdot\overline{BA}$ liegt Q_2 auf *AC*, wie oben bewiesen wurde.

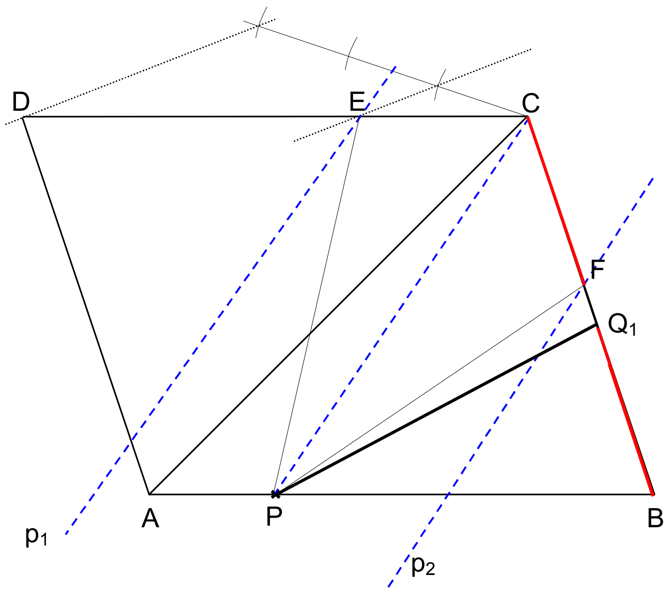
Damit sind auch in diesem Fall die Geraden (PQ_1) und (PQ_2) gefunden, die den Flächeninhalt des Dreiecks dritteln. Die beiden Teilpunkte liegen auf unterschiedlichen Dreiecksseiten.

<u>Fall 3:</u> *Es gilt* $\overline{PB} \le \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$.

In diesem Fall ist $\overline{PA} \ge \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$ und man kann daher analog zu Fall 1 vorgehen, nur die Rollen von A und B sind vertauscht. Beide Teilpunkte liegen auf AC.

3. Lösungsmöglichkeit:

Das gegebene Dreieck *ABC* wird zum Parallelogramm *ABCD* ergänzt. Dieses Parallelogramm hat den doppelten Flächeninhalt wie das Dreieck *ABC*.
Die Seite *CD* wird durch den Punkt *E* im Verhältnis 1:2 von *C* aus geteilt. Dann hat das Dreieck *PCE* (genauso wie *EAC*) ein Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms *ABCD* und daher ein Drittel des Inhalts von Dreieck *ABC*.
Nun wird die Parallele p_1 zu (*PC*) durch *E* konstruiert und an (*AC*) gespiegelt. Das Spiegelbild ist p_2.



Wenn $\overline{PB} \ge \overline{EC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$ ist, so ist der Abstand von *B* zu (*PC*) größer wie der von *E* zu (*PC*) und daher schneidet die Gerade p_2 die Strecke *BC* in einem Punkt *F*.
Da die beiden Parallelen nach Konstruktion von (*PC*) denselben Abstand haben, ist *PFC* flächengleich mit *PCE*. Der Flächeninhalt der beiden Dreiecke ist ein Drittel des Flächeninhalts von *ABC*. Nun verschiebt man die Strecke *CF* längs (*CB*) so, dass *F* auf *B* fällt. Der Bildpunkt von *C* heiße Q_1.
Das Dreieck PBQ_1 hat denselben Flächeninhalt wie *PFC*, da beide Dreiecke gleichlange Grundseiten und Höhen haben. Somit ist die Gerade (PQ_1) für den Fall $\overline{PB} \ge \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$ konstruiert.

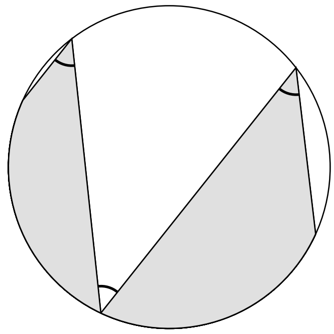
Wenn sogar $\overline{PB} \ge \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$, so liegt auch der zweite Teilpunkt Q_2 auf *BC*. Man erhält ihn durch Spiegelung von *B* an Q_1. In diesem Fall ist nämlich $\overline{BQ_1} \le \frac{1}{2}\overline{BC}$. Der Beweis, dass ($PQ_1$) und ($PQ_2$) die Fläche von *ABC* dritteln, ist gleich wie im 2. Lösungsweg.

Im Fall $\frac{1}{3} \cdot \overline{AB} \le \overline{PB} \le \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$ ist die Strecke BQ_1 länger ist als die Hälfte der Seitenlänge *BC*, also liegt der zweite Teilpunkt auf *AC*. Diesen Teilpunkt erhält man auf analoge Weise wie den Teilpunkt Q_1 auf *BC*, man ergänzt nur das Dreieck *ABC* zu einem Parallelogramm, dessen eine Seite *AB* ist und dessen andere Seite auf *AC* liegt.

Genauso kann man schließlich verfahren, wenn $\overline{PB} \le \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$. Dann liegen beide Teilpunkte auf der Strecke *AC*. Der erste Teilpunkt wird so konstruiert, wie es gerade für Q_2 beschrieben wurde. Den zweiten erhält man in diesem Fall durch Spiegeln von *A* am ersten Teilpunkt.

Aufgabe 3

Die drei gekennzeichneten Winkel sind jeweils 45°-Winkel. Bestimme den Anteil der markierten Fläche an der Kreisfläche.



Vorbemerkungen

Die gemeinsamen Punkte von Kreis und Winkel werden wie in der untenstehenden Figur mit A, B, C, D und E bezeichnet.

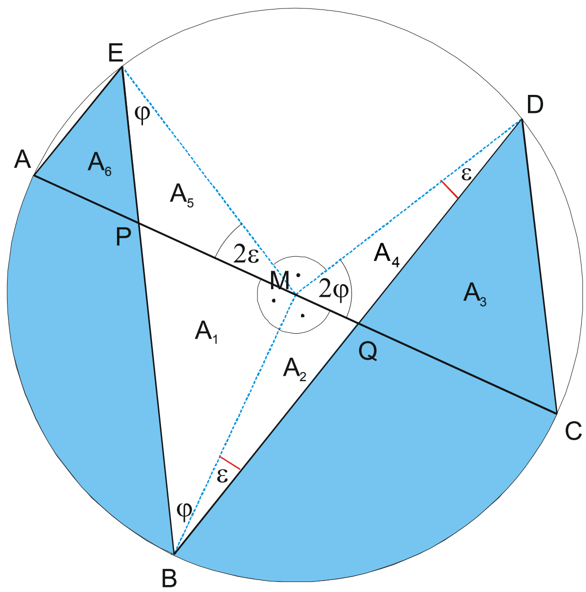
1. Der Winkel $\angle AEB$ hat nach Aufgabenstellung die Weite 45°. Es ist der Umfangswinkel zur Sehne *AB*. Der zugehörigen Mittelpunktswinkel $\angle AMB$ hat daher die doppelte Weite, also 90°. Analog ist $\angle BMC$ ein rechter Winkel als Mittelpunktswinkel zur Sehne BC.

2. Die Winkel $\angle AMB$ und $\angle BMC$ ergänzen sich also zu 180°. Die Strecke *AC* ist deshalb ein Kreisdurchmesser und halbiert den Kreis.

3. Es ist $\angle DME = 90°$, denn dieser Winkel ist der Mittelpunktswinkel zur Sehne *ED*, die nach Aufgabenstellung den Umfangswinkel $\angle DBE = 45°$ hat.

1. Lösungsmöglichkeit:

Mit $A_1, A_2, \ldots, A_6$ werden die Flächeninhalte der in der nebenstehenden Figur gekennzeichneten Dreiecke *PBM* usw. bezeichnet.



<u>Behauptung:</u> $A_1 + A_2 = A_3 + A_6$.

Wenn diese Behauptung gezeigt ist, so kann man die Dreiecke *PBM* und *BQM* statt *APE* und *QCD* markieren. Die markierte Fläche bleibt dabei gleich groß und ist die so groß wie der Flächeninhalt eines Halbkreises. Der Flächenanteil ist also bestimmt.

<u>Beweis der Behauptung:</u>

Das Dreieck *BDM* ist gleichschenklig mit dem Basiswinkel ε. Da *EM* orthogonal zu *DM* ist (Vorbemerkung 3), hat der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks *AME* die Weite 2ε. Das Dreieck *BDM* mit den Schenkellängen *r* und dem Basiswinkel ε, lässt sich, wenn man es entlang der Mittelsenkrechten zur Basis auftrennt, in ein flächengleiches Dreieck mit den Schenkellängen *r* und der Winkelweite 2ε umlegen. Dieses Dreieck ist dann kongruent zum Dreieck *AME* (Kongruenzsatz SWS). Deshalb sind die Dreiecke *AME* und *BDM* flächengleich. Entsprechend sind die Dreiecke *CDM* und *EBM* flächengleich (verwende φ statt ε). Es ergibt sich

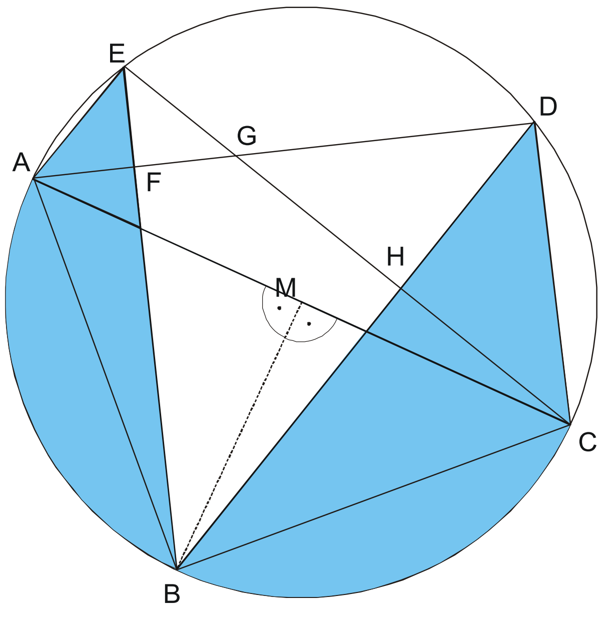
$$A_2 + A_4 = A_5 + A_6 \text{ und } A_1 + A_5 = A_3 + A_4.$$

Daraus folgt $A_1 + A_2 = A_3 + A_6$. Die Behauptung ist also bewiesen.

Variante zur 1. Lösungsmöglichkeit:

In der 1. Lösungsmöglichkeit wurde die Flächengleichheit der Dreiecke *AME* und *BDM* bzw. der Dreiecke *CDM* und *EBM* bewiesen. Diese Flächengleichheit kann man auch mit Hilfe der Trigonometrie zeigen:
Das Dreieck *BDM* ist gleichschenklig mit Basis *BD*, Basiswinkel ε, und Schenkellänge *r*. Wenn man als Grundseite *g* die Basis *BD* nimmt und mit *h* die zugehörige Höhe bezeichnet, so gilt $cos(\varepsilon) = \frac{g}{2r}$ und $sin(\varepsilon) = \frac{h}{r}$. Der Flächeninhalt von *BDM* ist daher
$A(BDM) = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}2r\,cos(\varepsilon)r\,sin(\varepsilon) = \frac{1}{2}r^2\,sin(2\varepsilon)$, denn es gilt die Beziehung
$sin(2\varepsilon) = 2\,sin(\varepsilon)cos(\varepsilon)$ (vgl. Formelsammlung).
Es ist wie in der 1. Lösungsmöglichkeit $\angle EMA = 2\varepsilon$. Der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks *AME* ist daher $A(AME) = \frac{1}{2}r^2\,sin(180^\circ - 2\varepsilon) = \frac{1}{2}r^2\,sin(2\varepsilon)$, also
$A(AME) = A(BDM)$.
Die analoge Berechnung liefert $A(EBM) = A(CDM)$.
Wie in der 1. Lösungsmöglichkeit folgt aus dieser Flächengleichheit die Behauptung.

2. Lösungsmöglichkeit:



Aufgrund der angegebenen Winkel ist *DC* parallel zu *BE* und *BD* parallel zu *AE*. Nach dem Satz des Thales ist *AD* orthogonal zu *EB, AB* orthogonal zu *BC* und *EC* orthogonal zu *BD*.
Es ergeben sich die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke *AFE* , *EFG*, *GHD*, *HCD, FBD* und *ABM*.

Bezeichnet man die Länge der Strecke *AF* mit x , so gilt $x = \overline{AF} = \overline{EF} = \overline{FG}$.
Bezeichnet man die Länge der Strecke *BF* mit y , so gilt $y = \overline{BF} = \overline{FD}$ und
$\overline{GD} = y - x$.
Mit dem Satz des Pythagoras folgt
$\overline{BD} = \sqrt{2}y$ und $\overline{GH} = \overline{HD} = \overline{HC} = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$.
Der Satz des Pythagoras, einmal angewandt auf das Dreieck *ABF* und einmal auf das Dreieck *ABM* , liefert die Beziehung $x^2 + y^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$.

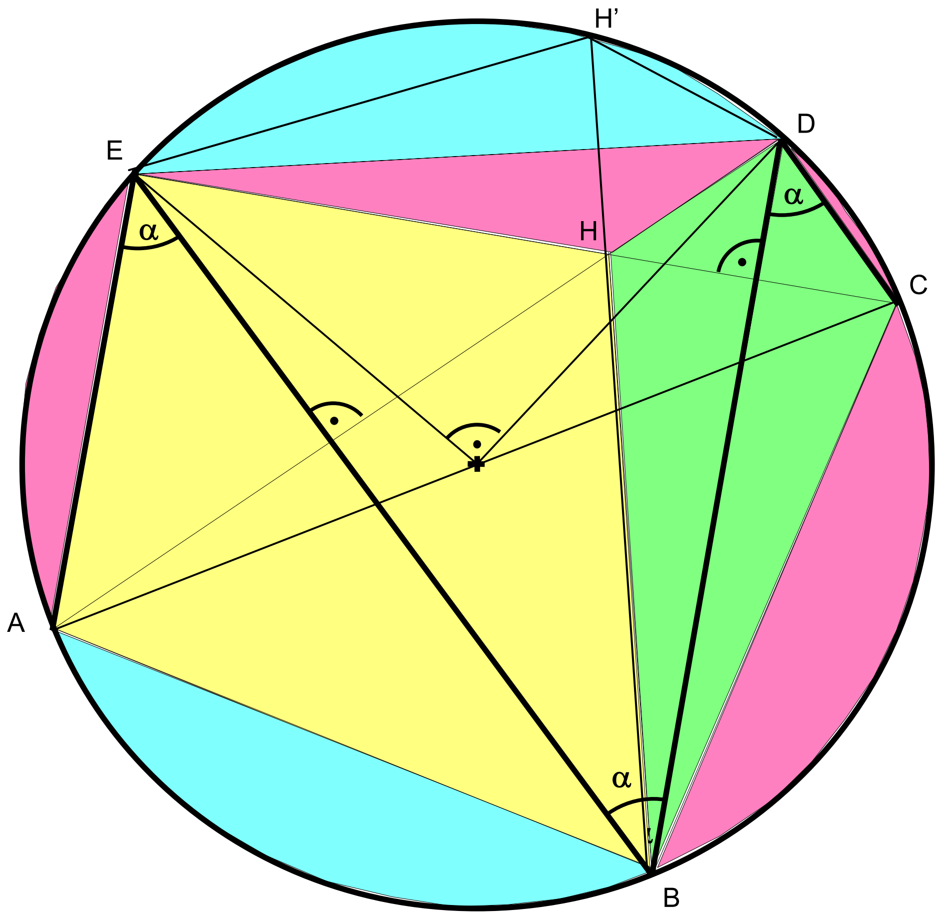
Damit ergeben sich die Flächeninhalte der Dreiecke *ABE* und *BCD* zu
$A(ABE) = \frac{1}{2}x(x+y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy$ und $A(BCD) = \frac{1}{2}\sqrt{2}y\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy$.
Somit ist $A(ABE) + A(BCD) = \frac{1}{2}x(x+y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = r^2$.

Die markierte Fläche besteht aus dem Halbkreis von *A* über *B* zu *C* ohne das Dreieck *ABC*, aber ergänzt um die Dreiecke *BCD* und *ABE.* Somit ist ihr Flächeninhalt

$$\frac{\pi r^2}{2} - A(ABC) + A(ABE) + A(BCD) = \frac{\pi r^2}{2} - r^2 + r^2 = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Die markierte Fläche ist halb so groß wie die Kreisfläche.

3. Lösungsmöglichkeit:



Der obigen Zeichnung kann man entnehmen, dass genau die Hälfte des Kreises in der Aufgabe dunkel markiert ist.

Begründung

Es ist α = 45°, die rechten Winkel ergeben sich wie in der 1. und 2. Lösungsmöglichkeit. In der Zeichnung ist das gesamte Kreisinnere farbig gezeichnet.
Genau die Hälfte der gelben und grünen Drachenvierecke gehört gemäß Aufgabenstellung zur markierten Fläche.
Die beiden hellblauen Kreissegmente sind Segmente von Viertelkreisen wegen der rechten Winkel, also ebenfalls gleich groß. Das obere Segment gehört nicht zur markierten Fläche, das untere Segment gehört dazu.
Die rosa markierten Restflächen, die oberhalb von AC liegen, kann man genau zu dem rosa Segment unterhalb von AC zusammensetzen. Dies lässt sich wie folgt begründen:

Der Punkt H als Schnittpunkt von EC mit AD ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks DEB. Wenn man ihn an der Dreiecksseite ED spiegelt, so liegt der Bildpunkt H' auf dem

Umkreis des Dreiecks DEB (Fasskreis). Der hellblaue Kreisabschnitt oberhalb ED ist also aus drei Flächenstücken zusammengesetzt (Dreieck DEH' und zwei Kreisabschnitten), die kongruent zu den rosa Flächenstücken oberhalb AC sind. Zugleich ist dieser hellblaue Kreisabschnitt oberhalb ED kongruent zu dem rosa Flächenstück unterhalb AC, denn es ist das Segment eines Viertelkreises. Nur das Kreissegment unterhalb von AC gehört zur markierten Fläche. Genau die Hälfte des Kreises ist also markiert.

Aufgabe 4

Welche Stammbrüche lassen sich auf genau eine Weise als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Stammbrüchen darstellen?
Bemerkung:
Ein Stammbruch ist ein Bruch mit dem Zähler 1 und einer natürlichen Zahl als Nenner.

Lösung:

Ein Stammbruch lässt sich genau dann auf genau eine Weise als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Stammbrüchen darstellen, wenn der Nenner eine ungerade Primzahl oder das Doppelte einer Primzahl ist.

1. Beweismöglichkeit:

Es muss gezeigt werden, dass für eine gegebene natürliche Zahl *n* die Gleichung $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{n}$ dann und nur dann genau eine Lösung mit unterschiedlichen natürlichen Zahlen a, b besitzt, wenn *n* eine ungerade Primzahl oder *n* das Doppelte einer Primzahl ist.

Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{2}{n}-\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{2b-n}{bn}\Leftrightarrow a=\frac{bn}{2b-n}\Leftrightarrow a=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{2b-n}.$$

1. Fall: *n* ist gerade

Wenn *n* die Form $n=2c$ hat, so erhält die letzte Gleichung die Form

$$a=c+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{2b-n}\Leftrightarrow a=c+\frac{c^2}{b-c}.$$

Wir müssen zeigen, dass diese Gleichung genau eine Lösung mit unterschiedlichen natürlichen Zahlen a, b hat, wenn *c* eine Primzahl ist, und umgekehrt entweder mehrere oder keine Lösung mit unterschiedlichen natürlichen Zahlen a, b hat, wenn *c* keine Primzahl ist.

Sei also zunächst c eine Primzahl. Um ganzzahlige Lösungen für *a* zu erhalten, muss *b* so gewählt werden, dass der Nenner *b-c* ein Teiler von c^2 ist. c^2 hat die Teiler 1, *c* und c^2.

Teiler *t* von c^2	**1**	***c***	**c^2**
Berechnung von $b = c + t$	$b = c+1$	$b = c+c=2c$	$b = c^2+c$
Berechnung von $a=c+\frac{c^2}{b-c}$	$a = c + c^2$	$a = 2c$	$a = c + 1$

In der mittleren der drei Möglichkeiten ist $a = b$. In der ersten und dritten Möglichkeit liegen unterschiedliche Werte von *a* und *b* vor. Dabei ist *a* und *b* nur vertauscht, es gibt also nur eine Lösung mit unterschiedlichen *a* und *b.*

Sei nun c keine Primzahl. Wenn $c > 1$, so besitzt c^2 mehr als drei Teiler. Zu jedem Teiler *t* von c^2 hat man eine Lösung $b = t + c$ und $a=c+\frac{c^2}{t}=c+\frac{c^2}{b-c}$.

Die natürlichen Zahlen *a* und *b* sind nur gleich, wenn $t = c$ ist. Bei mehr als drei Paaren (*a* / *b*) gibt es mindestens zwei, bei denen die beiden Werte nicht symmetrisch sind und auch nicht übereinstimmen. Wenn *c* keine Primzahl ist und c > 1, so gibt es also mehr als nur eine Lösung mit unterschiedlichen natürlichen Zahlen *a* und *b*.

Wenn schließlich $c = 1$ ist, so hat $a = c + \frac{c^2}{b-c}$ für natürliche Zahlen *a, b* nur die Lösung $a = b = 2$. Es gibt also keine Lösung mit verschiedenen natürlichen Zahlen *a*, *b*.
Somit ist die Behauptung für gerade *n* bewiesen.

2. Fall: n ist ungerade und größer als 1

In diesem Fall zeigen wir, dass $a = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{2b-n}$ genau eine Lösung mit unterschiedlichen natürlichen Zahlen *a* und *b* besitzt, wenn *n* eine Primzahl ist, und umgekehrt mehrere Lösungen mit unterschiedlichen natürlichen Zahlen besitzt, wenn *n* keine Primzahl ist.

Sei also zunächst n eine Primzahl. Um ganzzahlige Lösungen zu erhalten muss *2b-n* ein Teiler von n^2 sein. n^2 hat die Teiler 1, *n* und n^2. Wie oben lassen sich zu jedem Teiler *t* von n^2 ganzzahlige Werte *a, b* bestimmen:

Teiler *t* von n^2	**1**	***n***	n^2
Berechnung von $b = \frac{t+n}{2}$:	$b = \frac{n+1}{2}$	$b = n$	$b = \frac{n^2+n}{2}$
Berechnung von $a = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{t}$	$a = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$	$a = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n = n$	$a = \frac{n+1}{2}$

Wieder sind die erste und die dritte Lösung symmetrisch zueinander, bei der mittleren ist $a = b$. Es gibt also genau eine Lösung mit unterschiedlichen *a* und *b.*

Sei nun n keine Primzahl. Dann besitzt n^2 mehr als drei Teiler. Zu jedem Teiler *t* entsteht ein natürliches Lösungspaar *(a|b)* mit $b = \frac{t+n}{2}$ und $a = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{t}$. Es ist $a = b$ nur für $t = n$. Bei mehr als drei Paaren (*a* / *b*) gibt es also mindestens zwei, bei denen die beiden Werte nicht symmetrisch sind und auch nicht übereinstimmen. Wenn *n>1* ungerade und keine Primzahl ist, so gibt es also mehr als nur eine Lösung mit unterschiedlichen natürlichen Zahlen *a* und *b*.

2. Beweismöglichkeit:

Erster Teil

In diesem ersten Teil wird gezeigt, dass, *wenn* der Nenner des Stammbruchs eine Primzahl oder das Doppelte einer Primzahl ist, sich der Stammbruch auf genau eine Weise als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Stammbrüchen darstellen lässt.

a) Der Nenner n des Stammbruchs sei zunächst eine ungerade Primzahl p. Es wird gezeigt, dass sich eindeutig ein Paar verschiedener Stammbrüche $\frac{1}{x}$ *und* $\frac{1}{y}$ *angeben lässt, welches die Gleichung* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{p}$ *erfüllt.*

Schreibt man diese Gleichung in der Form $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{p}$ so sieht man $\frac{1}{2x}<\frac{1}{p}$, also $2x>p$, ebenso folgt $2y>p$. Setzt man nun $2x=p+q$ und $2y=p+r$, so sind *r* und *q* ungerade natürliche Zahlen. Damit lautet die Gleichung $\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+r}=\frac{1}{p}$.

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $(p+q)(p+r)p$ erhält man $(p+r)p+(p+q)p=(p+r)(p+q)$ oder $p^2=qr$.

Da *p* eine Primzahl ist, lässt sich p^2 nur auf drei Arten in ein Produkt aus zwei Faktoren *q* und *r* zerlegen:

<u>1. Fall:</u> $p^2=p\cdot p$, also $q=p$ und $r=p$. Dann $2x=p+q=2p$ und $2y=p+r=2p$ also $x=y=p$. Damit gibt es in diesem Fall keine verschiedenen Stammbrüche, die die Gleichung erfüllen.

<u>2. Fall:</u> $p^2=1\cdot p^2$, also $q=1$, $r=p^2$. Dann $2x=p+q=p+1$ und $2y=p+r=p+p^2$.

Damit erhält man das Paar $x=\frac{p+1}{2}$ und $y=\frac{p+p^2}{2}$. Der Mittelwert von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ ist wie gefordert $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+p^2}{2}}\right)=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+p^2}=\frac{p+1}{(p+1)p}=\frac{1}{p}$.

<u>3. Fall:</u> $p^2=p^2\cdot 1$. Dieser Fall führt mit vertauschtem *q* und *r* bzw. *x* und *y* zum gleichen Paar von Stammbrüchen, wie im 2. Fall.

Somit kann $\frac{1}{p}$ nur auf genau eine Weise als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Stammbrüchen dargestellt werden.

b) *Der Nenner n des Stammbruchs sei nun das Doppelte einer Primzahl p also* $n=2p$. *Es wird auch hier gezeigt, dass sich eindeutig ein Paar verschiedener Stammbrüche* $\frac{1}{x}$ *und* $\frac{1}{y}$ *angeben lässt welches die Gleichung* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2p}$ *erfüllt.*

Schreibt man diese Gleichung in der Form $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$ so sieht man $x>p$ und $y>p$.
Setzt man $x=p+q$ und $y=p+r$, so sind *r* und *q* natürliche Zahlen. Damit lautet die Gleichung $\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+r}=\frac{1}{p}$ oder $p^2=qr$.
Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $(p+q)(p+r)p$ ergibt sich
$(p+r)p+(p+q)p=(p+r)(p+q)$.
Wie bei a) schließt man weiter: Da *p* eine Primzahl ist, lässt sich p^2 nur auf drei Arten in ein Produkt aus zwei Faktoren *q* und *r* zerlegen
<u>1. Fall:</u> $p^2=p\cdot p$, also $q=p$ und $r=p$. Dann erhält man wie bei a) gleiche Stammbrüche.
<u>2. Fall:</u> $p^2=1\cdot p^2$, also $q=1$ und $r=p^2$. Dann $x=p+q=p+1$ und $y=p+r=p+p^2$.
Damit erhält man das Paar $\frac{1}{x}=\frac{1}{p+1}$ und $\frac{1}{y}=\frac{1}{p+p^2}$, welches den geforderten Mittelwert $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+p^2}\right)=\frac{p+1}{(p+1)p\cdot 2}=\frac{1}{2p}$ besitzt.
<u>3. Fall:</u> $p^2=p^2\cdot 1$. Dieser Fall führt mit vertauschtem *q* und *r* bzw. *x* und *y* zum gleichen Paar von Stammbrüchen.
Somit kann $\frac{1}{2p}$ nur auf eine Weise als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Stammbrüchen dargestellt werden. Damit ist der erste Teil bewiesen.

Zweiter Teil
Es soll nun gezeigt werden, dass es kein Paar oder aber mindestens zwei verschiedene Paare von Stammbrüchen gibt, die $\frac{1}{n}$ als Mittelwert besitzen, wenn *n* weder eine ungerade Primzahl, noch das Doppelte einer Primzahl ist.
Dies lässt sich in den drei folgenden Unterfällen vollständig behandeln:

1) $n=2$

2) *n* ist das Doppelte einer zusammengesetzten Zahl, also $n=2\cdot f\cdot g$ wobei *f* und *g* natürliche Zahlen größer als 1 sind.

3.) *n* ist das Produkt zweier natürlicher ungerader Zahlen *f* und *g größer als 1*, also $n=f\cdot g$.

<u>Zu 1)</u> $\frac{1}{2}$ kann nicht der Mittelwert von zwei Stammbrüchen sein, denn genau einer müsste größer als $\frac{1}{2}$ sein. Es gibt außer $1=\frac{1}{1}$ keinen Stammbruch, der größer als $\frac{1}{2}$ ist.
Dann müsste der Wert des anderen Stammbruchs 0 sein.

Zu 2) Für $n = 2 \cdot f \cdot g$ kann man zwei verschiedene Lösungspaare der Gleichung $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{n}$ angeben: $x_1 = f \cdot g + 1$, $y_1 = f \cdot g + (f \cdot g)^2$ und $x_2 = f \cdot g + f$, $y_2 = f \cdot g + f \cdot g^2$. Die Paare sind wirklich verschieden, da *f* und *g* jeweils ungleich 1 sind.
Dass diese Paare auch wirklich Lösungen sind, kann man direkt nachrechnen.

Zu 3) Auch für $n = f \cdot g$ kann man zwei verschiedene Lösungspaare der Gleichung angeben: $x_1 = (f \cdot g + 1) : 2$, $y_1 = \left(f \cdot g + (f \cdot g)^2\right) : 2$ und $x_2 = (f \cdot g + f) : 2$, $y_2 = \left(f \cdot g + f \cdot g^2\right) : 2$. Dabei ergeben die Divisionen durch 2 hier immer natürliche Zahlen, da *f* und *g* ungerade sind. Wieder sind die beiden Paare auch wirklich verschieden, da *f* und *g* jeweils ungleich 1 sind.
Dass diese Paare auch wirklich Lösungen sind, kann man auch hier direkt nachrechnen.

Damit ist auch der zweite Teil bewiesen und der Beweis ist vollständig.