2003

Runde 2

Aufgabe 1

Die Seite AB eines Dreiecks ABC wird über B hinaus bis zum Punkt D so verlängert, dass $|AD| = n \cdot |AB|$ gilt $(n \in \mathbb{N} \wedge n > 1)$. Die Gerade durch D und den Mittelpunkt M von BC schneidet AC im Punkt E.

In welchem Verhältnis teilt E die Strecke AC?

Lösung

E teilt die Strecke AC im Verhältnis $|AE| : |EC| = n : (n-1)$.

Beweis

1. Möglichkeit (über Ähnlichkeiten)

Die Mittelparallele zu AB im Dreieck ABC verläuft durch M. Für ihren Schnittpunkt N mit AC gilt:

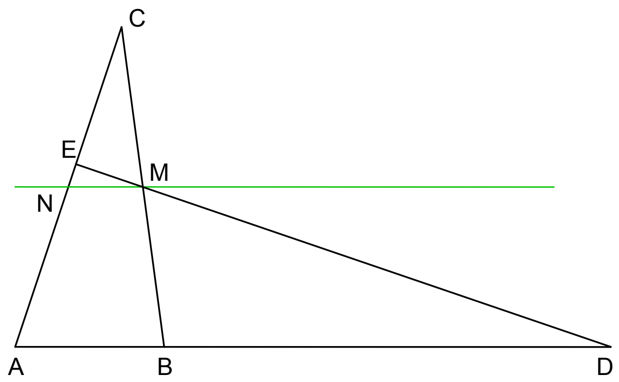
(1) N ist Mittelpunkt von AC, also $|AN| = |NC| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} b$ und

(2) $|NM| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} c$.

Dabei sind b und c die Seitenlängen des gegebenen Dreiecks ABC.

Die Dreiecke NME und ADE sind ähnlich, da sie in zwei Winkeln übereinstimmen:

$w(NEM) = w(AED)$ und
$w(MNE) = w(DAE)$ (Stufenwinkel an parallelen Geraden).



Aus der Ähnlichkeit folgt:

$$\frac{|NE|}{|AE|} = \frac{|NM|}{|AD|}, \text{ d.h. } \frac{|NE|}{\frac{1}{2}b + |NE|} = \frac{\frac{1}{2}c}{n \cdot c} = \frac{1}{2n}.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung erhalten wir

$$|NE| = \frac{1}{4n} \cdot b + \frac{1}{2n} \cdot |NE|,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \cdot |NE| = \frac{1}{4n} b, \qquad .$$

$$|NE| = \frac{1}{4n-2} b.$$

Nun wird das Verhältnis bestimmt, in dem der Punkt E die Strecke AC teilt.

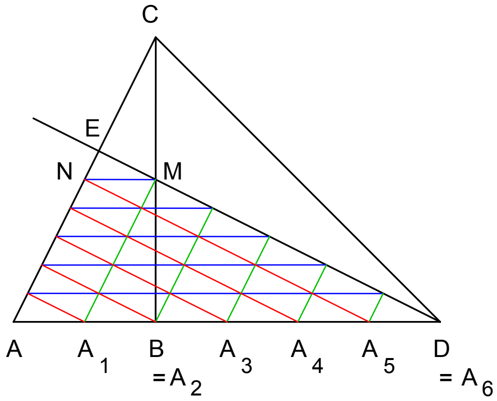
$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AN| + |NE|}{|AN| - |NE|} = \frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{4n-2}b}{\frac{1}{2}b - \frac{1}{4n-2}b} = \frac{\frac{2n-1+1}{4n-2}}{\frac{2n-1-1}{4n-2}} = \frac{2n}{2n-2} = \frac{n}{n-1}$$

Der Punkt E teilt die Stecke AC im Verhältnis n : (n – 1).

2. Möglichkeit (anschaulich mit Zerlegung)

Der Punkt M_c sei der Mittelpunkt der Dreiecksseite AB. Die Strecke AD ist dann nach Voraussetzung 2n – mal so lang wie die Strecke AM_c.

Teilt man die Strecke AD in 2n gleich lange Teile und zeichnet in jedem Teilpunkt die Parallele zu AC, so entsteht eine Streifenschar, die die Strecke DE ebenfalls in 2n gleich lange Teilstrecken zerlegt. Nun werden in jedem dieser Teilungspunkte die Parallelen zur Strecke AD gezeichnet. Diese Parallelen teilen die Strecke AE ebenfalls in 2n gleich lange Teile.



Das Bild zeigt diese Situation für n = 4.

Wegen der Eigenschaften des Mittendreiecks $M_cM_aM_b$ gehören die drei Mittelpunkte zu den Teilungspunkten.

Aus $|AM_b| = |M_bC| = \frac{1}{2}b$ und $|AM_b| = (2n-1)\cdot|M_bE|$

erhält man unmittelbar

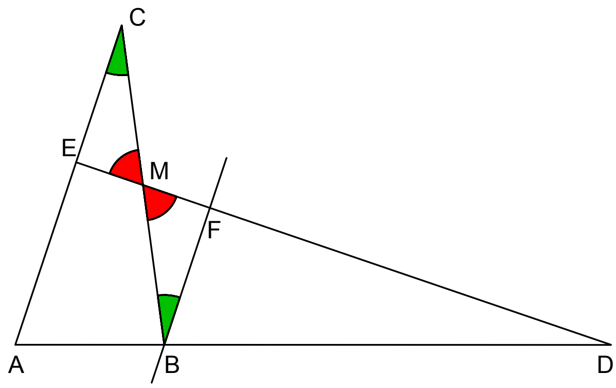
$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{2n\cdot|M_bE|}{|M_bC|-|M_bE|} = \frac{2n\cdot|M_bE|}{(2n-1)|M_bE|-|M_bE|} = \frac{2n}{2n-2} = \frac{n}{n-1}.$$

Weitere Lösungsideen ohne Durchführung der einzelnen Beweisschritte

3. Lösung

Zeichnet man die Parallele zu AC durch B, so schneidet diese Parallele die Strecke DE im Punkt F.

Die Dreiecke MBF und MCE sind nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent, da nach Voraussetzung $|MB| = |MC|$ gilt und die markierten Winkel paarweise die gleiche Weite haben. Deshalb gilt insbesondere auch $|CE| = |BF|$.

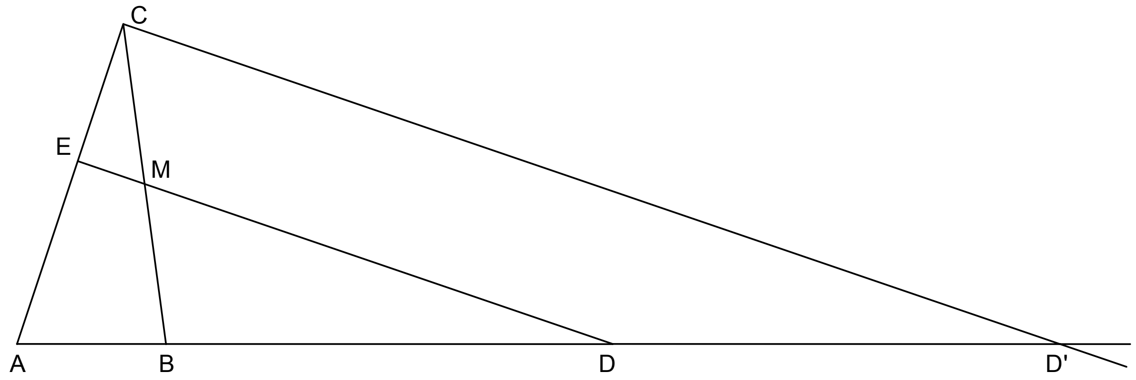


Für den weiteren Beweis verwendet man die Strahlensatzfigur mit dem Zentrum D, den Strahlen DA und DE sowie den Parallelen BF und AE und außerdem $|EC| = |BF|$.

Danach gilt $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AE|}{|BF|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{n\cdot|AB|}{(n-1)\cdot|AB|} = \frac{n}{n-1}$.

4. Lösung

Zeichnet man die Parallele zu DE durch C, so wird die Gerade durch A und B von dieser Parallelen in einem Punkt D' geschnitten.



Aus der Strahlensatzfigur mit dem Zentrum B, den Strahlen BC und BD', sowie den Parallelen MD und CD' folgt $|BD| : |DD'| = |BM| : |MC| = 1 : 1$.

Aus der Strahlensatzfigur mit dem Zentrum A folgt dann: $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|DD'|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{n \cdot |AB|}{(n-1) \cdot |AB|} = \frac{n}{n-1}$.

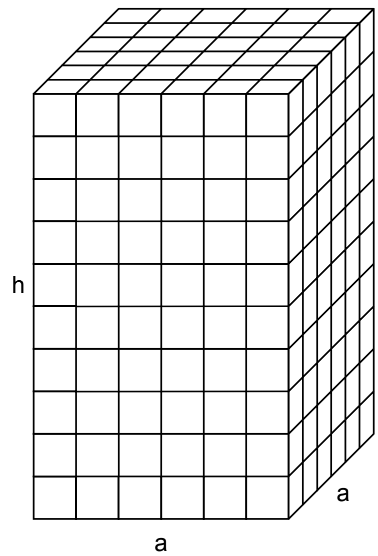
Aufgabe 2

Auf einem Platz soll aus lauter gleichen Würfeln ein Denkmal gebaut werden. Es ist ein massiver quaderförmiger Block geplant, der auf seiner quadratischen Grundfläche steht. Die Anzahl der Würfel, die der Luft ausgesetzt sind, ist halb so groß wie die Anzahl aller Würfel.

Aus wie vielen Würfeln kann das Denkmal bestehen?

Lösung

Das Denkmal kann aus $8^2 \cdot 9 = 576$ oder $7^2 \cdot 50 = 2450$ Würfeln bestehen.



Beweis:

Es sei a die Länge und Breite, h die Höhe des Blocks. Dann gibt es insgesamt $a^2 \cdot h$ Würfel. Der Luft ausgesetzt sind a^2 Würfel der obersten Schicht und zusätzlich auf jeder der vier Seiten $(a-1)(h-1)$ Würfel, also zusammen $a^2 + 4(a-1)(h-1)$ Würfel.

Gemäß Angabe soll genau die Hälfte aller Würfel der Luft ausgesetzt sein, also:

$$(*)\quad a^2 \cdot h = 2 \cdot \left(a^2 + 4(a-1)(h-1)\right).$$

Löst man (*) nun nach h auf, so erhält man: $h = \dfrac{2(a-2)^2}{a^2 - 8a + 8}$.

Da h eine natürliche Zahl sein muss und der Zähler $2(a-2)^2$ nicht negativ werden kann, muss der Nenner $a^2 - 8a + 8$

(1) eine positive, natürliche Zahl

und

(2) ein Teiler des Zählers sein.

Zunächst untersuchen wir Bedingung (1): $a^2 - 8a + 8 > 0$.

Quadratische Ergänzung ergibt: $(a-4)^2 > 8$.

Da a eine natürliche Zahl sein muss und a = 1 keine Lösung ist, folgt daraus:

$a - 4 \geq 3$, also $a \geq 7$.

Berechnen wir für die ersten zulässigen Werte von a die nach der Formel $h = \dfrac{2(a-2)^2}{a^2 - 8a + 8}$ zugeordneten Werte von h, so erhalten wir die folgende Tabelle:

a	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$h = \dfrac{2(a-2)^2}{a^2 - 8a + 8}$	50	9	$5\frac{13}{17}$	$4\frac{4}{7}$	$3\frac{39}{41}$	$3\frac{4}{7}$	$3\frac{23}{73}$	$3\frac{3}{23}$	$2\frac{112}{113}$

Aus dieser Tabelle lassen sich die zwei Lösungen, nämlich a = 7 und a = 8 ablesen.

Die Berechnung für größere Werte von a führt stets zu Werten von h, die zwischen 2 und 3 liegen. Dies wird nun allgemein nachgewiesen. Damit ist dann gezeigt, dass es keine weiteren ganzzahligen Lösungen für a und h geben kann.

Der Nenner $a^2 - 8a + 8$ des Bruchs ist für $a \geq 7$ größer als 0. Deshalb ist bei der Umformung der folgenden Bruchungleichungen keine Fallunterscheidung erforderlich. (Die Zusatzbedingung $a \geq 7$ wird nicht bei jeder Umformung genannt.)

$$\frac{2a^2 - 8a + 8}{a^2 - 8a + 8} > 2 \Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 8 > 2a^2 - 16a + 16 \Leftrightarrow 8a > 8 \Leftrightarrow a > 1$$

$$\frac{2a^2 - 8a + 8}{a^2 - 8a + 8} < 3 \Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 8 < 3a^2 - 24a + 24 \Leftrightarrow 0 < a^2 - 16a + 16 \Leftrightarrow 0 < \left(a - 8\right)^2 - 48 \Leftrightarrow \left(a - 8\right)^2 > 48$$

Die jeweils letzten Ungleichungen sind für alle a > 15 erfüllt. Es kann also für a > 15 keine weiteren ganzzahligen Lösungen für h geben.

Somit erhalten wir zwei mögliche Lösungen:

I. $a = 7$ und $h = 50$, also $7^2 \cdot 50 = 2450$ Würfel oder

II. $a = 8$ und $h = 9$, also $8^2 \cdot 9 = 576$ Würfel.

Aufgabe 3

Von einem Viereck ABCD ist bekannt, dass es sowohl einen Inkreis als auch einen Umkreis besitzt.

Wie kann man aus den drei Eckpunkten A, B und C eines solchen Vierecks das vollständige Viereck konstruieren?

Lösung

Aus der Angabe weiß man:

(1) Das Viereck ABCD hat einen Umkreis. Dieser kann sofort als Umkreis der bekannten Eckpunkte des Dreiecks ABC rekonstruiert werden. ABCD ist also Sehnenviereck, d.h. die Summe der Innenwinkelweiten gegenüberliegender Winkel beträgt jeweils 180°:

(1a) $\alpha + \gamma = 180°$ und (1b) $\beta + \delta = 180°$

(2) Ferner hat das Viereck ABCD einen Inkreis. ABCD ist also Tangentenviereck, d.h. die Summen der Längen jeweils zweier gegenüberliegender Seiten sind gleich: a + c = b + d. Umgekehrt gilt auch: Wenn für ein Viereck a + c = b + d gilt, dann ist es ein Tangentenviereck.
Die Bedingung a + c = b + d ist äquivalent zu a – b = d – c bzw. b – a = c – d. Durch die Lage der Punkte A, B und C sind auch die Seitenlängen a und b gegeben.

Daraus ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, den fehlenden Punkt D zu rekonstruieren. Bei der Durchführung werden Grundkonstruktionen wie die Konstruktion von Winkelhalbierenden, Loten, Fasskreisbögen, Tangenten von einem Punkt an einen Kreis etc. sowie die Konstruktion des Umkreises des Dreiecks ABC benötigt. Ihre Durchführung ist aus dem Unterricht bekannt und wird daher im Folgenden nicht detailliert dargestellt.

Insbesondere wird bei den folgenden Konstruktionsmöglichkeiten die Lage des Umkreises bereits als bekannt vorausgesetzt.

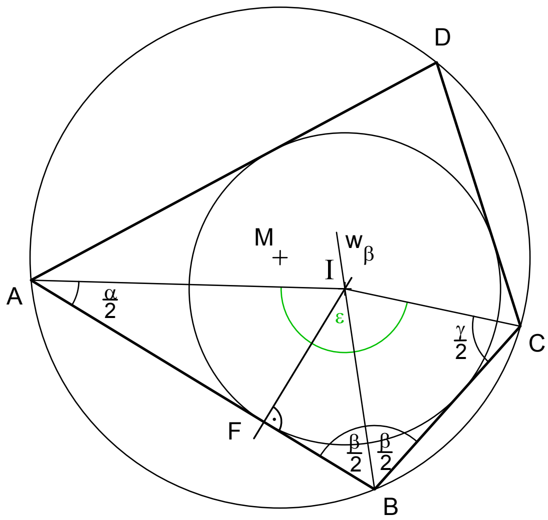
1. Möglichkeit (mit Konstruktion des Inkreises)

Rekonstruktionsidee:

Zunächst wird der Inkreismittelpunkt I des Vierecks ABCD, ein Punkt F auf der Inkreislinie und damit der Inkreis konstruiert.

Der Punkt D ist dann der Schnittpunkt des Umkreises mit der von AB verschiedenen Tangente von A an den Inkreis.

Planfigur:



Vorüberlegung:

Da der Inkreismittelpunkt I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Viereck ABCD ist, gilt mit $\varepsilon = w(AIC)$ für die Winkelsumme im Viereck

$$\text{ABCI: } \frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma + \varepsilon = 360°.$$

Mit $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$ nach (1a) folgt daraus:

$$90° + \beta + \varepsilon = 360°\text{, also } \varepsilon = 270° - \beta.$$

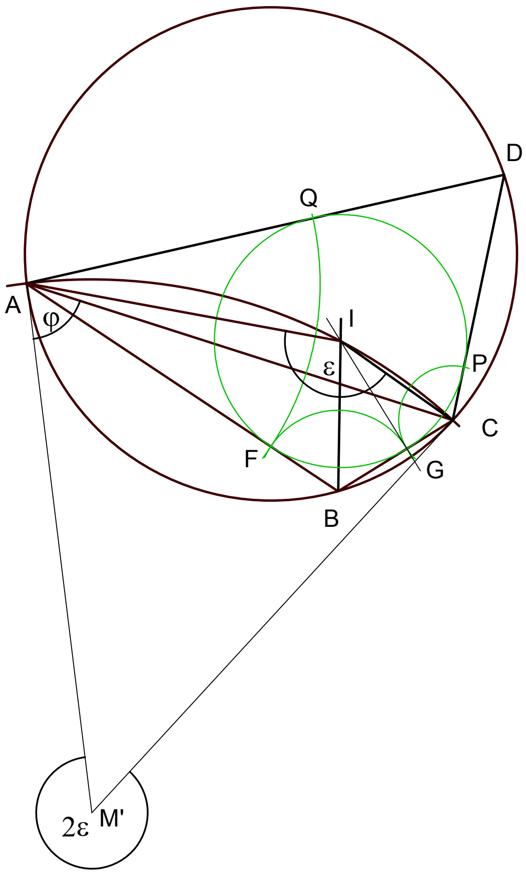
Da durch die Lage der Punkte A, B und C die Winkelweite β bekannt ist und ein 270°-Winkel konstruierbar ist, kann auch ε konstruiert werden.

Rekonstruktion:

Mit Hilfe von ε kann der Inkreismittelpunkt I konstruiert werden.

I liegt stets auf der Winkelhalbierenden des Winkels β.

Falls $\beta > 90°$ und damit $\varepsilon < 180^{\circ}$ ist, liegen I und B auf verschiedenen Seiten der Sehne AC (dieser Fall ist in der Planfigur dargestellt). Hier liegt I noch auf dem Fasskreisbogen CA über der Sehne AC zum Winkel der Weite $\varepsilon = 270^{\circ} - \beta$.



Falls $\beta < 90°$ und damit $\varepsilon > 180^{\circ}$ ist, liegen B und I auf der gleichen Seite der Sehne AC. Hier liegt I noch auf dem Fasskreisbogen AC über der Sehne AC zum Winkel der Weite

$360^{\circ} - \varepsilon = 360^{\circ} - (270^{\circ} - \beta) = 90^{\circ} + \beta$.

Falls $\beta = 90°$ und damit $\varepsilon = 180^{\circ}$ ist, ist I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von β und der Strecke AC, die in diesem Fall ein Durchmesser des Umkreises ist.

Da sowohl die Winkelhalbierende des Winkels β als auch die entsprechenden Fasskreisbögen unter Verwendung der Punkte A, B und C eindeutig konstruierbar sind, ist die Konstruktion des Inkreismittelpunktes I möglich und eindeutig.

Den Mittelpunkt M' des Fasskreises über der Sehne AC zum Winkel ε erhält man als Spitze des gleichschenkligen Dreiecks AM'C mit der Basis AC und den Basiswinkeln φ.

Dabei gilt $\varphi = \frac{1}{2} \cdot \left(180° - 360° + 2\varepsilon\right) = \varepsilon - 90° = \left(270° - \beta\right) - 90° = 180° - \beta$.

Gemäß Konstruktion von I ist $I \in AB$ ausgeschlossen. Daher kann immer das Lot von I auf AB konstruiert werden, womit sich eindeutig der Lotfußpunkt F, der Inkreisradius $\rho = |IF|$ und somit der Inkreis ergeben.

Anschließend kann eindeutig die von AB verschiedene Tangente von A an den Inkreis konstruiert werden. Ihr Schnittpunkt mit dem Umkreis des Dreiecks ABC ist der gesuchte Punkt D.

Statt der Grundkonstruktion kann die Tangente auch wie folgt eindeutig konstruiert werden.

Man zeichnet den Kreis um A mit dem Radius $|AF|$. Sein Schnittpunkt mit dem Inkreis werde mit Q bezeichnet. Da AF Tangente von A an den Inkreis ist und $|AQ| = |AF|$ gemäß Konstruktion, ist auch die Gerade AQ Tangente von A an den Inkreis. Sie schneidet den Umkreis (außer im Punkt A) noch im gesuchten Eckpunkt D.

Varianten:

a) Entsprechend lässt sich D auch mit Hilfe der Tangente von C an den Inkreis konstruieren.

b) Den Punkt D erhält man aus dem Inkreismittelpunkt auch ohne explizite Konstruktion des Inkreises: Da der Inkreismittelpunkt I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Vierecks ABCD ist, hat man mit seiner Konstruktion auch die Winkelweiten w(BAI) = $\frac{\alpha}{2}$ und w(ICB) = $\frac{\beta}{2}$. Trägt man $\frac{\alpha}{2}$ an die Halbgerade AI und $\frac{\beta}{2}$ an die Halbgerade CI auf die dem Punkt B gegenüberliegende Seite ab, so schneiden sich die freien Winkelschenkel eindeutig im gesuchten Punkt D.

Vorbemerkung zur 2. bis 4. Möglichkeit (jeweils ohne Konstruktion des Inkreises)

Hier wird als Eigenschaft (2) die Gleichheit der Summen gegenüberliegender Seitenlängen verwendet, also a + c = b + d.
Für die Konstruktionen benötigt man aber jeweils Differenzen von Seitenlängen. Daher wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit a $\geq$ b angenommen. Dann ist a – b $\geq$ 0. Ferner gilt: a – b = d – c.

Zunächst zum Sonderfall a = b:

Hier ist auch c = d, d.h. man erhält den fehlenden Punkt D als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC (gleichzeitig Winkelhalbierende von β) mit dem Umkreis des Dreiecks ABC.

Dieser Punkt existiert und ist eindeutig, also ist das Viereck ABCD eindeutig rekonstruiert.

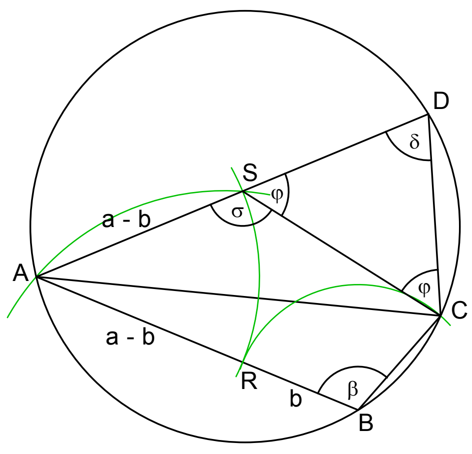
Im folgenden wird nur noch der Fall a – b > 0 betrachtet.

2. Möglichkeit:

Rekonstruktionsidee *Planfigur*

Zunächst wird mittels eines Hilfsdreiecks ein Hilfspunkt S konstruiert, so dass $|AS| = a - b$ und D auf der Halbgeraden mit Anfangspunkt A durch S liegen wird.

Vorüberlegung:



Da ABCD Tangentenviereck ist, gilt

a + c = b + d, also d = a – b + c.

Mit $|AS| = a - b$ folgt:

$$|SD| = |AD| - |AS| = d - (a - b) = a - b + c - a + b = c.$$

Das Dreieck SCD ist somit gleichschenklig mit der Spitze D.

Für seine Basiswinkel gilt:

$$\varphi = w(CSD) = w(DCS) = \frac{180° - \delta}{2}.$$

Da ABCD auch Sehnenviereck ist, folgt mit (1b): $\varphi = \frac{\beta}{2}$.

Sein Nebenwinkel $\sigma = w(ASC)$ hat damit die Weite $\sigma = 180° - \varphi = 180° - \frac{\beta}{2}$.

Wegen $\beta = 180° - \delta < 180°$ ist $\sigma = 180° - \frac{\beta}{2} > 180° - \frac{180°}{2} = 90°$; σ ist also der größte Winkel im Dreieck ACS.

Da $\sigma = 180° - \frac{\beta}{2}$ und $|AS| = a - b$ aus den vorgegebenen Punkten A,B und C konstruierbar sind und $|AC|$ im Dreieck ACS dem größten Winkel σ gegenüberliegt, also größte Seite ist, ist das Dreieck ACS eindeutig konstruierbar (Ssw).

Konstruktion:

Zunächst wird in einer Hilfskonstruktion das Dreieck ACS konstruiert (siehe Vorüberlegung) und an die gegebene Strecke AC so übertragen, dass S und B auf verschiedenen Seiten bezüglich AC liegen. Anschließend zeichnet man die Halbgerade AS ein. Diese schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC (außer in A) eindeutig im gesuchten Punkt D.

3. Möglichkeit

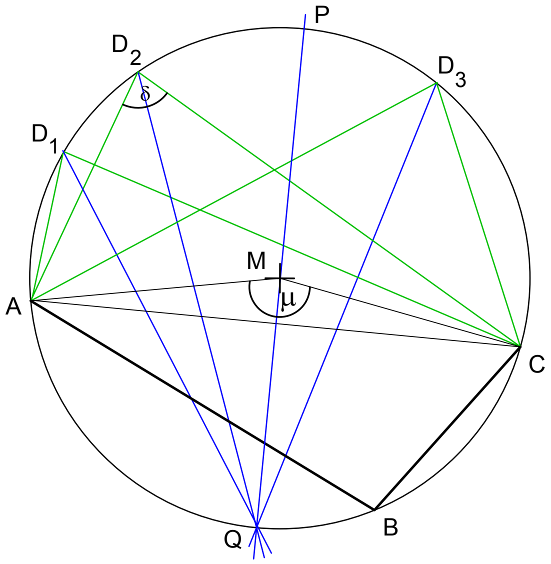
Vorbemerkung

Wählt man auf dem Umkreis des gegebenen Dreiecks ABC mehrfach Punkte D aus und zeichnet die Winkelhalbierende von δ in das dadurch festgelegte Viereck ABCD ein, so scheinen sich diese Winkelhalbierenden auf dem Umkreis des Dreiecks ABC zu scheiden. Der Schnittpunkt Q scheint der Mittelpunkt des Bogens AC zu sein.

Zunächst wird diese Eigenschaft nachgewiesen und danach gezeigt, wie mit Hilfe des Punktes Q der gesuchte Punkt D rekonstruiert werden kann.

Satz:

Die Halbierenden aller Umfangswinkel eines Fasskreisbogens über der Sehne AC zum Winkel δ schneiden sich alle im Mittelpunkt Q des Bogens AC.



Beweis:

Sei D ein fester, aber beliebiger Punkt auf dem Fasskreisbogen über der Sehne AC zum Winkel δ.

Die Schnittpunkte des entsprechenden Fasskreises über AC mit der Mittelsenkrechten von AC werden mit P und Q bezeichnet, wobei die Bezeichnung so gewählt wird, dass Q und D auf verschiedenen Seiten bezüglich AC liegen.

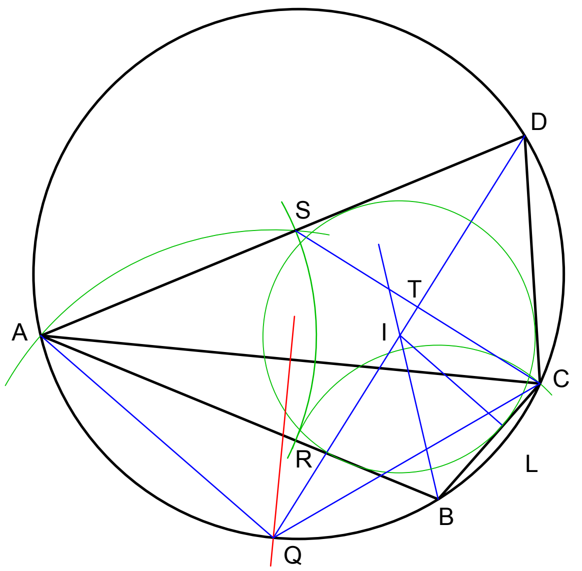
Die Mittelsenkrechte verläuft durch den Fasskreismittelpunkt M. Da $|AM| = |MC|$ ist, halbiert sie den Mittelpunktswinkel $\mu = w(AMC)$.

Mit dem Mittelpunktswinkelsatz folgt:

$$w(AMQ) = w(QMC) = \frac{1}{2}\mu = \delta .$$

Daher kann man den Kreisbogen QA (bzw. CQ) als Fasskreisbogen über der Sehne AQ (bzw. QC) zum Mittelpunktswinkel δ auffassen. Damit erhält man mit dem Mittelpunktswinkelsatz:

$$w(ADQ) = w(QDC) = \frac{1}{2}\delta .$$



Jede Umfangswinkelhalbierende des Fasskreisbogens über AC zum Winkel δ verläuft also durch den Mittelpunkt Q des Bogens AC.

Diese Eigenschaft des Bogenmittelpunkts Q ermöglicht es, über einige Hilfspunkte den fehlenden Viereckspunkt D zu rekonstruieren.

Die nachfolgende Rekonstruktion und die zugehörigen Erläuterungen beziehen sich auf die nebenstehende Zeichnung.

Rekonstruktion:	*Erläuterung:*
Die Mittelsenkrechte von AC schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC in den Punkten P und Q, wobei Q und B auf derselben Seite bezüglich AC liegen.	Q ist die Mitte des Bogens AC, es gilt: $\|AQ\| = \|QC\|$. Nach dem Umfangswinkelsatz ist $w(CQA) = w(CBA) = \beta$.
Der Kreis um B mit Radius b schneidet AB eindeutig im Punkt R.	R liegt damit so auf AB, dass $\|AR\| = a - b$ gilt.
Der Kreis um Q mit Radius $\|AQ\|$ schneidet den Kreis um A mit Radius $\|AR\|$ im Inneren des Umkreises eindeutig im Punkt S.	Der Kreis um Q mit Radius $\|AQ\| = \|QC\|$ ist der Fasskreis über AC mit Mittelpunktswinkel $w(CQA) = w(CBA) = \beta$. Da S bezüglich AC auf der anderen Seite als der Fasskreismittelpunkt Q liegt, ist nach dem Mittelpunktswinkelsatz $180° - w(ASC) = \frac{1}{2} w(CQA) = \frac{1}{2}\beta$, also $w(ASC) = 180° - \frac{1}{2}\beta$. Sein Nebenwinkel hat die Weite $\frac{1}{2}\beta$ (*). Da S auch auf dem Kreis um A mit Radius $\|AR\|$ liegt, gilt: $\|AS\| = \|AR\| = a - b$ (**).
Die Gerade AS schneidet den Umkreis (außer in A) im Punkt D.	Das Viereck ABCD ist damit Sehnenviereck und es gilt: $\delta = 180° - \beta$. Nach dem obigen Satz ist DQ Winkelhalbierende des Winkels $\delta = 180° - \beta$, d.h. $w(ADQ) = w(SDQ) = w(QDC) = \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{1}{2}\beta$. Bezeichnet man den Schnittpunkt von QD und SC mit T, so folgt daraus mit (*) wegen der Winkelsumme im Dreieck STD: $w(DTS) = 180° - (90° - \frac{1}{2}\beta) - \frac{1}{2}\beta = 90°$. Die Winkelhalbierende DQ = DT im Dreieck SCD schneidet die Seite SC also rechtwinklig. Das Dreieck SCD ist daher gleichschenklig mit Spitze D, d.h. $\|SD\| = \|DC\| = c$. Mit (**) folgt für das Viereck ABCD: $\|AD\| + \|BC\| = \|AS\| + \|SD\| + \|BC\| = (a-b) + c + b = a + c = \|AB\| + \|CD\|$ Das Sehnenviereck ABCD ist also auch Tangentenviereck.

Sämtliche Konstruktionsschritte sind möglich und eindeutig, also ist das Viereck ABCD eindeutig rekonstruiert.

4. Möglichkeit:

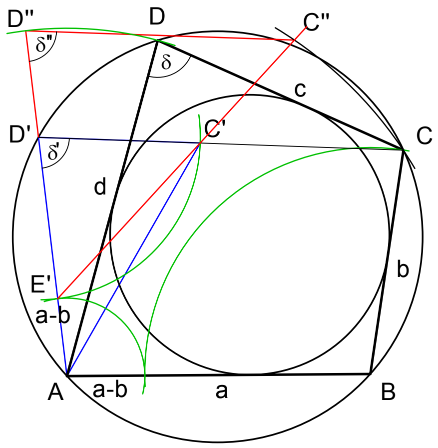
Rekonstruktionsidee:

Der Punkt D ist konstruiert, wenn für das Teildreieck ACD des Vierecks ABCD gilt:

1. D liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.
2. $|AD| - |CD| = d - c = a - b$

Dies wird in drei Schritten erreicht.

Im ersten Schritt wird ein Teildreieck AC'D' konstruiert, bei dem der Punkt D' auf dem Umkreis von Dreieck ABC liegt, $\delta' = \delta$ und $|AD'| - |C'D'| = a - b$ gilt.



Im zweiten Schritt wird daraus das Dreieck AC"D" konstruiert, für das $\delta'' = \delta' = \delta$, $|AD''| - |C''D''| = a - b$ und $|AC''| = |AC|$ gilt.

Im dritten Schritt wird das Dreieck AC"D" durch eine Drehung um A so abgebildet, dass der Punkt C" auf den Punkt C fällt.

Das Bild des Punktes D" ist dann der gesuchte Punkt D.

Rekonstruktion:

Man wählt D' fest, aber beliebig so auf dem Bogen CA des Umkreises, dass $|AD'| > a - b = d - c$ erfüllt ist. Dies ist möglich, da d > d – c > 0 ist nach Voraussetzung. Man zeichnet AD' sowie CD'. Der Winkel AD'C hat dann die gleiche Weite δ' wie der gesuchte Winkel ADC der Weite δ (Satz vom Umfangwinkel über der Sehne AC).

Der Kreis um A mit dem Radius a – b = d – c schneidet AD' eindeutig im Punkt E'. Durch die Beachtung der Bedingung $|AD'| > a - b = d - c$ ist die Existenz von E' sichergestellt.

Der Kreis um D' mit dem Radius $|D'E'|$ schneidet die Halbgerade D'C eindeutig in C'.

Das Dreieck AC'D' hat somit die gewünschte Winkelweite bei D' und die richtige Seitenlängendifferenz $|AD'| - |C'D'| = a - b$.

Der Kreis um A mit dem Radius $|AC|$ schneidet die von E' ausgehende Halbgerade durch C' eindeutig in C". Die Parallele zu C'D' durch C" schneidet AD' eindeutig in D".

Die beiden Winkel AD'C und AD"C" haben die gleiche Weite $\delta' = \delta''$ (Stufenwinkel an Parallelen).

Der 2. Strahlensatz von E' aus garantiert wegen $|E'D'| = |C'D'|$ auch $|E'D''| = |C''D''|$.

Vom Dreieck AC"D" weiß man damit, dass es zwei Seitenlängen hat, die sich um a – b unterscheiden, da $|AD''| - |C''D''| = (|AE'| + |E'D''|) - |C''D''| = |AE'| = a - b$ (nach Konstruktion). Ferner gilt nach Konstruktion: $\delta'' = \delta' = \delta$ und $|AC''| = |AC|$.

Das Dreieck AC"D" wird um den Punkt A so gedreht, dass C" auf C abgebildet wird. Nach der Umkehrung des Satzes vom Umfangwinkel wird dabei der Punkt D" auf einen Punkt des Umkreises abgebildet. Dieser Punkt heiße D. Diese Abbildung ist eindeutig.

Da die Drehung längentreu ist, hat die Strecke AD dieselbe Länge wie die Strecke AD" und CD dieselbe Länge wie C"D". Die beiden Dreiecke AC"D" und ACD sind daher kongruent nach Kongruenzsatz sss. Somit unterscheiden sich die Längen der Seiten AD und CD ebenfalls um a – b.

Folglich ist das Viereck ABCD ein Tangentenviereck (Umkehrung des Satzes vom Tangentenviereck) und D der gesuchte Viereckspunkt. Sämtliche Konstruktionen sind möglich und eindeutig, also ist das Viereck ABCD eindeutig rekonstruiert.

Aufgabe 4

Das Produkt der ersten n Primzahlen $2\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot p_n$ wird als Produkt von zwei natürlichen Zahlen a und b geschrieben. Die auf p_n folgende nächst größere Primzahl sei p_{n+1}.

Zeige: Wenn a + b kleiner als p_{n+1}^2 ist, so ist a + b eine Primzahl.

Lösung:

Zunächst ein Beispiel zur Erläuterung der Aufgabenstellung:

Sei n = 4. Die ersten vier Primzahlen sind 2, 3, 5 und 7. Das Produkt ist also $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210$. Die fünfte Primzahl $p_5 = p_{n+1}$ ist 11 und $p_5^2 = p_{n+1}^2 = 121$.

Eine mögliche Zerlegung von 210 in ein Produkt ist 210 = 1·210. Dann ist aber 1 + 210 = 211 > 121; man muss 211 daher nicht weiter untersuchen, denn die Voraussetzung $a+b<p_{n+1}^2$ ist nicht erfüllt.

Eine andere mögliche Zerlegung von 210 in ein Produkt ist 210 = 14·15. Hier ist 14 + 15 = 29 < 121, die Voraussetzung $a+b<p_{n+1}^2$ ist erfüllt. Nach Aufgabenstellung müsste also 29 eine Primzahl sein, was ja auch der Fall ist.

Die anderen möglichen Zerlegungen von 210 in ein Produkt $a\cdot b$ sind in der folgenden Tabelle erfasst – man erkennt, dass die Summe a + b immer eine Primzahl ist.

210 = 2·105	210 = 3·70	210 = 5·42	210 = 7·30	210 = 6·35	210 = 10·21
2 + 105 = 107 ist Primzahl	3 + 70 = 73 ist Primzahl	5 + 42 = 47 ist Primzahl	7 + 30 = 37 ist Primzahl	6 + 35 = 41 ist Primzahl	10 + 21 = 31 ist Primzahl

Nun aber zum eigentlichen Beweis:

Das Produkt $2\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot p_n$ der ersten n Primzahlen werde als Produkt $a\cdot b$ geschrieben, wobei $a+b<p_{n+1}^2$. Wir müssen zeigen, dass a + b eine Primzahl ist. Dazu beweisen wir, dass jede Primzahl q, die Teiler von a + b ist, gleich a + b sein muss. a + b hat damit keine echten Teiler und ist somit Primzahl.

Vorbemerkung:

Eine Primzahl $p \le p_n$ teilt entweder a oder b, aber keinesfalls beide Zahlen a und b, denn:

Als Teiler von $2\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot p_n$ ist a entweder 1 oder selbst ein Produkt von Primzahlen, die alle unter den ersten n Primzahlen 2, 3, ..., p_n vorkommen. Der andere Faktor b ist dann aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktordarstellung das Produkt der übrigen Primzahlen bis p_n, die in a nicht vorkommen. Somit kommt $p \le p_n$ in der Primfaktordarstellung von a oder b vor, teilt also eine der beiden Zahlen. p teilt aber nicht a und b, denn sonst müsste p^2 auch $a\cdot b$ teilen, was wiederum aufgrund der Primfaktordarstellung $a\cdot b = 2\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot p_n$ ausgeschlossen ist.

Behauptung:

Wenn q eine Primzahl ist, die a + b teilt, dann ist q = a + b.

Beweis:

1. Fall: $q \le p_n$

Nach der Vorbemerkung teilt dann q eine der beiden Zahlen a oder b, aber nicht beide. Würde q z.B. a teilen, so teilt es b nicht. Dann kann aber q nicht a + b teilen. Denn andernfalls würde q auch (a + b) – a = b teilen. Also ist $q \le p_n$ unmöglich, wenn q ein Teiler von a + b ist.

2. Fall: $q > p_n$

Dann ist $q \geq p_{n+1}$. Somit ist $\frac{a+b}{q} \leq \frac{a+b}{p_{n+1}} < p_{n+1}$, da ja nach Voraussetzung $a + b < p_{n+1}^2$. Wäre $\frac{a+b}{q} > 1$, so müsste $\frac{a+b}{q}$ selbst auch wieder einen Primteiler r haben. Wegen $1 < \frac{a+b}{q} < p_{n+1}$ muss r zwischen 2 und p_n liegen. Nach der Vorbemerkung teilt dann r entweder a oder b, aber nicht beide. Wie in Fall 1 teilt r jedenfalls nicht a + b. Damit kann r erst recht nicht den Teiler $\frac{a+b}{q}$ von a + b teilen.

Somit kann nur $\frac{a+b}{q} = 1$ sein.

Es ergibt sich also a + b = q.

Wenn a + b kleiner als p_{n+1}^2 ist, hat a + b also keine echten Teiler und ist folglich eine Primzahl.