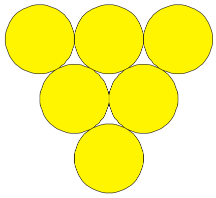
2004

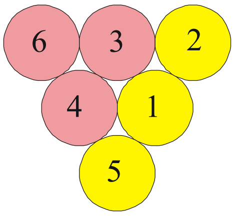
Runde 1

Aufgabe 1

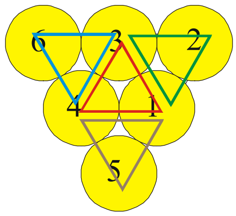


Die Billardkugeln mit den Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden wie in der Abbildung zusammengelegt.
Zunächst addiert man die Nummern von je drei sich berührenden Kugeln. Danach werden die entstandenen Summen addiert.
Zeige, dass das Ergebnis für jede Kugelverteilung in dieser Form ungerade ist.

Beispiel:



Die nebenstehende Abbildung zeigt so eine Kugelverteilung. Drei sich berührende Kugeln sind z.B. die drei Kugeln mit den Nummern 6,3,4. In der Abbildung rechts sind die sich berührenden Kugeln durch Dreiecke miteinander verbunden. Es sind die Kugeln mit den folgenden Nummern:



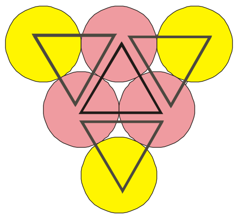
1.) 6,3,4   2.) 3,2,1   3.) 3,4,1   4.) 4,1,5

Dementsprechend gibt es die folgenden vier Summen:

1.) 6+3+4=**13**   2.) 3+2+1=**6**   3.) 3+4+1=**8**   4.) 4+1+5=**10**

Nach Aufgabenstellung muss man die vier entstandenen Summen addieren: **13**+**6**+**8**+**10** = **37**.
Das Ergebnis 37 ist in diesem Beispiel tatsächlich ungerade. Es muss allgemein begründet werden, dass dieses Ergebnis für jede Verteilung der Kugeln ungerade ist.

Vereinbarung für alle Lösungsvorschläge:

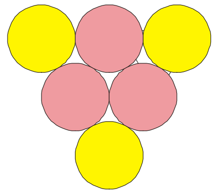


Die Summen der Kugelnummern von je drei sich berührenden Kugeln nennen wir *Teilsummen*. Die Abbildung zeigt, dass es vier Teilsummen gibt. Die jeweils an den vier Teilsummen beteiligten Kugeln sind durch Dreiecke miteinander verbunden. Man erkennt, dass die drei Eckkugeln jeweils nur in einer Teilsumme vorkommen (sie gehören zu einem Dreieck), während die drei mittleren Kugeln in drei Teilsummen vorkommen (sie gehören zu drei Dreiecken).
Wenn man die Teilsummen addiert, so ergibt sich die *Gesamtsumme*. Die Gesamtsumme ist also die Summe der Kugelnummern der drei Eckkugeln und der dreifachen Kugelnummern der drei mittleren Kugeln. Man muss zeigen, dass diese Gesamtsumme immer *ungerade* ist.

1. Lösungsvorschlag:

Die Gesamtsumme besteht aus sechs Summanden: den Kugelnummern der drei Eckkugeln und den dreifachen Kugelnummern der drei mittleren Kugeln. Das Dreifache einer Zahl ist aber ungerade, wenn die Zahl ungerade ist, und es ist gerade, wenn die Zahl gerade ist. Somit sind genau drei der sechs Summanden gerade, genau drei sind ungerade. Das ist genauso wie bei den Zahlen 1,2,3,4,5,6. Addiert man aber drei ungerade und drei gerade Zahlen, so ist die Summe immer ungerade. Somit ist die Gesamtsumme immer *ungerade*.

2. Lösungsvorschlag:

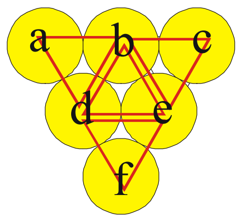


Man kann die Gesamtsumme auch umschreiben: Sie ist die Summe der drei Eckkugelnummern plus der dreifachen Summe der drei mittleren Kugeln. Es kommt nur darauf an, wie viele der Eckkugeln gerade sind und wie viele der mittleren Kugeln. Das ergibt die vier in der Tabelle dargestellten Fälle (g steht für gerade, u für ungerade):

Eckkugel-nummern	Mittlere Kugel-nummern	Summe der Eckkugelnr.	Summe d. mittleren Kugelnr.	Dreifache Summe d. mittleren Kugelnr.	**Gesamtsumme**
3 g, 0 u	**0 g, 3 u**	**g**	**u**	**u**	**g+u = ungerade**
2 g, 1 u	**1 g, 2 u**	**u**	**g**	**g**	**u+g = ungerade**
1 g, 2 u	**2 g, 1 u**	**g**	**u**	**u**	**g+u = ungerade**
0 g, 3 u	**3 g, 0 u**	**u**	**g**	**g**	**u+g = ungerade**

Die letzte Spalte zeigt, dass die Gesamtsumme immer *ungerade* ist.

3. Lösungsvorschlag:



Wir schreiben, wie in der Abbildung, a, b, c, d, e, f für die sechs Kugelnummern.
Mithilfe der eingezeichneten Dreiecke für die vier Teilsummen T_1, T_2, T_3 und T_4 von drei sich berührenden Kugeln erkennen wir, dass

$T_1 = a + b + d,\ T_2 = b + c + e,\ T_3 = d + e + f,\ T_4 = b + d + e.$

Somit ist die Gesamtsumme

$S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = a + b + d + b + c + e + d + e + f + b + d + e$

$\quad = a + c + f + 3b + 3d + 3e.$

Es ist $S = a + c + f + 3b + 3d + 3e = a + b + c + d + e + f + 2(b + d + e).$

Hierbei ist $a + b + c + d + e + f = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ungerade, während $2(b + d + e)$ eine gerade Zahl ist. Also ist die Gesamtsumme $S = 21 + 2(b + d + e)$ ungerade.

Alternative:

Wir schreiben $x = a + c + f$ für die Summe der Eckkugelnummern; damit ist $b + d + e = 21 - x$ die Summe der mittleren Kugelnummern.

Dann ist $S = a + c + f + 3b + 3d + 3e = a + c + f + 3(b + d + e) = x + 3(21 - x) = 63 - 2x$ ungerade für alle möglichen Werte von x.

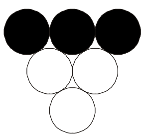
4. Lösungsvorschlag:

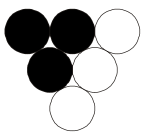
Wie im 3. Lösungsvorschlag schreibt man a, b, c, d, e, f für die sechs Kugelnummern. Mithilfe der Dreiecke für die vier Teilsummen T_1, T_2, T_3 und T_4 von drei sich berührenden Kugeln erkennt man, dass

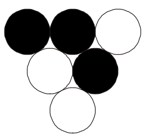
$T_1 = a + b + d,\ T_2 = b + c + e,\ T_3 = d + e + f,\ T_4 = b + d + e$

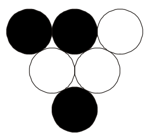
ist. Um zu zeigen, dass die Gesamtsumme ungerade ist, spielt die genaue Verteilung der einzelnen Kugelnummern -- keine Rolle, es kommt nur auf die Lage der Kugeln mit den ungeraden Nummern bzw. geraden Nummern an. Man braucht nicht alle Verteilungen von ungeraden bzw. geraden Kugelnummern im Kugeldreieck zu untersuchen, denn eine Drehung oder Achsenspiegelung des Dreiecks ändert nicht den Wert der Gesamtsumme.

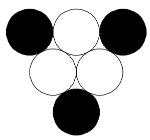
Markiert man die Kugeln mit ungeraden Kugelnummern durch schwarze Kugeln, die Kugeln mit geraden Kugelnummern durch weiße Kugeln, so erhält damit man die folgenden sechs Möglichkeiten:

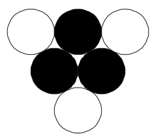

Möglichkeit 1


Möglichkeit 2


Möglichkeit 3

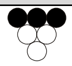
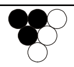
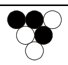
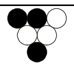
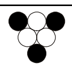
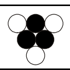

Möglichkeit 4


Möglichkeit 5


Möglichkeit 6

In Möglichkeit 1- 4 gibt es zwei schwarze Kugeln, die nebeneinander auf dem Rand des Dreiecks liegen. Durch Drehung und Spiegelung kann man erreichen, dass dies die beiden Kugeln links oben sind. Für die dritte Kugel gibt es dann die dargestellten vier Möglichkeiten. In Möglichkeit 5 sind die schwarzen Kugeln in den Ecken. Wenn nicht Möglichkeit 1- 5 vorliegt, also insbesondere nicht alle schwarze Kugeln in den Ecken sind, so muss eine der mittleren Kugeln schwarz sein. Durch eine Achsenspiegelung kann man erreichen, dass die Kugel in der Mitte oben schwarz ist. Wäre eine der beiden daneben liegenden Kugeln schwarz, so läge eine der Möglichkeiten 1- 4 vor. Somit sind die linke und rechte Kugel in der obersten Reihe weiß. Von den drei restlichen Kugeln müssen zwei schwarz sein. Da sie nicht benachbart auf dem Rand liegen dürfen (sonst läge Möglichkeit 1- 4 vor), darf es nicht die untere Eckkugel sein. Somit bleibt nur noch die Möglichkeit, dass die drei mittleren Kugeln schwarz sind (Möglichkeit 6).

In der folgenden Tabelle wird für alle sechs Möglichkeiten untersucht, ob die Gesamtsumme ungerade ist.

Mögl.-keit	**Anordnung**	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	$T_1=$ $a+b+d$	$T_2=$ $b+c+e$	$T_3=$ $d+e+f$	$T_4=$ $b+d+e$	**Gesamtsumme** $T_1+T_2+T_3+T_4$
1		**u**	**u**	**u**	**g**	**g**	**g**	**g**	**g**	**g**	**u**	**u**
2		**u**	**u**	**g**	**u**	**g**	**g**	**u**	**u**	**u**	**g**	**u**
3		**u**	**u**	**g**	**g**	**u**	**g**	**g**	**g**	**u**	**g**	**u**
4		**u**	**u**	**g**	**g**	**g**	**u**	**g**	**u**	**u**	**u**	**u**
5		**u**	**g**	**u**	**g**	**g**	**u**	**u**	**u**	**u**	**g**	**u**
6		**g**	**u**	**g**	**u**	**u**	**g**	**g**	**g**	**g**	**u**	**u**

Die rechte Spalte zeigt, dass die Gesamtsumme tatsächlich immer ungerade ist.

Aufgabe 2

Ein gleichseitiges Dreieck soll mit Trapezen lückenlos und ohne Überdeckung ausgelegt werden. Jedes Trapez hat die Seitenlängen 1cm, 1cm, 1cm, 2cm.
Welche Seitenlängen sind für das Dreieck möglich?

Lösung:

Mit n bezeichnen wir die Maßzahl der Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks (zur Maßeinheit Zentimeter).

Genau dann, wenn n ein Vielfaches von 3 ist, lässt sich das gleichseitige Dreieck mit den beschriebenen Trapezen lückenlos und ohne Überdeckung auslegen.

Beweis:

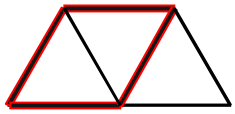
Man muss für die Lösung die folgenden beiden Teile zeigen.

1. Teil: Wenn sich das Dreieck lückenlos mit den Trapezen überdecken lässt, so muss n ein Vielfaches von 3 sein.

2. Teil: Wenn n ein Vielfaches von 3 ist, so lässt sich umgekehrt das gleichseitige Dreieck lückenlos mit Trapezen überdecken.

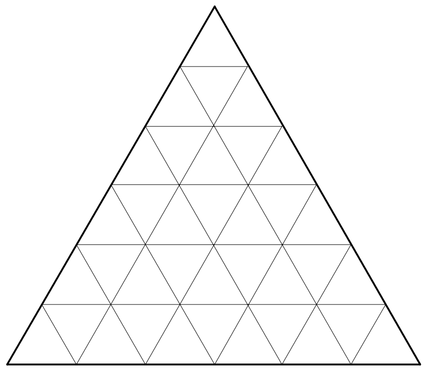
1. Beweisvorschlag für den 1. Teil:

Das Trapez mit den Maßen 1 cm, 1 cm, 1 cm und 2 cm lässt sich entsprechend der nebenstehenden Zeichnung in drei Dreiecke zerlegen. Das fett gezeichnete Viereck ist ein Parallelogramm, in dem drei Seiten 1 cm lang sind, es muss also eine Raute sein.
Somit haben alle Strecken die Länge 1 cm und die drei Dreiecke sind gleichseitig.



Da das große gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge n mit den Trapezen lückenlos und überschneidungsfrei ausgelegt werden soll, muss n eine natürliche Zahl sein.

Das große Dreieck wird nun durch Parallelen zu den Dreiecksseiten in kleine gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 1 cm zerlegt. Es entsteht das nebenstehend abgebildete Dreieck, das so aussieht, wie ein „Bierdeckelturm".



Betrachtet man die Anzahl der kleinen Dreiecke in einer Reihe, so steigt die Anzahl von Reihe zu Reihe (von oben nach unten) um jeweils zwei, da jeweils links und rechts noch ein Dreieck hinzukommt.

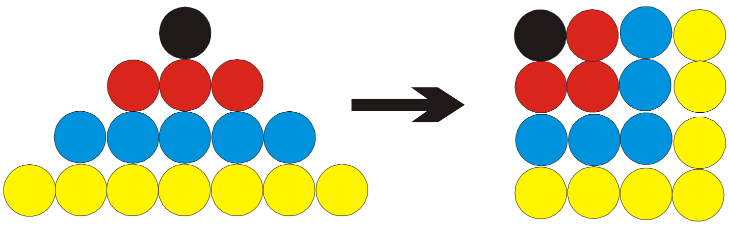
Die Gesamtzahl der kleinen Dreiecke im großen gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge n cm beträgt deshalb $1 + 3 + 5 + ... + 2n–1$.

Es ist $1 + 3 + 5 + ... + 2n–1 = n^2$. Diese Formel kann man in einer Formelsammlung nachschlagen. Sie wird der Vollständigkeit halber weiter unten begründet.

Da eine überschneidungsfreie und lückenlose Überdeckung mit den Trapezen aus drei gleichseitigen Dreiecken gefordert wird, muss die Zahl n^2 ein Vielfaches von 3 sein. Das heißt, n muss ein Vielfaches von 3 sein. Damit ist der erste Teil bewiesen.

Begründungen für die Formel $1 + 3 + 5 + ... + 2n–1 = n^2$.
Diese Formel konnte man ohne Begründung verwenden, da sie in jeder Formelsammlung enthalten ist.

Anschauliche Begründung der Formel mit Münzen:
Man legt für jedes der kleinen Dreiecke in dem oben abgebildeten dreieckigen „Bierdeckelturm" eine Münze.



Es entsteht das links abgebildete Münzdreieck (es ist hier für $n = 4$ gezeichnet). Man sieht, dass es bei n Reihen $1 + 3 + 5 + ... + 2n–1$ Münzen enthält. Wie man der Abbildung entnimmt, kann man das Münzdreieck zu einem Münzquadrat mit n Münzenreihen umlegen. Es enthält n^2 Münzen, also ist $1 + 3 + 5 + ... + 2n–1 = n^2$.

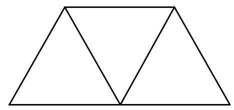
Begründung mit dem Gauß-Trick:

Um den Summenwert zu erhalten, schreibt man die Summanden in der umgekehrten Reihenfolge darunter:

1	$+$	3	$+$	5	$+$	$\dots$	$+$	$2n-3$	$+$	$2n-1$
$2n-1$	$+$	$2n-3$	$+$	$2n-5$	$+$	$\dots$	$+$	3	$+$	1
$2n$	$+$	$2n$	$+$	$2n$	$+$	$\dots$	$+$	$2n$	$+$	$2n$

In der untersten Reihe sieht man, dass das doppelte der Summe $1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1$ genau $2n+\dots+2n = n \cdot 2n = 2n^2$ ist. Somit ist $1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2$.

2. Beweisvorschlag für den ersten 1. Teil:

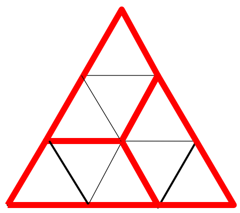


In einer Formelsammlung findet man die Formel für den Flächeninhalt A eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge n: $A = \frac{n^2}{4}\sqrt{3}$. Das Trapez mit den Maßen 1 cm, 1 cm, 1 cm und 2 cm lässt sich entsprechend dem nebenstehenden Bild in drei gleichseitige Dreiecke mit den Seitenlängen 1 cm zerlegen, es hat demnach den Flächeninhalt $3 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}$ cm².

Wird ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge *n* cm mit solchen Trapezen ausgelegt, so muss sein Flächeninhalt $\frac{n^2}{4}\sqrt{3}$ cm² ein Vielfaches des Trapezflächeninhalts $3 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}$ cm² sein.

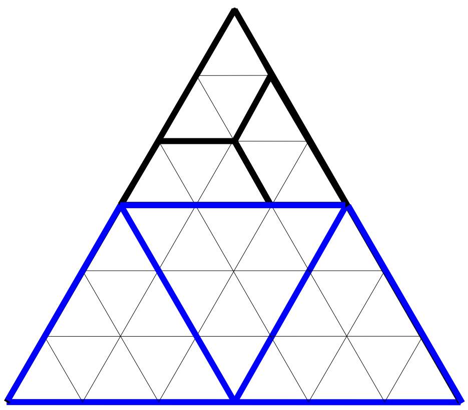
Somit ist der Quotient $\dfrac{\frac{n^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{n^2}{3}$ eine natürliche Zahl. Daher ist *n* ein Vielfaches von 3.

1. Beweisvorschlag für den 2. Teil:



Es muss nun gezeigt werden, dass tatsächlich eine Überdeckung möglich ist, wenn *n* ein Vielfaches von 3 ist.

Das gleichseitige Dreieck mit drei Reihen lässt sich wie im nebenstehenden Bild durch drei Trapeze überdecken.

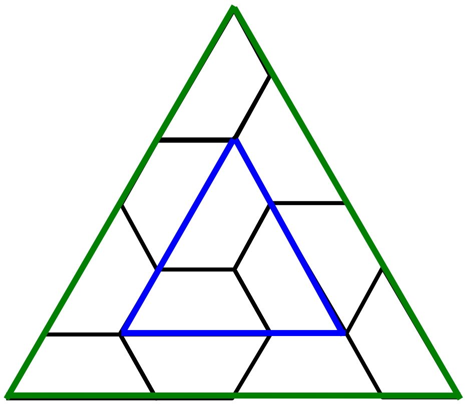


Die drei darunter liegenden Reihen eines großen gleichseitigen Dreiecks mit durch 3 teilbarer Seitenlänge lassen sich in drei gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 3 cm zerlegen (siehe die blauen Dreiecke in der Abbildung). Jedes dieser Dreiecke kann durch drei Trapeze der gegebenen Form überdeckt werden.

Die nächsten drei Reihen des großen gleichseitigen Dreiecks lassen sich in fünf gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 3 cm zerlegen. Jedes dieser Dreiecke kann wieder durch drei Trapeze überdeckt werden.

Dieses Verfahren lässt sich nun beliebig fortsetzen. Da die Kantenlänge des großen Dreieckes ein Vielfaches von 3 cm ist, geht das Verfahren auf.

2. Beweisvorschlag für den 2. Teil:



Man kann immer neue Reihen von Trapezen um ein bereits ausgelegtes Dreieck herum legen. Die Zeichnung zeigt, wie man so eine Auslegung des Dreiecks mit der Seitenlänge 6 cm (äußeres grünes Dreieck) aus dem Dreieck mit Seitenlänge 3 cm (inneres blaues Dreieck) erhält: Auch dieses Verfahren kann man beliebig oft wiederholen. Mit jeder Trapezreihe, die außen herumgelegt wird, wächst die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks um 3 cm.

Aufgabe 3

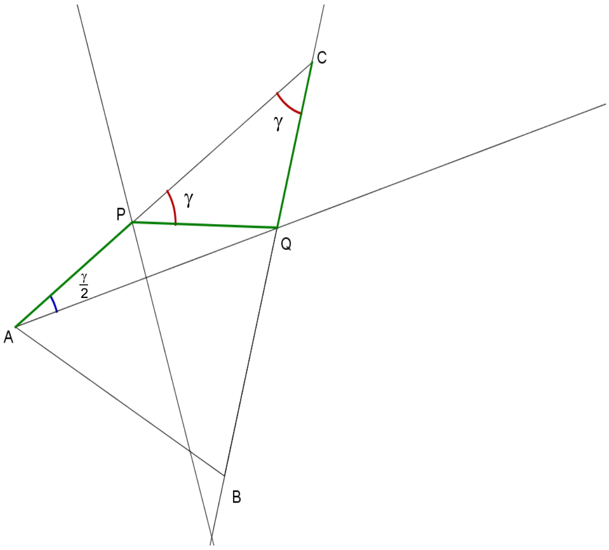
Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Konstruiere einen Punkt P im Inneren der Strecke AC und einen Punkt Q auf der Geraden (BC) so, dass gilt: $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$.

Vorbemerkungen:

Wenn man die Punkte P und Q wie in der Aufgabenstellung konstruiert *hat*, so müssen in der Figur folgende Winkelbeziehungen. gelten:

(1) Da $\overline{PQ} = \overline{QC}$, muss das Dreieck PQC gleichschenklig sein mit Spitze Q. Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist (also insbesondere $\angle ACB = \gamma < 90°$) und P auf der Strecke AC liegen soll, muss Q auf der Halbgeraden mit dem Endpunkt C durch B liegen. Es gilt also für die Basiswinkel im Dreieck PQC:
$\angle QPC = \angle PCQ = \angle ACB = \gamma$.

(2) Da $\overline{AP} = \overline{PQ}$ gelten soll, muss das Dreieck AQP gleichschenklig sein mit Spitze P; es gilt für die Basiswinkel: $\angle QAP = \angle PQA$.



(3) Da $\angle APQ$ und $\angle QPC$ unter den gegebenen Voraussetzungen Nebenwinkel sind, gilt mit (1):
$\angle APQ = 180° - \angle QPC = 180° - \gamma$. Da $\angle QAP = \angle PQA$ nach (2), folgt aus dem Winkelsummensatz für Dreiecke:

$$\angle QAP = \angle PQA = (180° - \angle APQ) : 2 = [180° - (180° - \gamma)] : 2 = \frac{\gamma}{2}.$$

1. Konstruktionsmöglichkeit:

Da mit dem Dreieck ABC insbesondere der Winkel $\gamma = \angle ACB$ gegeben ist, lässt sich auch der Winkel $\frac{\gamma}{2}$ konstruieren. Trägt man $\frac{\gamma}{2}$ am Scheitelpunkt A so an, dass der 2. Schenkel auf der Strecke AC liegt, so ergibt der Schnittpunkt des 1. Schenkels mit der Gerade *(BC)* den Punkt Q. Trägt man nun anschließend den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ am Scheitelpunkt Q so an, dass der 1. Schenkel auf der Strecke QA liegt, so schneidet der 2. Schenkel die Gerade *(AC)* in P.

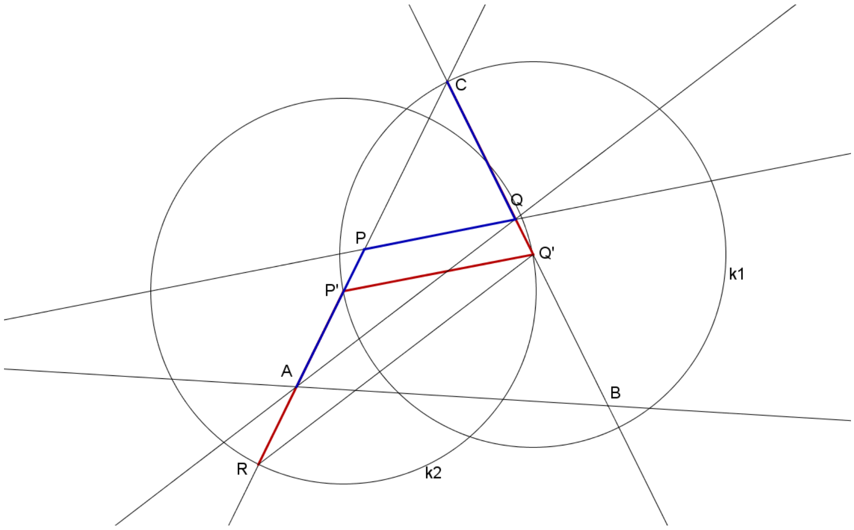
Variante der Konstruktion: Man kann den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ an den Schenkel AC konstruieren, wenn man die Winkelhalbierende von γ an der Mittelsenkrechten von AC spiegelt. Genauso kann man den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ an den Schenkel AQ konstruieren, wenn man AC an der Mittelsenkrechten von AQ spiegelt (siehe obige Zeichnung).

Diese Konstruktion liefert die Punkte P und Q mit den in der Aufgabe verlangten Eigenschaften:

- *P ist im Innern der Strecke AC*: Im Dreieck AQC gilt $\angle CQA = 180° - \frac{3}{2}\gamma > 2\gamma - \frac{3}{2}\gamma = \frac{\gamma}{2}$, da $\gamma < 90°$. Da $\angle CQA > \frac{\gamma}{2}$ ist, liegt nach Konstruktion der Punkt P im Innern der Strecke AC.
- *Q liegt auf der Geraden (BC):* Dies folgt direkt aus der Konstruktion.
- $\overline{AP} = \overline{PQ}$: Aus $\angle QAP = \angle PQA$ folgt, dass das Dreieck AQP gleichschenklig mit Spitze P ist, also $\overline{AP} = \overline{PQ}$.
- $\overline{PQ} = \overline{QC}$: Es ist $\angle APQ = 180° - 2 \cdot \frac{\gamma}{2}$, also $\angle QPC = 180° - \angle APQ = 2 \cdot \frac{\gamma}{2} = \gamma$. Somit ist $\angle PCQ = \gamma = \angle QPC$. Also ist auch das Dreieck PQC gleichschenklig mit Spitze Q und somit $\overline{PQ} = \overline{QC}$.

Bemerkung: Aus der Konstruktion folgt, dass Q auf der Strecke BC liegt, wenn $\alpha \geq \frac{\gamma}{2}$ ist.

2. Konstruktionsmöglichkeit:



Man wählt einen beliebigen Punkt *Q'* auf der Strecke *CB*. Man zeichnet einen Kreis k_1 um *Q'* mit dem Radius $\overline{Q'C}$. *P'* und *C* sind die Schnittpunkte von k_1 mit der Geraden *AC*. Da das Dreieck *ABC* spitzwinklig ist, also insbesondere $\gamma < 90°$ ist, liegt *P'* auf der Halbgeraden mit Endpunkt *C* durch *A*. Außerdem ist $P' \neq C$. Das Dreieck *P'Q'C* ist gleichschenklig mit der Basis *P'C*.

Dann zeichnet man einen Kreis k_2 um *P'* mit dem gleichen Radius $\overline{Q'C}$. k_2 schneidet die Halbgerade mit Anfangspunkt *P'* durch *A* im den Punkt *R*. Das Dreieck *P'RQ'* ist gleichschenklig mit der Basis *RQ'*.

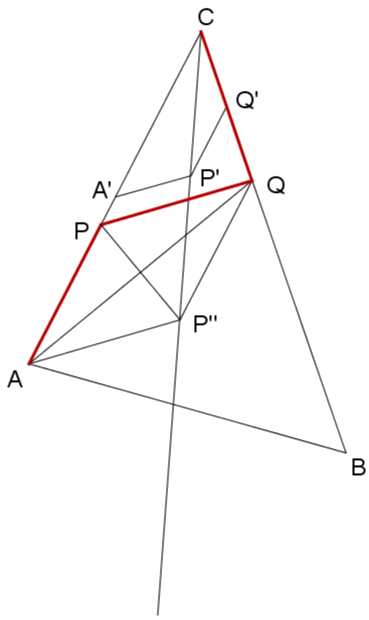
Damit gilt insgesamt: $\overline{CQ'} = \overline{Q'P'} = \overline{P'R}$.

Anschließend konstruiert man die Parallele zu *RQ'* durch *A*. Sie schneidet *(BC)* im Punkt *Q*. Die Parallele zu *P'Q'* durch *Q* schneidet *(AC)* im Punkt *P*.

Diese Konstruktion liefert die Punkte P und Q mit den in der Aufgabe verlangten Eigenschaften:

Das Verfahren beschreibt die Konstruktion einer zentrischen Streckung mit Zentrum *C*, durch die *R* auf *A*, *Q'* auf *Q* und *P'* auf *P* abgebildet werden. Da *P'* im Innern der Strecke *RC* liegt, liegt *P* im Innern der Strecke *AC*.
Außerdem sind die Streckenzüge *CQ'P'R* und *CQPA* ähnlich, also folgt aus $\overline{CQ'} = \overline{Q'P'} = \overline{P'R}$, dass $\overline{CQ} = \overline{QP} = \overline{PA}$ ist.

3. Konstruktionsmöglichkeit:



Zunächst konstruiert man das Trapez *A'P'Q'C* mit folgenden Eigenschaften:

A' liegt auf *AC*, *Q'* liegt auf *BC* und $\overline{CQ'} = \overline{Q'P'} = \overline{P'A'}$. Dabei soll *AP'Q'C* keine Raute sein.
Zur Konstruktion von *A'P'Q'C* wählt man *Q'* auf *BC* beliebig und trägt auf der Parallelen zu *AC* durch *Q'* die Strecke $a = \overline{CQ'}$ ab. Der Endpunkt dieser Strecke sei *P'*. Man zeichnet dann einen Kreis vom Radius *a* um *P'* und erhält die Schnittpunkte *A'* und *A''* dieses Kreises mit *(AC)*. Da $\gamma < 90°$ liegt der Schnittpunkt *A'*, der *AQ'P'* nicht zu einer Raute ergänzt, auf der Halbgeraden mit Endpunkt *C* durch *A*. Wenn *A'* nicht im Innern von *AC* liegt, so muss man *CQ'* verkleinern. Die zentrische Streckung mit dem Zentrum *C*, die den Punkt *A'* auf *A* abbildet, bildet das Trapez *A'P'Q'C* auf das Trapez *AP''QC* ab. Es ist $\overline{CQ} = \overline{QP''} = \overline{P''A}$, da die Verhältnisse der Seitenlängen bei einer zentrischen Streckung erhalten bleiben. Schließlich spiegelt man *P''* an *(AQ)* und erhält als Bildpunkt den gesuchten Punkt *P*.

Diese Konstruktion liefert die Punkte P und Q mit den in der Aufgabe verlangten Eigenschaften:

- *P liegt im Innern der Strecke AC*: Es ist $\angle P''AQ = \angle AQP''$, da diese beiden Winkel Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck *AP''Q* sind. Außerdem ist $\angle AQP'' = \angle QAC$, da sie Wechselwinkel an parallelen Geraden sind. Somit ist $\angle P''AQ = \angle QAC$. Also ist *(AQ)* die Winkelhalbierende von $\angle P''AC$ und *P* liegt auf *(AC)*.

  P liegt im Innern der Strecke *AC*, da $\angle CQA = 180° - \frac{3}{2}\gamma > 2\gamma - \frac{3}{2}\gamma = \frac{\gamma}{2} = \angle PQA$.

- $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$: Da beim Spiegeln Seitenlängen erhalten bleiben gilt $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$.

Aufgabe 4

Von einer n-stelligen Zahl wird die Einerziffer weggelassen. Von der entstandenen Zahl wird wiederum die Einerziffer weggelassen. Das Verfahren wird fortgeführt, bis eine einstellige Zahl erreicht ist. Dabei entstehen n-1 neue Zahlen. Das Neunfache ihrer Summe wird von der ursprünglichen Zahl subtrahiert.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem entstehenden Differenzwert und der ursprünglichen Zahl?

Lösung:

Der Differenzwert ist die Quersumme der ursprünglichen Zahl.

Beispiel:

Die n-stellige Zahl ist 14598, also $n = 5$. Das in der Aufgabe beschriebene Verfahren liefert die 4 neuen Zahlen 1459, 145, 14, 1. Man berechnet jetzt $9 \cdot (1459 + 145 + 14 + 1) = 9 \cdot 1619 = 14571$.

Die Differenz ist 14598 – 14571 = 27. Auch die Quersumme 1+4+5+9+8 von 14598 ist 27. Ein Beispiel ist jedoch kein Beweis. Man muss allgemein zeigen, dass der Differenzwert die Quersumme ist.

Beweis für eine beliebige 5-stellige Zahl:

Wir führen den Beweis zunächst für eine beliebige 5-stellige Zahl z. Es ist in der Dezimaldarstellung

$z=10000a+1000b+100c+10d+e$,

wobei a, b, c, d und e natürliche Zahlen zwischen 0 und 9 sind. Die Quersumme von z ist $a+b+c+d+e$. Wenn man die Einerziffer von z weglässt, muss man e subtrahieren und durch 10 dividieren. Die 4 neuen Zahlen sind also

$1000a+100b+10c+d,\ 100a+10b+c,\ 10a+b,\ a$.

Ihre Summe ist

$1000a+100b+10c+d + 100a+10b+c + 10a+b + a = 1111a + 111b + 11c + d$.

Die neunfache Summe ist $9999a + 999b + 99c + 9d$. Der Differenzwert mit der ursprünglichen Zahl ist

$z - (9999a + 999b + 99c + 9d) = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e - 9999a - 999b - 99c - 9d = a + b + c + d + e$.

$a+b+c+d+e$ ist die Quersumme von z.

Nach diesem Verfahren kann man den Beweis für jede beliebige Stellenzahl führen.

1. Beweismöglichkeit für eine beliebige n-stellige Zahl:

In der Dezimaldarstellung ist $z = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + ... + 100a_2 + 10a_1 + a_0$.

wobei jedes a_i für eine natürliche Zahl zwischen 0 und 9 steht. Die Quersumme von z ist $a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1 + a_0$.

Die $n - 1$ neuen Zahlen sind

$10^{n-2} a_{n-1} + 10^{n-3} a_{n-2} + ... + 100a_3 + 10a_2 + a_1,\ 10^{n-3} a_{n-1} + 10^{n-4} a_{n-2} + ... + 10a_3 + a_2,$

$10^{n-4} a_{n-1} + 10^{n-5} a_{n-2} + ... + a_3, ..., 10a_{n-1} + a_{n-2},\ a_{n-1}$

Ihre Summe ist $(10^{n-2} + 10^{n-3} + ... + 10 + 1)a_{n-1} + (10^{n-3} + ... + 10 + 1)a_{n-2} + ... + 111a_3 + 11a_2 + a_1$.

Die neunfache Summe ist $(9 \cdot 10^{n-2} + 9 \cdot 10^{n-3} + ... + 9 \cdot 10 + 9)a_{n-1} + (9 \cdot 10^{n-3} + ... + 9 \cdot 10 + 9)a_{n-2} + ... + 999a_3 + 99a_2 + 9a_1$.

Darin sind die Klammern

$9 \cdot 10^{n-2} + 9 \cdot 10^{n-3} + ... + 9 \cdot 10 + 9 = 10^{n-1} - 1,\ 9 \cdot 10^{n-3} + ... + 9 \cdot 10 + 9 = 10^{n-2} - 1,\ 10^{n-3} - 1, ...,\ 10^2 - 1 = 99,\ 10^1 - 1 = 9$.

Somit ist der Differenzwert mit der ursprünglichen Zahl

$$10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + ... + 100a_2 + 10a_1 + a_0 - (10^{n-1} - 1)a_{n-1} - (10^{n-2} - 1)a_{n-2} - ... - 99a_2 - 9a_1$$
$$= a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1 + a_0$$

$a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ ist aber genau die Quersumme von z.

2. Beweismöglichkeit für eine beliebige n-stellige Zahl:

Die Ausgangszahl ist: $z = a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + a_{n-3}\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10^1 + a_0\cdot 10^0$

Hierbei sind die a_i natürliche Zahlen zwischen 0 und 9. Die daraus entstehenden Zahlen sind:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= a_{n-1}\cdot 10^{n-2} + a_{n-2}\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3\cdot 10^2 + a_2\cdot 10^1 + a_1\cdot 10^0\\
z_2 &= a_{n-1}\cdot 10^{n-3} + a_{n-2}\cdot 10^{n-4} + \ldots + a_3\cdot 10^1 + a_2\cdot 10^0\\
&\ldots\\
z_{n-2} &= a_{n-1}\cdot 10^1 + a_{n-2}\cdot 10^0\\
z_{n-1} &= a_{n-1}\cdot 10^0
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Differenzwert Δ lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= z - (z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1})\cdot 9\\
&= z - (z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1})\cdot (10-1)\\
&= z - 10\cdot z_1 + z_1 - 10\cdot z_2 + z_2 - \ldots + \ldots - 10\cdot z_{n-2} + z_{n-2} - 10\cdot z_{n-1} + z_{n-1}\\
&= \quad a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + a_{n-3}\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_2\cdot 10^2 \quad + a_1\cdot 10^1 \quad + a_0\cdot 10^0\\
&\quad - a_{n-1}\cdot 10^{n-1} - a_{n-2}\cdot 10^{n-2} - a_{n-3}\cdot 10^{n-3} - \ldots - a_2\cdot 10^2 \quad - a_1\cdot 10^1\\
&\quad + a_{n-1}\cdot 10^{n-2} + a_{n-2}\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3\cdot 10^2 \quad + a_2\cdot 10^1 \quad + a_1\cdot 10^0\\
&\quad - a_{n-1}\cdot 10^{n-2} - a_{n-2}\cdot 10^{n-3} - \ldots - a_3\cdot 10^2 \quad - a_2\cdot 10^1\\
&\quad + a_{n-1}\cdot 10^{n-3} + \ldots \; + a_4\cdot 10^2 \quad + a_3\cdot 10^1 \quad + a_2\cdot 10^0\\
&\quad - \ldots\\
&\quad + \ldots\\
&\quad - a_{n-1}\cdot 10^2 - a_{n-2}\cdot 10^1\\
&\quad + a_{n-1}\cdot 10^1 - a_{n-2}\cdot 10^0\\
&\quad - a_{n-1}\cdot 10^1\\
&\quad + a_{n-1}\cdot 10^0\\
&= a_0\cdot 10^0 + a_1\cdot 10^0 + a_2\cdot 10^0 + \ldots + a_{n-2}\cdot 10^0 + a_{n-1}\cdot 10^0\\
&= a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0
\end{aligned}
$$

3. Beweismöglichkeit für eine beliebige n-stellige Zahl:

Die Bezeichnungen z, z_i, a_i sind so wie in der 2. Beweismöglichkeit. Subtrahiert man von z zuerst $9\cdot z_1$, vom Ergebnis dann $9\cdot z_2$ usw. bis $9\cdot z_{n-1}$, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
z - 9\cdot z_1 &= z - 10\cdot z_1 + z_1\\
&= a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10^1 + a_0 - a_{n-1}\cdot 10^{n-1} - \ldots - a_1\cdot 10^1 + z_1\\
&= a_0 + z_1\,.\\
a_0 + z_1 - 9\cdot z_2 &= a_0 + z_1 - 10\cdot z_2 + z_2\\
&= a_0 + a_{n-1}\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2\cdot 10^1 + a_1 - a_{n-1}\cdot 10^{n-2} - \ldots - a_2\cdot 10^1 + z_2\\
&= a_0 + a_1 + z_2\,.\\
&\ldots\\
a_0 + \ldots + a_{n-3} + z_{n-2} - 9\cdot z_{n-1} &= a_0 + \ldots + a_{n-3} + z_{n-2} - 10\cdot z_{n-1} + z_{n-1}\\
&= a_0 + \ldots + a_{n-3} + a_{n-1}\cdot 10^1 + a_{n-2} - a_{n-1}\cdot 10^1 + a_{n-1}\\
&= a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1}\,.
\end{aligned}
$$

Der Differenzwert ist also die Quersumme der ursprünglichen Zahl.

Aufgabe 5

Lässt sich jede positive ganze Zahl in der Form $(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)$ darstellen, wobei a, b, c und d ebenfalls positive ganze Zahlen sind?

Lösung:

Ja, jede Zahl lässt sich so darstellen. Man beachte dabei, dass 0 keine positive ganze Zahl ist.

Vereinbarung für alle Beweismöglichkeiten:

Zunächst schreibt man den Term um:

$$\left(a^2+b^2\right)-\left(c^2+d^2\right)=\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right).$$

Sei x eine beliebige positive ganze Zahl. Man muss positive ganze Zahlen a, b, c und d finden, so dass

$$x=\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right).$$

1. Beweismöglichkeit:

1. Fall: $x = 1$. Setze $a = 5$, $b = 1$, $c = 4$ und $d = 3$. Dann ist

$$\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)=5^2-4^2+1^2-3^2=1.$$

2. Fall: $x = 2$. Setze $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$ und $d = 2$. Dann ist

$$\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)=3^2-2^2+1^2-2^2=2.$$

3. Fall: $x = 4$. Setze $a = 4$, $b = 1$, $c = 3$ und $d = 2$. Dann ist

$$\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)=4^2-3^2+1^2-2^2=4.$$

4. Fall: x ist durch **4 teilbar** und $x > 4$.

Dann existiert eine positive ganze Zahl $k > 1$, so dass $x = 4k$. Setze $a = k + 1$, $c = k - 1$, $b = 1$ und $d = 1$. Dann ist

$$\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)=(k+1)^2-(k-1)^2+\left(1^2-1^2\right)=\left(k^2+2k+1\right)-\left(k^2-2k+1\right)=4k=x.$$

5. Fall: x ist **ungerade** und $x > 1$.

Dann existiert eine positive ganze Zahl k, so dass $x = 2k + 1$. Setze $a = k + 1$, $c = k$, $b = 1$ und $d = 1$. Dann ist

$$\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)=(k+1)^2-k^2+\left(1^2-1^2\right)=\left(k^2+2k+1\right)-k^2=2k+1=x.$$

6. Fall: x ist **durch 2, aber nicht durch 4 teilbar** und $x > 2$.

Dann existiert eine ungerade Zahl $m > 1$, so dass $x = 2m$. Somit ist $m = 2k + 1$, für eine positive ganze Zahl k. Ähnlich wie im 5. Fall setzen wir $a = b = k + 1$, $c = d = k$. Dann ist

$$\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)=(k+1)^2-k^2+(k+1)^2-k^2=2(2k+1)=2m=x.$$

In allen Fällen sind a, b, c und d so gewählt, dass es positive ganze Zahlen sind.

2. Beweismöglichkeit:

Eine **ungerade** Zahl $x=2k+1$ lässt sich wegen $x=(k+1)^2-k^2=a^2-c^2$ immer als Differenz von zwei Quadratzahlen schreiben. Wenn $x > 1$, so sind a und c auch positiv. Setzt man $b = d = 1$, so ist $x=\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)$.
Eine **gerade** Zahl $x > 4$ lässt sich als Summe von zwei ungeraden Zahlen $y, z > 1$ darstellen. Da die ungeraden Zahlen y und z, wie gerade bewiesen wurde, Differenzen von zwei positiven Quadratzahlen sind, gibt es für y und z Darstellungen $y=a^2-c^2$ und $z=b^2-d^2$ mit a, b, c und $d > 0$. Dann ist $\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)=y+z=x$.
Wenn schließlich x eine der Zahlen 1, 2 oder 4 ist, so findet man a, b, c und d wie in der 1. Beweismöglichkeit.

3. Beweismöglichkeit:

1. Fall: x ist **gerade**

Dann existiert eine positive ganze Zahl k, so dass $x = 2k$. Setze $a = k + 2$, $c = k + 1$, $b = 1$ und $d = 2$. Dann ist

$$\left(a^2 - c^2\right) + \left(b^2 - d^2\right) = (k+2)^2 - (k+1)^2 + 1^2 - 2^2 = k^2 + 4k + 4 - k^2 - 2k - 1 + 1 - 4 = 2k = x\,.$$

2. Fall: x ist **ungerade**

Dann existiert eine positive ganze Zahl k, so dass $x = 2k - 1$. Setze $a = k + 4$, $c = k + 3$, $b = 1$ und $d = 3$. Dann ist

$$\left(a^2 - c^2\right) + \left(b^2 - d^2\right) = (k+4)^2 - (k+3)^2 + 1^2 - 3^2 = k^2 + 8k + 16 - k^2 - 6k - 9 + 1 - 9 = 2k - 1 = x\,.$$

Aufgabe 6

In einem Dreieck ABC schneidet der Thaleskreis über der Strecke AB die Gerade (AC) in A und Q und die Gerade (BC) in B und P.

Welche Bedingung müssen die Innenwinkel des Dreiecks ABC erfüllen, damit sein Flächeninhalt viermal so groß ist wie der Inhalt des Dreiecks QPC?

Lösung:

Der Innenwinkel $\gamma = \angle ACB$ des Dreiecks *ABC* muss 60° oder 120° betragen.

Beweis:

1. Schritt: Das Dreieck *QPC*, das wie in der Aufgabenstellung konstruiert wird, ist immer ähnlich zum Dreieck *ABC*. Dies wird gezeigt, indem bewiesen wird, dass das Dreieck *QPC* dieselben Innenwinkel α,β,γ hat, wie das Dreieck *ABC*.

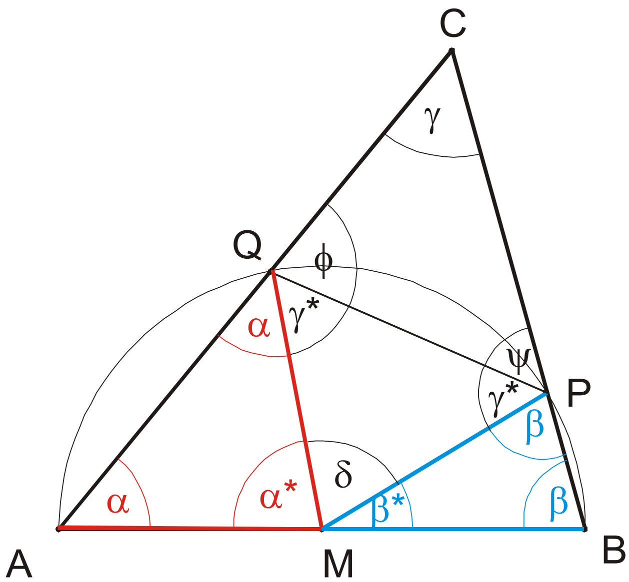
2. Schritt: Aus der Ähnlichkeit von *QPC* mit *ABC* und aus dem in der Aufgabe genannten Flächenverhältnis wird gefolgert, dass $\gamma = 60°$ oder $\gamma = 120°$ sein muss.

3. Schritt: Es wird umgekehrt gezeigt, dass das Dreieck keine weiteren Bedingungen an die Innenwinkel erfüllen muss, da in Dreiecken mit $\gamma = 60°$ oder $\gamma = 120°$ das Flächenverhältnis zwischen dem Dreieck *ABC* und dem Dreieck *QPC* immer vier ist.

1. Schritt:

1. Beweismöglichkeit für den 1. Schritt:

Da $\overline{MA} = \overline{MQ} = \overline{MP} = \overline{MB}$, sind die Dreiecke *AMQ*, *MPQ* und *MBP* gleichschenklig mit Spitze *M*.



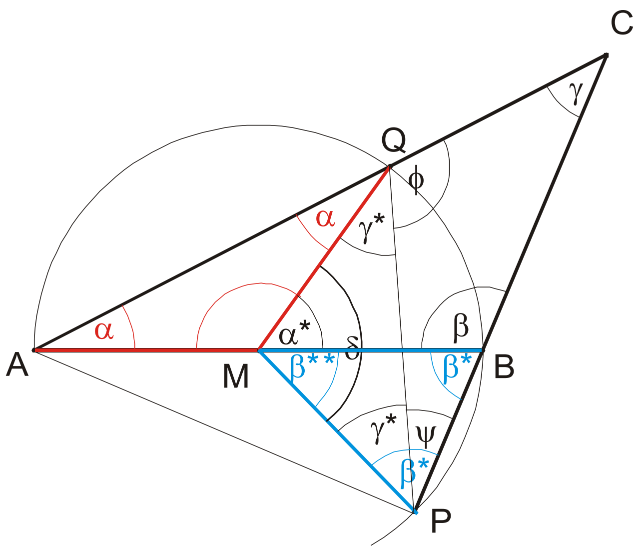
1. Fall: Alle drei Winkel im Dreieck ABC sind spitz.

Es ist $\alpha^* = 180° - 2\alpha$ im gleichschenkligen Dreieck *AMQ* und $\beta^* = 180° - 2\beta$ im gleichschenkligen Dreieck *BPM*.
Somit $\delta = 180^0 - \alpha^* - \beta^* = 2\alpha + 2\beta - 180°$.
Es ergibt sich $\gamma^* = (180° - \delta)/2 = 180° - \alpha - \beta = \gamma$.

Also ist $\phi = 180° - (\alpha + \gamma) = \beta$ und
$\psi = 180° - (\beta + \gamma) = \alpha$.

2. Fall: $\beta > 90°$

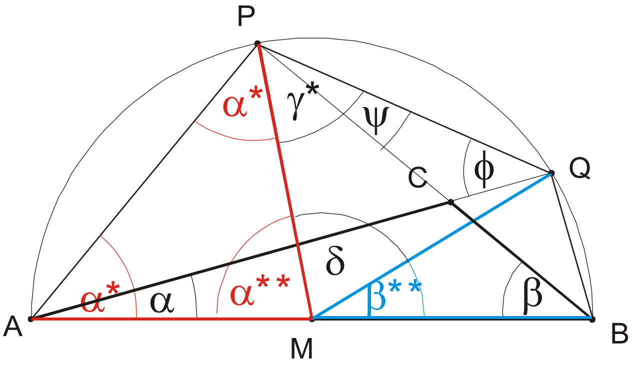
Es ist $\beta^* = 180° - \beta$, somit
$\beta^{**} = 180° - 2\beta^* = 2\beta - 180°$, da das Dreieck *PBM* gleichschenklig ist.
Außerdem $\alpha^* = 180° - 2\alpha$, da *AMQ* gleichschenklig ist.
Somit $\delta = 2\alpha + 2\beta - 180°$.
Es ergibt sich $\gamma^* = (180° - \delta)/2 = 180° - \alpha - \beta = \gamma$.
Also ist $\phi = 180° - \alpha - \gamma = \beta$ und
$\psi = \beta^* - \gamma = 180° - \beta - \gamma = \alpha$.



3. Fall: $\alpha > 90°$

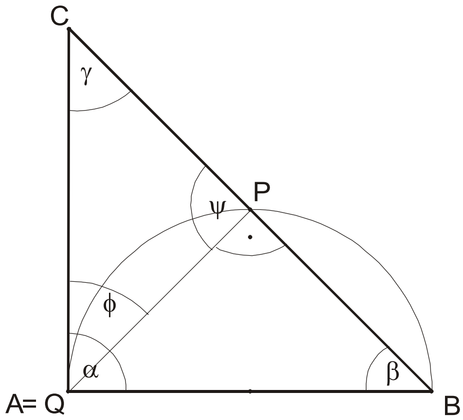
Dieser Fall lässt sich analog zum 2. Fall behandeln.

4. Fall: $\gamma > 90^o$



Da $\angle APB = 90°$ (Satz des Thales), ergibt sich aus der Winkelsumme im Dreieck ABP $\alpha^* = 90^o - \beta$.
Somit ist im gleichschenkligen Dreieck *AMP*
$\alpha^{**} = 180° - 2\alpha^* = 180^o - 2(90^o - \beta) = 2\beta$.
Analog ergibt sich $\beta^{**} = 2\alpha$.
Somit $\delta = 180° - \alpha^{**} - \beta^{**} = 180^o - (2\alpha+2\beta) = 2\gamma - 180°$. Im gleichschenkligen Dreieck MQP ist dann
$\gamma^* = (180^o - \delta)/2 = \alpha + \beta = 180° - \gamma$.
Also $\psi = \alpha^*+\gamma^* - 90° = (90^o - \beta) + (\alpha + \beta) - 90^o = \alpha$.
Analog ist $\phi = \beta$.

5. Fall: $\alpha = 90^o$, also $Q = A$.



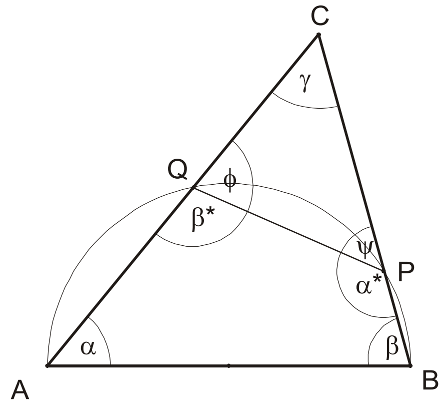
Da P auf dem Thaleskreis über der Strecke AB liegt, steht $QP = AP$ in diesem Fall senkrecht auf BC.
Also $\psi = 90° = \alpha$. Aus der Winkelsumme im Dreieck QPC folgt $\phi = \beta$.

6. Fall: $\beta = 90^o$, also $P = B$

Dieser Fall lässt sich analog zum 5. Fall behandeln.

7. Fall: $\gamma = 90^o$

Hier liegt C auf dem Thaleskreis über AB, also ist $Q = P = C$. Das Dreieck QPC ist entartet, sein Flächeninhalt ist 0. In diesem Fall ergibt sich keine Lösung der Aufgabe.



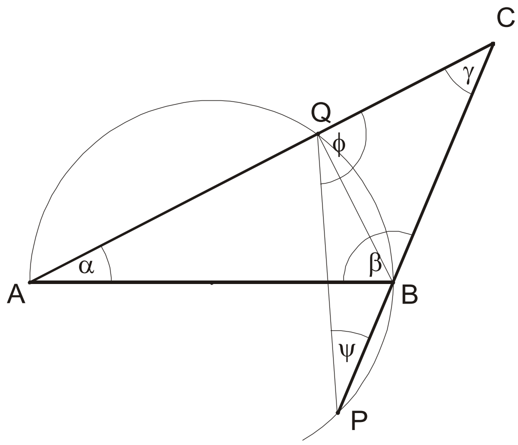
Zusammenfassung: In den Fällen 1 bis 6 stimmen die Dreiecke QPC und ABC stets in allen drei Winkeln überein, sie sind also ähnlich.

2. Beweismöglichkeit für den 1. Schritt
(mit Umfangswinkelsatz und Sehnenvierecken):

Die Fallunterscheidung ist dieselbe, wie in der 1. Beweismöglichkeit.

Im 1. Fall hat das Viereck $ABPQ$ einen Umkreis, ist also ein Sehnenviereck. Im Sehnenviereck ergeben gegenüberliegende Winkel zusammen 180°, also $\alpha+\alpha^* = 180°$ und $\beta+\beta^* = 180°$.

Somit $\psi = 180° - \alpha^* = \alpha$. Analog $\phi = \beta$.



Im 2. Fall und im 4. Fall sind α und ψ beide Umfangswinkel zu derselben Sehne QB des Kreises. Somit $\alpha = \psi$.

Also ist im Dreieck PCQ $\phi = 180° - \gamma - \psi = 180° - \gamma - \alpha = \beta$.

Im 3. Fall verläuft der Beweis wieder analog zum 2. Fall.

Im 5.-7. Fall bleibt der Beweis gleich wie bei der 1. Beweismöglichkeit.

Zusammenfassung: In den Fällen 1 bis 6 stimmen die Dreiecke QPC und ABC stets in allen drei Winkeln überein, sie sind also ähnlich.

3. Beweismöglichkeit für den 1. Schritt (mit Sekantensatz und Sehnensatz):

In den Fällen 1, 2 und 3 liefert der Sekantensatz, im Fall 4 der Sehnensatz, in den Fällen 5 und 6 der Kathetensatz:
$\overline{CP} \cdot \overline{CB} = \overline{CQ} \cdot \overline{CA} \Leftrightarrow \overline{CP} : \overline{CQ} = \overline{CA} : \overline{CB}$
Mit $\angle QCP = \angle ACB$ folgt wieder die Ähnlichkeit der Dreiecke QPC und ABC.

2. Schritt:

In einem Dreieck ABC sei die Fläche des Dreiecks QPC viermal so groß wie die Fläche des Dreiecks ABC.
Wir müssen zeigen, dass dann $\gamma = 60°$ oder $\gamma = 120°$ gilt.

Jede Seite des Dreiecks ABC muss zweimal so lang sein wie die entsprechende Seite des Dreiecks QPC, insbesondere: $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{PQ}$ oder $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \overline{MP} = \overline{MQ}$. Das Dreieck MPQ muss also gleichseitig sein.

Für $\gamma < 90^0$ ist dann $\angle PMQ = \angle MQP = \angle QPM = 60^o$. Für $\gamma > 90°$ ist $\angle MPQ = 60°$.

Hieraus folgt:

- Für die Fälle 1, 2 und 3 ist $\angle MQP = \gamma = 60^o$.
- Für Fall 4 ist $\angle MPQ = \alpha + \beta = 60^o$, also $\gamma = 120^o$.
- Für Fall 5 ist $60° = \angle PMQ = 2\beta$, also $\beta = 30°$. Mit $\alpha = 90°$ folgt $\gamma = 60^o$.
- Für Fall 6 ist analog $60° = \angle PMQ = 2\alpha$, also $\alpha = 30°$. Mit $\beta = 90°$ folgt $\gamma = 60^o$.

In jedem Fall ist also $\gamma = 60°$ oder $\gamma = 120°$.

3. Schritt:

In einem Dreieck ABC sei $\gamma = 60°$ oder $\gamma = 120°$.
Wir müssen zeigen, dass dann die Fläche des Dreiecks QPC viermal so groß ist wie die Fläche des Dreiecks ABC.

Wenn $\gamma = 60°$ so ist, wie im 1. Fall gezeigt wurde, das Dreieck MPQ gleichseitig, denn $\delta = \gamma^* = 60°$.
Wenn $\gamma = 120°$ so ist, wie im 4. Fall gezeigt wurde, das Dreieck MQP gleichseitig, denn $\delta = \gamma^* = 60°$.
Somit ist in beiden Fällen $\overline{MP} = \overline{QP}$ genau halb so lang wie $\overline{AB}$. Der Streckfaktor der ähnlichen Dreiecke QPC und ABC ist 2. Somit hat das Dreieck ABC den vierfachen Flächeninhalt wie das Dreieck QPC.