# 2003

***Runde 1***

***Aufgabe 1***

Florian schreibt unter die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dieselben Zahlen nochmals in irgendeiner anderen Reihenfolge. Nun subtrahiert er jeweils die untenstehenden Zahlen von den darüber stehenden und multipliziert die neun entstandenen Differenzen miteinander.
Florian behauptet, dass dieses Produkt immer gerade ist.

Hat er recht?

***Vorüberlegung***

Betrachten wir zunächst ein Beispiel:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 3 | 5 | 4 | 7 | 1 | 2 | 6 | 9 | 8 |
| – 2 | – 3 | – 1 | – 3 | 4 | 4 | 1 | – 1 | 1 |

Das Produkt der neun Differenzen ist –288, also gerade. Auch bei anderen Beispielen ist das Produkt jeweils gerade. Es soll nun allgemein begründet werden, dass das Produkt unter den genannten Bedingungen immer gerade ist.

***1. Lösung:***

Unter den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sind fünf ungerade und vier gerade Zahlen. Schreibt man unter diese Zahlen dieselben Zahlen nochmals in irgendeiner anderen Reihenfolge, so muss danach in jedem Fall unter mindestens einer der ungeraden Zahlen eine ungerade Zahl stehen, denn unter den vier geraden Zahlen können maximal vier ungerade Zahlen stehen. Also muss eine der fünf ungeraden Zahlen unter einer ungeraden Zahl stehen. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist gerade. Das Produkt aller Differenzen ist somit immer gerade, da immer mindestens ein Faktor gerade ist. Florian hat recht!

***2. Lösung:***

Wir versuchen, Florians Behauptung zu widerlegen, und suchen ein ungerades Produkt.

Ein Produkt aus mehreren Faktoren ist nur dann ungerade, wenn ***alle*** Faktoren ungerade sind.

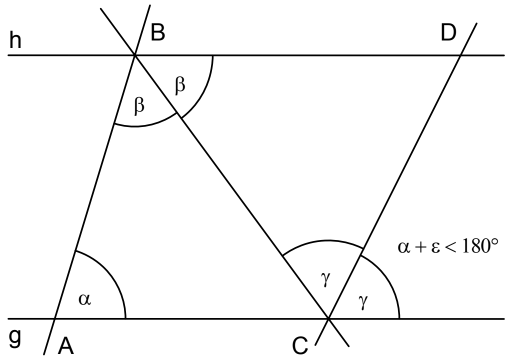
Wir müssten also eine Belegung der unteren Reihe so finden, dass alle Differenzen ungerade sind. Eine Differenz von zwei Zahlen wiederum ist nur dann ungerade, wenn eine Zahl gerade und die andere ungerade ist ( g – u = u, bzw. u – g = u). Unter den neun Minuenden und neun Subtrahenden müssen also neun gerade und neun ungerade Zahlen sein. Es stehen jedoch nur acht gerade (2, 4, 6, 8 je zweimal) und zehn ungerade Zahlen (1, 3, 5, 7, 9 je zweimal) zur Verfügung.

Wir können also keine Belegung der unteren Reihe finden, bei der alle Differenzen ungerade sind. Das Produkt kann also nicht ungerade sein. Florian hat recht.

***Aufgabe 2***

Die Geraden g und h sind parallel.

Wie verändert sich $\gamma$, wenn $\alpha$ um $\varepsilon$ vergrößert wird?



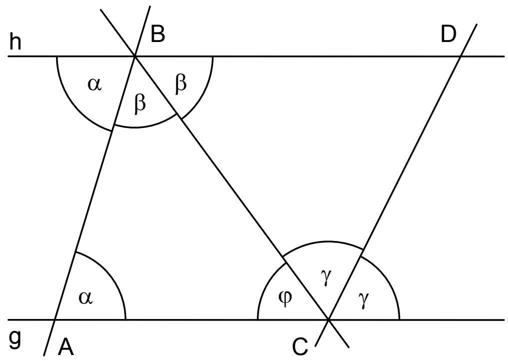

***Lösung***

Da die Geraden g und h nach Voraussetzung parallel sind, folgt:

$\alpha + 2\beta = 180°$, (Wechselwinkel, Nebenwinkel)

$\beta = 90^{o} - \frac{1}{2}\alpha..$ (1)

Mit dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck ACB und mit (1) ergibt sich die Weite $\varphi$ des Winkels BCA:




$$\alpha + \beta + \varphi = 180^{o}$$

$$\varphi = 180^{o} - \alpha - \beta$$

$$\varphi = 180^{o} - \alpha - (90^{o} - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\varphi = 90^{o} - \tfrac{1}{2}\alpha. \qquad (2)$$

Die drei Winkel mit dem Scheitel C haben zusammen die Weite 180°.

Daraus folgt mit (2):

$$\varphi + 2\gamma = 180^{o},$$

$$2\gamma = 180^{o} - \varphi,$$

$$2\gamma = 180^{o} - (90^{o} - \tfrac{1}{2}\alpha),$$

$$2\gamma = 90^{o} + \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\gamma = 45° + \frac{1}{4}\alpha. \qquad (3)$$

Nun wird $\alpha$ um $\varepsilon$ vergrößert:

$$\alpha' = \alpha + \varepsilon.: \qquad (4)$$

Dann ergibt sich mit (3) und (4) für die veränderte Winkelweite $\gamma'$:

$$\gamma' = 45^{o} + \tfrac{1}{4}\alpha',$$

$$\gamma' = 45^{o} + \tfrac{1}{4}(\alpha + \varepsilon),$$

$$\gamma' = 45^{o} + \tfrac{1}{4}\alpha + \tfrac{1}{4}\varepsilon,$$

$$\gamma' = \gamma + \frac{1}{4}\varepsilon. \qquad (5)$$

Beim Vergrößern von $\alpha$ um $\varepsilon$ vergrößert sich $\gamma$ um $\frac{1}{4}\varepsilon$.

Bemerkung:

An diesen Überlegungen ändert sich nichts, wenn die Winkelweite $\alpha$ den Wert $90^{o}$ überschreitet, solange nur $\alpha + \varepsilon < 180^{o}$ gilt.

***Aufgabe 3***

Bestimme alle natürlichen Zahlen a, b, c mit $a \le b \le c$, für die gilt: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

***Lösungsvorschlag:***

***Vorbemerkung:***

Falls man, wie neuerdings üblich, die Zahl 0 als natürliche Zahl auffasst, sollte man erwähnen, dass in der Gleichung $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (*) offensichtlich keine der Zahlen a, b, c den Wert 0 annehmen darf.

Aus der Bedingung $a \le b \le c$ folgt $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} \ge \frac{1}{c}$ .

Somit kann man abschätzen: $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}$ . Hieraus folgt $a \le 3$ .

Die drei möglichen Fälle a = 1, a = 2 und a = 3 werden nun systematisch untersucht:

***1. Fall a = 1***

Dieser Fall liefert keine Lösung, denn die Gleichung (*) heißt in diesem Fall $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ .

Beide Summanden der linken Seite sind aber positiv und können in der Summe daher nicht Null ergeben.

***2. Fall a = 2***

Mit $b \ge a$ ist zunächst

b = 2 möglich. Aus Gleichung (*) folgt hier aber die nicht erfüllbare Gleichung $\frac{1}{c}=0$ .

b = 3 ergibt für c die Bedingung $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=1$, die äquivalent zu c = 6 ist.

Dies ist also eine Lösung: a = 2, b = 3, c = 6 .

b = 4 ergibt für c die Bedingung $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{c}=1$, die äquivalent zu c = 4 ist.

Dies ist also eine zweite Lösung a = 2, b = 4, c = 4 .

$b \ge 5$ führt nicht zu weiteren Lösungen, da man dann mit Hilfe von $\frac{1}{2}+\frac{1}{b} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ wie folgt c abschätzen kann: $\frac{1}{c}=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{b}\right) \ge 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}$ also $c \le \frac{10}{3} < 4$ , was im Widerspruch zu $b \le c$ steht.

***3. Fall  a = 3***

Mit $b \geq a$ ist zunächst

$b = 3$ möglich. Aus der Gleichung (*) folgt hier $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=1$ und dazu äquivalent $c = 3$.

Dies ist eine dritte Lösung $a=3$, $b=3$, $c=3$.

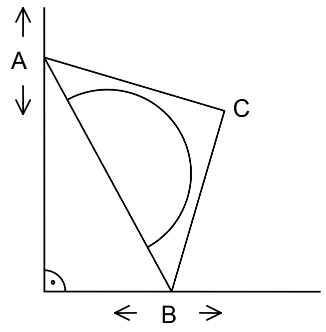
$b \geq 4$ führt nicht zu weiteren Lösungen, da man dann mit Hilfe von $\frac{1}{3}+\frac{1}{b}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ wie folgt c abschätzen kann : $\frac{1}{c}=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{b}\right)\geq 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{12}$ also $c \leq 2{,}4$ . Dies steht im Widerspruch zu $b \leq c$.

Es gibt also nur die angegebenen drei Lösungen für (a, b, c), nämlich (2, 3, 6), (2, 4, 4) und (3, 3, 3).

***Aufgabe 4***

Die Eckpunkte A und B eines Geodreiecks gleiten entlang zweier benachbarter Kanten eines rechteckigen Blatt Papiers (siehe Abbildung).

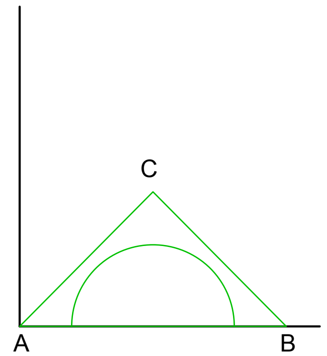
Welche Bahn beschreibt dabei die Ecke C des Geodreiecks?

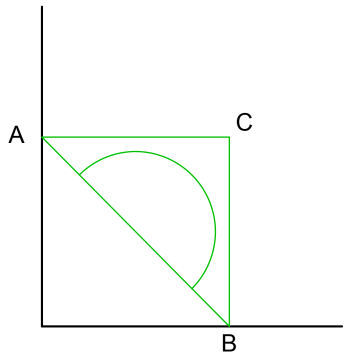


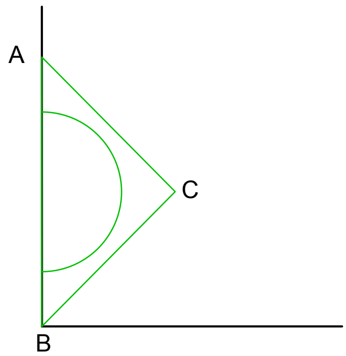

***Lösungen***

Aus der Zeichnung mit verschiedenen zulässigen Lagen der Punkte B und A erhalten wir die Vermutung, dass die Bahn von C eine Strecke auf der Winkelhalbierenden der Kanten des Papierblattes ist.

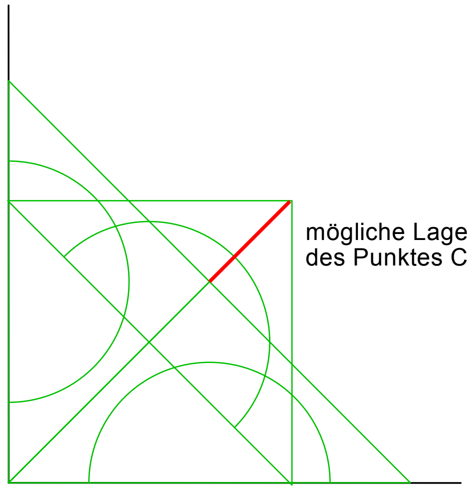
Der Abstand von C zu den Kanten liegt zwischen $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot k$ und k, wenn k die Länge der Kathete des Geodreiecks ist.




In der nebenstehenden Zeichnung sind die drei besonderen Lagen wiedergegeben und die Bahn des Punktes C eingetragen.




***1. Beweis (mit kongruenten Dreiecken)***

Man fällt die Lote von C auf die Kanten des Blattes. Die Lotfußpunkte heißen X und Y.

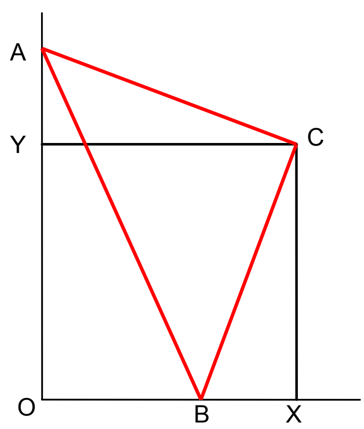
***1. Fall: $|OX| > |OB|$***

Die Dreiecke BXC und AYC sind demnach kongruent, denn es gilt:

Der Winkel ACB und der Winkel YCX sind jeweils rechte Winkel, deshalb sind die Winkel BCX und ACY gleich groß.

Ferner sind die Winkel CXB und CYA rechte Winkel und damit auch gleich groß.

Die Strecken CA und CB sind als Katheten des Geodreiecks gleich lang.



Folglich haben CX und CY die gleiche Länge, C liegt deshalb auf der Winkelhalbierenden der Halbgeraden OB und OA.

***2. Fall: X=B***

Dann ist Y = A. Der Punkt C liegt auf der Winkelhalbierenden der Halbgeraden OB und OA.

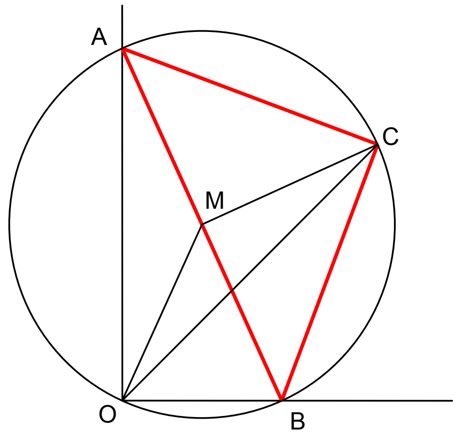
***3. Fall: |OX| < |OB|***

Man schließt entsprechend dem 1. Fall, dass C auf der Winkelhalbierenden der Halbgeraden OB und OA liegt.

C liegt am nächsten bei O, wenn B in O oder A in O liegt. Der Abstand von C zu den Kanten beträgt dann $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot k$, wenn k die Länge der Kathete des Geodreiecks ist.

C ist am weitesten von O entfernt, wenn der Abstand von C zu den Kanten k ist.

***2. Beweis (mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes)***




M sei die Mitte der Strecke AB.

Die Winkel ACB und BOA sind jeweils rechte Winkel. Wegen der Umkehrung des Satzes von Thales gibt es einen Kreis um M durch O, B, C und A. Der Umfangswinkel COA ist wegen des Peripheriewinkelsatzes halb so groß wie der Mittelpunktswinkel CMA. Dieser beträgt aber 90°. Also hat der Winkel COA die Größe 45°. C liegt demnach auf der Winkelhalbierenden der beiden Kanten.

Je nach Lage von M oberhalb der Strecke OC oder unterhalb der Strecke OC handelt es sich bei dem Winkel mit dem Scheitel M um den Winkel OMC oder um den Winkel CMO.

Das Winkelmaß liegt in jedem Fall zwischen 90° und 180°. Da OC diesem Winkel gegenüber liegt, ist OC am kürzesten beim Winkelmaß 90° und am längsten beim Winkelmaß 180°.

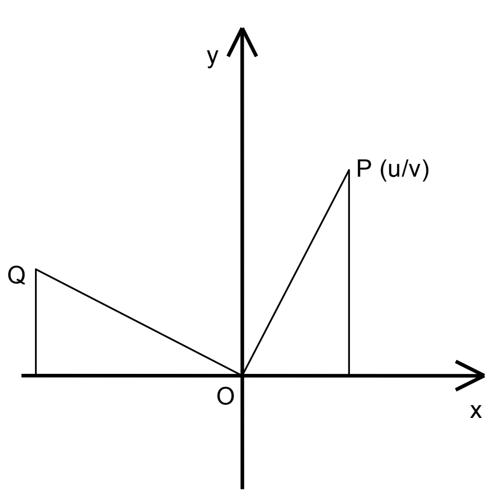
Im ersten Fall gilt |OC| = k und im zweiten Fall $|OC| = k\cdot\sqrt{2}$, wenn k die Länge der Kathete des Geodreiecks ist.

Der Abstand von C zu den Kanten ist dann $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot k$ oder k.

***3. Beweis (mit Hilfe eines Koordinatensystems)***

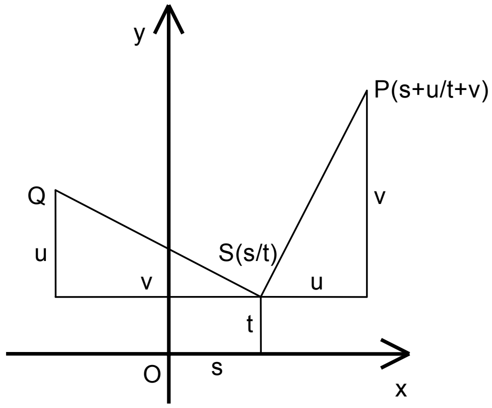
In einem Koordinatensystem gilt:

Ist das orientierte Dreieck aus O(0/0), P(u / v) und Q rechtwinklig und gleichschenklig mit der Spitze in O, so hat Q die Koordinaten (–v / u).



Entsprechend gilt durch Verschiebung um s in x-Richtung und t in y-Richtung(*):

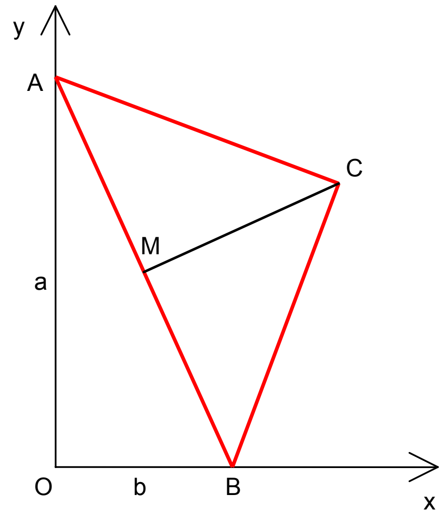
Ist das orientierte Dreieck aus S(s/t), P(s + u / t + v) und Q rechtwinklig und gleichschenklig mit der Spitze in S, so hat Q die Koordinaten (s – v / t + u).




Die nebenstehende Zeichnung zeigt dies für positive Werte s, t, u und v. Entsprechend kann man diese Eigenschaft auch für die anderen Fälle durch eine Zeichnung verdeutlichen.

Zur Lösung der gegebenen Problemstellung führt man ein Koordinatensystem mit Ursprung O und den Papierkanten als Koordinatenachsen ein. B hat dann die Koordinaten (b/0), A die Koordinaten (0/a).

Die Mitte M der Strecke AB hat die Koordinaten $(\frac{b}{2}/\frac{a}{2})$.




Um die Koordinaten der Eckpunkte in der Form wie bei den Punkten S, P und Q auf der vorhergehenden Seite angeben zu können, notieren wir die Koordinaten von B in der Form

$$(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}/\frac{a}{2}+\frac{(-a)}{2}).$$

Wendet man auf das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck MBC die Aussage (*) an, so hat C die Koordinaten

$$(\frac{a+b}{2}/\frac{a+b}{2}).$$

Folglich liegt C auf der ersten Winkelhalbierenden des Koordinatensystems.

Ist k die Länge der Katheten des Geodreiecks, dann gilt $0 \le a \le \sqrt{2}\cdot k$ und $0 \le b \le \sqrt{2}\cdot k$.

Das bedeutet:

Der Abstand von C zu den Kanten ist minimal, wenn a = 0 oder b = 0 und damit ist dieser Abstand $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot k$.

Der Abstand von C zu den Kanten ist maximal, wenn a = b = k und damit auch der Abstand k ist.

***Aufgabe 5***

In der Zeichenebene ist ein Kreis k mit einem Durchmesser AB vorgegeben. Ein beliebiger Punkt P wird in der Ebene so gewählt, dass er nicht auf k und nicht auf der Geraden (AB) liegt.

Kann man nur mit einem Lineal das Lot von P auf (AB) konstruieren?

***1. Lösung***

Die Konstruktion des Lotes ist für alle zulässigen Punkte P möglich. Es wird eine Fallunterscheidung nach der Lage von P durchgeführt.

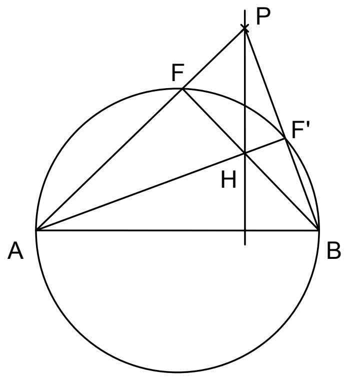
Alle Konstruktionen beruhen auf dem gleichen Grundgedanken, dass das gesuchte Lot die dritte Höhe eines geeignet gewählten Dreiecks ist, für das der Höhenschnittpunkt durch zwei Höhen mit Hilfe eines Lineals alleine konstruiert werden kann.

Aus Symmetriegründen müssen die Fälle, dass P unterhalb von AB oder „links der Mitte“ liegt, nicht extra betrachtet werden.

***1. Fall: P liegt innerhalb des von den Orthogonalen zu AB durch A bzw. B begrenzten Streifens, oberhalb von AB***

a) P liegt außerhalb des Kreises

Zeichne die Strecken AP und BP. Deren Schnittpunkte mit dem gegebenen Kreis sind die Höhenfußpunkte F und F' auf die Dreiecksseiten AP und BP, da nach dem Satz des Thales die Dreiecke ABF und ABF' rechtwinklig sind.




Die Höhen FB und F'A des Dreiecks ABP schneiden sich im Höhenschnittpunkt H.

Da sich die drei Höhen eines Dreiecks im Höhenschnittpunkt schneiden, ist die Gerade (PH) die dritte Höhe im Dreieck ABP und damit das gesuchte Lot auf AB.

b) P liegt innerhalb des Kreises

Die Konstruktion lässt sich wie im vorhergehenden Fall durchführen. Dazu zeichnet man die beiden Geraden durch A und P bzw. B und P.

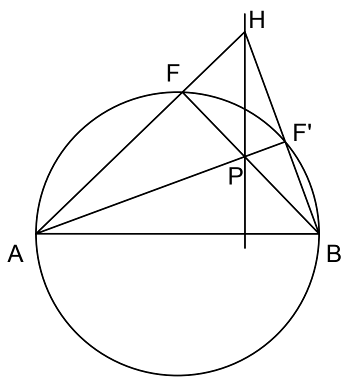
H liegt in diesem Fall außerhalb des Dreiecks ABP.

***2. Fall: P liegt auf der Orthogonalen durch B zu AB***

Die Gerade (PB) ist das gesuchte Lot. Eine Konstruktion ist nicht erforderlich.

***3. Fall: P liegt außerhalb des in Fall 1 beschriebenen Streifens***

Die Geraden durch die Punkte A und P bzw. B und P schneiden den Kreis in den Punkten F und F'. Wieder sind die Dreiecke AF'B bzw. ABF nach dem Satz von Thales rechtwinklig.




Die Gerade (AF’) ist die Höhe auf die Trägerade (BP) des Dreiecks ABP, die Gerade (BF) ist die Höhe auf die Dreiecksseite AP. Diese beiden Geraden schneiden sich im Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABP. Die Gerade (PH) ist die dritte Höhe in diesem Dreieck und ist orthogonal zur Geraden durch die Punkte A und B.

## *2. Lösung*

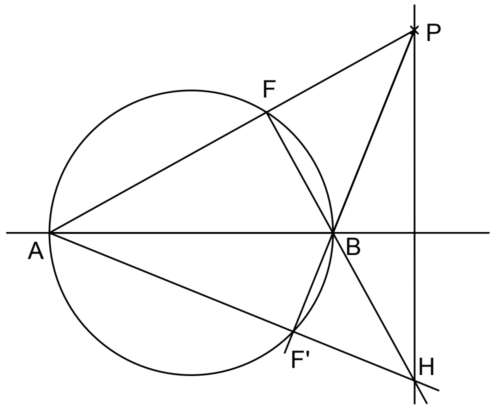
Die Konstruktion des Lotes ist für alle zulässigen Punkte P möglich. Für eine beliebige Lage des Punktes P werden die Geraden (PA) und (PB) gezeichnet. Die weitere Lösung basiert auf den Schnittpunkten dieser Geraden mit dem Kreis.

Es wird eine Fallunterscheidung hinsichtlich der Anzahl der Schnittpunkte durchgeführt. Da P nicht auf k und nicht auf der Geraden (AB) liegt, sind nur die beiden folgenden Fälle möglich.

### *1. Fall: Es gibt vier solche Schnittpunkte*

Die Gerade (PA) schneidet k in einem zweiten Punkt F, (PB) schneidet k in einem zweiten Punkt F'.

Die Gerade (AF') ist die Höhe auf die Trägergerade der Seite BP des Dreiecks ABP, die Gerade (BF) ist die Höhe auf die Trägergerade der Dreiecksseite AP, da nach dem Satz des Thales die Dreiecke ABF und ABF' rechtwinklig sind. Diese beiden Geraden schneiden sich im Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABP. Die Gerade (PH) ist die dritte Höhe in diesem Dreieck und ist orthogonal zur Geraden durch die Punkte A und B.




### *2. Fall: Es gibt drei solche Schnittpunkte:*

Die Gerade (PA) schneidet k in einem zweiten Punkt F, die Gerade (PB) hat mit k nur den Punkt B gemeinsam.
Die Gerade (PB) ist Tangente an den Kreis k im Punkt B und somit orthogonal zum Durchmesser AB.

Schneidet die Gerade (PB) den Kreis in einem zweiten Punkt und berührt die Gerade (PA) den Kreis, argumentiert man entsprechend.

***Aufgabe 6***

Für welche natürlichen Zahlen n ist $1+2+3+\dots+n$ ein Teiler von $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n$ ?

***Lösung***

***Vorbemerkungen***

1) Für jede natürliche Zahl *n* gilt $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (Gaußsche Summenformel).

2) Wie üblich verwenden wir die Abkürzung $n!$ für $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n$ (lies: n Fakultät).

Nach der Gaußschen Summenformel muss man also untersuchen, für welche natürlichen Zahlen n die Zahl $\frac{n(n+1)}{2}$ ein Teiler von $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n$ ist. Da n sicher ein Teiler von $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n$ ist, kommt es also darauf an, wann n + 1 ein Teiler von $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n$ ist. Dies ist nicht möglich, wenn n + 1 eine Primzahl ist. Die folgende Behauptung liegt also nahe:

***Behauptung:***

Für eine natürliche Zahl n ist die Summe $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ genau dann ein Teiler des Produkts $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n$, wenn n+1 <u>keine</u> Primzahl ist.

***1. Fall***

Sei zunächst n eine natürliche Zahl, für die n + 1 = p eine ungerade Primzahl ist.

Eine Primzahl kann nur dann ein Produkt teilen, wenn sie mindestens einen der Faktoren teilt. Denn sonst würde die Primzahl ja in der Primfaktordarstellung des Produkts, die sich aus den Primfaktordarstellungen der Faktoren zusammensetzt, nicht vorkommen. Wenn p das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n$ teilen würde, so müsste p einen der Faktoren 1, 2, 3, ... , n teilen. Dies ist unmöglich, da p = n + 1 größer als jeder dieser Faktoren ist. Damit ist erst recht das Vielfache $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$ von n + 1 kein Teiler von n!. In Fall 1 ist also $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ <u>kein</u> Teiler von $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n$.

***2. Fall***

Sei *n* eine natürliche Zahl, für die n + 1 = p <u>keine</u> ungerade Primzahl ist.

Wenn n = 1, so ist $1+2+3+\dots+n=1$ und $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n=1$. Daher teilt die Summe das Produkt.

Wenn n > 1, so ist n +1 keine Primzahl. Man kann also n + 1 als Produkt n + 1 = x·y schreiben, wobei $1<x,y<n$.

Wenn $x\neq y$ ist, so kommen sowohl x also auch y unter den Zahlen 1, 2 , 3, ... , n – 1 vor.

Dann ist n + 1= x y ein Teiler von $(n-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-1)$. Damit ist auch $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$ ein Teiler von $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-1)\cdot n$.

Wenn aber x = y , so ist n + 1 = $x^2$ eine Quadratzahl. Wir zeigen zunächst, dass in diesem Fall für $n\geq 8$ nicht nur $x\leq n-1$, sondern sogar $2x\leq n-1$ ist. Für $n\geq 8$ ist nämlich $x^2=n+1\geq 9$, also ist $x\geq 3$ und $(x-1)^2\geq 4$. Daher ist $(x-1)^2=x^2-2x+1=n+1-2x+1\geq 4$ und somit $2x\leq n-2\leq n-1$.

Es ist also sogar $x \cdot (2x) = 2(n+1)$ ein Teiler von $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)$ und damit erst recht auch n + 1. Wie oben ist daher wieder $\frac{n}{2} \cdot (n+1)$ ein Teiler von $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Es bleibt noch zu untersuchen, was im Fall n < 8 passiert.
Die einzige Quadratzahl zwischen 1 und 9 ist aber 4, d.h. in diesem Fall ist n + 1 = 4 und n = 3. Man rechnet direkt nach, dass jetzt 1 + 2 + 3 = 6 ein Teiler von 1·2·3 = 6 ist. In Fall 2 ist also immer die Summe $1+2+3+\dots+n$ ein Teiler des Produkts $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ und die Behauptung ist bewiesen.