2002

Runde 2

Aufgabe 1

Welche natürlichen Zahlen lassen sich nicht als Summe aufeinander folgender natürlicher Zahlen schreiben?

Lösung

Jede natürliche Zahl n lässt sich eindeutig zerlegen in $n = 2^m \cdot x$ mit einer ungeraden Zahl $x \in \mathbb{N}$.

Fall 1: x ist größer als 1

Für $m = 0$ ist $n = x$ und damit eine ungerade Zahl. In diesem Fall gibt es eine natürliche Zahl x_1 mit $x = 2x_1 + 1$. Wegen $x = 2x_1 + 1 = x_1 + (x_1 + 1)$ ist die ungerade Zahl x immer als Summe von zwei aufeinander folgenden Zahlen darstellbar.

Betrachten wir nun den Einfluss des Faktors 2^m für $m \in \{1, 2, 3 \ldots\}$.

$$m = 1:\ n = (x_1 - 1) + x_1 + (x_1 + 1) + (x_1 + 2) = 4x_1 + 2 = 2 \cdot x$$
$$m = 2:\ n = (x_1 - 3) + (x_1 - 2) + (x_1 - 1) + x_1 + (x_1 + 1) + (x_1 + 2) + (x_1 + 3) + (x_1 + 4) = 8x_1 + 4 = 4 \cdot x$$

Die Darstellung in den beiden Beispielen lässt sich in folgender Weise verallgemeinern:

Zu x_1 werden die nächsten 2^m natürlichen Zahlen $(x_1 + 1)$, ... $(x_1 + 2^m)$ und die vorher gehenden $2^m - 1$ natürlichen Zahlen $(x_1 - 1)$, ..., $(x_1 - 2^m + 1)$ addiert. In diesem Term tritt der Summand x_1 insgesamt 2^{m+1} mal auf. Die übrigen Summanden heben sich mit Ausnahme von 2^m paarweise auf. Durch Zusammenfassen der Summanden erhält man den Term $2^{m+1} x_1 + 2^m = 2^m \cdot (2 \cdot x_1 + 1) = 2^m \cdot x = n$.

Im Falle $x_1 \leq 2^m - 1$ beginnt die Summe mit einem Summand $x_1 - 2^m + 1 \leq 0$.

Da der größte Summand $x_1 + 2^m > |x_1 - 2^m + 1|$ ist, gibt es zu jedem negativen Summanden einen positiven Summanden mit gleichem Betrag, so dass sich diese beiden dann aufheben,

z.B. $12 = 2^2 \cdot 3 = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 3 + 4 + 5$.

Somit ist jede Zahl, die mindestens einen Primfaktor $\neq 2$ hat, als Summe aufeinander folgender Zahlen darstellbar.

Fall 2: Ist x = 1, so ist n = 2^m.

Die Annahme, dass sich die Zahl n in der Form $n = x_o + \ldots + (x_o + d)$ darstellen lässt, wird zum Widerspruch geführt.

Durch Einsetzen und Umformen erhält man:

$$
\begin{aligned}
2^m &= x_o + (x_o + 1) + \ldots + (x_o + d), \\
2^m &= (d+1) \cdot x_o + 1 + \ldots + d, \\
2^m &= (d+1) \cdot x_o + \frac{d \cdot (d+1)}{2}, \\
2^m &= \frac{d+1}{2} \cdot (2x_o + d), \\
2^{m+1} &= (d+1) \cdot (2x_o + d).
\end{aligned}
$$

Diese beiden Faktoren (d+1) und $(2x_o + d)$ des rechten Terms sind nie gleichzeitig gerade, können also nie gleichzeitig Potenzen von 2 sein.

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme!

$\Rightarrow$ $n = 2^m$ kann nicht als Summe aufeinander folgender Zahlen geschrieben werden.

Aufgabe 2

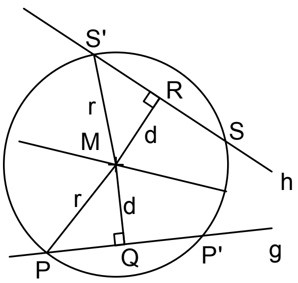
In einer Ebene sind drei verschiedene Geraden, die nicht alle parallel sind, und eine Strecke der Länge s gegeben.

Welche Kreise schneiden auf jeder der drei Geraden eine Strecke der Länge s aus?

Lösung

Vorüberlegung

Es wird zunächst bewiesen, dass ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt M genau dann gleich lange Strecken auf zwei Geraden g und h ausschneidet, wenn der Abstand des Punktes M von den beiden Geraden übereinstimmt.



Beweis "⇒"

Voraussetzung:
Der Punkt M habe von den Geraden g und h den Abstand d.

Behauptung:
Die von dem Kreis um M mit Radius r (r > d) auf den Geraden g und h ausgeschnittenen Strecken PP' und SS' sind gleich lang.

Beweis:
Die Dreiecke PQM und S'MR sind nach Ssw kongruent, da sie in den Seitenlängen r und d sowie dem der längeren Seite MP bzw. MS' gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Da PQ und RS' gleich lang sind, gilt dies auch für die doppelt so langen Strecken PP' und SS'.

Beweis "⇐"

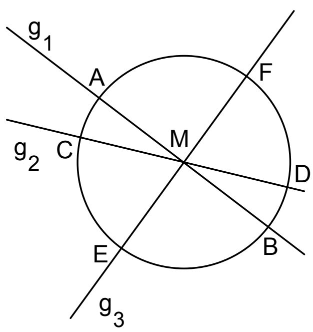
Voraussetzung:
Die Punkte P, P', S und S' liegen auf einem Kreis um M und die Strecken PP' und SS' sind gleich lang.

Behauptung:
Der Kreismittelpunkt M hat von den beiden Geraden den gleichen Abstand.

Beweis:
Die Dreiecke PP'M und SS'M sind nach sss kongruent, da sie in allen drei Seitenlängen übereinstimmen. Der Abstand des Punktes M von den beiden Geraden ist die Höhe in den gleichschenkligen Dreiecken PP'M und SS'M bezüglich der Basen PP' bzw. SS'. In kongruenten Dreiecken sind die Höhen einander entsprechender Seiten gleich lang.

1. Fall: Die Geraden g_1, g_2, g_3 gehen alle durch einen Punkt M.

Der Kreis k(M; $r = \frac{1}{2}s$) ist in diesem Fall die einzige Lösung.

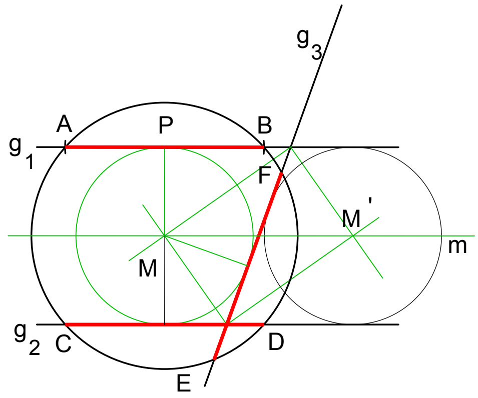


Begründung

Der Punkt M ist der einzige Punkt, der von allen drei Geraden den gleichen Abstand hat. Der Kreis um M mit Radius $\frac{1}{2}s$ schneidet aus jeder dieser Geraden einen Durchmesser der Länge s aus.

2. Fall: $\mathbf{g_1 \parallel g_2}$ **,** $\mathbf{g_3}$ ***nicht parallel*** $\mathbf{g_1}$ **.**

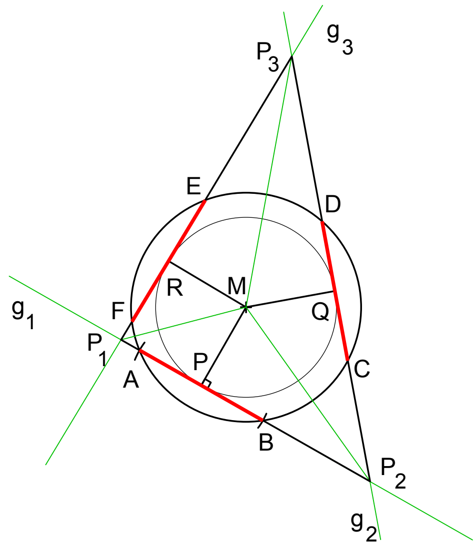
Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen einerseits auf der Mittelparallelen m der Geraden g_1 und g_2, andererseits auf den Winkelhalbierenden des Geradenpaares (g_1, g_3). Die Mittelparallele m und die Winkelhalbierenden des Geradenpaares (g_1, g_3) schneiden sich in den Punkten M und M'. Diese Punkte haben von den drei Geraden den gleichen Abstand. Deshalb gehen auch die Winkelhalbierenden des Geradenpaares (g_1, g_3) durch diese Punkte M und M'.



Das Lot von M auf die Gerade g_1 hat den Lotfußpunkt P.

Der Kreis um P mit Radius $\frac{1}{2}s$ schneidet die Gerade g_1 in den Punkten A und B. Diese Strecke hat die Länge s. Der Kreis um M durch A schneidet die beiden anderen Geraden in den Punkten C und D bzw. E und F. Nach den Vorüberlegungen sind die drei Strecken AB, CD und EF gleich lang.

Die Konstruktion des gesuchten Kreises um M' verläuft analog.

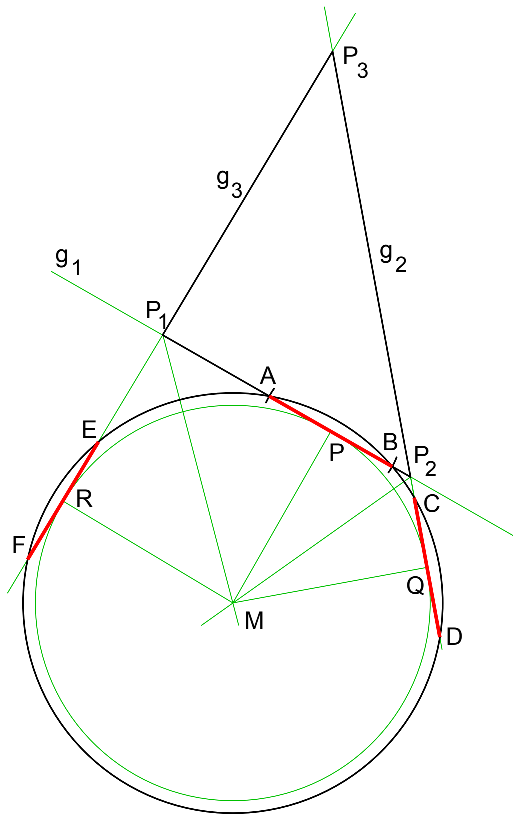


3. Fall: Die drei Geraden bilden ein Dreieck $P_1P_2P_3$.

Es gibt vier Lösungen: eine zum Inkreis und je eine zu den drei möglichen Ankreisen.

Der Inkreismittelpunkt M des Dreiecks $P_1P_2P_3$ hat von den drei Geraden g_1, g_2 und g_3 den gleichen Abstand.

Zeichnet man um einen der Lotfußpunkte, beispielsweise um P, einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2}s$, so schneidet dieser Kreis die Gerade g_1 in den Punkten A und B. Der Kreis um M durch diese Schnittpunkte schneidet aus allen drei Geraden eine Strecke der Länge s aus.



Das nebenstehende Bild zeigt die Lösung für einen der drei Ankreise.

Aufgabe 3

Eine Folge natürlicher Zahlen beginnt mit einer zweistelligen Zahl. Sie wird nach folgender Vorschrift fortgesetzt:

Man subtrahiert eine einstellige natürliche Zahl ungleich 0 und setzt diese vor die Differenz, usw.

Beispiel: 17 – 5 = 12, die nächste Zahl heißt 512;
512 – 8 = 504, die dritte Zahl heißt 8504;
usw.

Für welche Startzahlen kann in einer solchen Folge eine neunstellige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 vorkommen?

1. Lösung

Vorüberlegung

Die Bildungsvorschrift für die Zahlenfolge lässt sich wie folgt algebraisch darstellen.

Sei z eine Zahl der Folge und e die einstellige Zahl, die man subtrahiert. Dann heißt die auf z folgende Zahl $z - e + e \cdot 10^n$. Dabei ist n die Anzahl der Stellen von z – e.

Es gilt $z - e + e \cdot 10^n = z + e \cdot 10^n - e = z + e \cdot \left(10^n - 1\right)$. Da $e \cdot (10^n - 1)$ sicher durch 9 teilbar ist, erhält man bei der Division von z und $z - e + e \cdot 10^n$ durch 9 jeweils den gleichen Rest.

Alle Glieder einer solchen Folge haben demnach den gleichen Rest bei der Division durch 9.

Eine neunstellige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 hat als Quersumme 45 und ist deshalb durch 9 teilbar. Demnach muss die Startzahl notwendigerweise eine durch 9 teilbare Zahl sein.

Um diese Frage zu klären, welche der durch 9 teilbaren zweistelligen Startzahlen durch mehrfaches Anwenden der gegebenen Vorschrift zu einer neunstelligen Zahl aus lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 führen, gehen wir von einer neunstelligen Zahl $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ mit lauter verschiedenen Ziffern a_i ungleich 0 aus und versuchen, rückwärts die Startzahl zu konstruieren.

Durch die Schreibeweise $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ wird die neunstellige Zahl mit der Einerziffer a_1, der Zehnerziffer a_2 usw. dargestellt.

Die Konstruktionsvorschrift (V*) für die nächste Zahl beim Rückwärtsarbeiten lautet:

Man streicht die führende Ziffer und addiert diese zur verbleibenden Zahl.

Aus $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ wird $\overline{a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1} + a_9$, daraus $\overline{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1} + a_9 + a_8$ usw.

Dieses Verfahren kann man durch die Summenbildung mit den Zahlen a_i in der angegebenen Form so lange fortsetzen, wie kein Übertrag eine der vorne zu streichenden Ziffern a_i zuvor verändert hatte. Dabei sind nur Veränderungen der Ziffern $a_3, a_4, \ldots$ bedeutsam, da das Verfahren V* auf zweistellige Zahlen nicht mehr angewandt wird.

Da die Ziffern a_i alle verschieden und ungleich 0 sind, ist die Summe $a_9 + a_8 + \ldots + a_3$ mindestens 28 (= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) und höchstens 42 (= 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9).

Bei der mehrfachen Anwendung von (V*) kann höchstens dann ein Übertrag von der Zehner- zur Hunderterstelle auftreten, wenn die Ziffer a_2 den Wert 7, 8 oder 9 hat. Wenn $a_2 \le 6$ ist, kann das Verfahren (V*) siebenmal durchgeführt werden, ohne dass es zu einem Übertrag von der Zehner- zur Hunderterstelle kommt. Diesen Fall betrachten wir zunächst.

***1. Fall Es sei* $\mathbf{a_2 \le 6}$.**

Führt man das Verfahren (V*) ausgehend von einer neunstelligen Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 ***siebenmal*** durch, so erhält man die zweistellige Zahl

$$\overline{a_2a_1} + a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 = 10a_2 + a_1 + 45 - a_2 - a_1 = 45 + 9a_2 .$$

Setzt man für a_2 der Reihe nach 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 , so erhält man die Zahlen 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90 ; 99.

2. Fall: a₂ sei 7, 8 oder 9, wobei der Fall* $\mathbf{a_3 = 9}$ und $\mathbf{a_2 = 8}$ *zunächst ausgeschlossen wird.

Führt man den Prozess (V*) - ausgehend von einer neunstelligen Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 – ***sechsmal*** durch, so erhält man die dreistellige Zahl

$$z = \overline{a_3a_2a_1} + a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_4 = 100a_3 + 10a_2 + a_1 + 45 - a_3 - a_2 - a_1 = 45 + 99a_3 + 9a_2$$

Setzt man für a_2 nacheinander die Zahlen 7, 8 und 9, sowie für a_3 nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 ein, wobei aber die für a_2 verwendete Zahl ausgelassen und gegebenenfalls zusätzlich $a_3 \ne 9$ ist, so erhält man folgende Zahlen

$a_2 = 7$ 207, 306, 405, 504, 603, 702, —, 900 und 999

Diese Zahlen führen bei Anwendung von (V*) direkt bzw. über 999 → 108 →9 stets zur Zahl 9.

$a_2 = 8$ 216, 315, 414, 513, 612, 711, 810, —, — ($a_3 = 9$ wird später behandelt.)

Diese Zahlen führen bei Anwendung von (V*) stets zur Zahl 18.

$a_2 = 9$ 225, 324, 423, 522, 621, 720, 819, 918

Diese Zahlen führen bei Anwendung von (V*) immer zur Zahl 27.

3. Fall: $a_3 = 9$ und $a_2 = 8$

In diesem Fall gibt es sogar einen Übertrag von der Hunderter- zur Tausenderstelle. Wir müssen deshalb das Verfahren bereits nach fünffacher Anwendung von (V*) abbrechen.

Es entsteht die Zahl

$$z = \overline{a_4a_3a_2a_1} + a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 = 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1 + 45 - a_4 - a_3 - a_2 - a_1$$
$$= 45 + 999a_4 + 99a_3 + 9a_2 = 1008 + 999a_4 .$$

Setzt man für a_4 die noch verfügbaren Zahlen 1 bis 7 ein, so entstehen die Zahlen 2007, 3006, 4005, 5004, 6003, 7002 und 8001, die bei Anwendung von (V*) immer direkt zur Zahl 9 führen.

Zusammenfassung:

In keinem der Fälle erhält man, ausgehend von den einer neunstelligen Zahl aus lauter verschiedenen Ziffern durch mehrfaches Anwenden von (V*), die Zahlen 36 und 45. Für alle anderen durch 9 teilbaren zweistelligen Startzahlen kann durch mehrmaliges Anwenden von (V) jeweils eine neunstellige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 erreichen.

Die folgende Tabelle zeigt jeweils ein Beispiel für jede der genannten Startzahlen.

123456789	234567891	345678912	456789123	567891234	678912345	789123456	891234567
23456790	34567893	45678915	56789127	67891239	78912351	89123463	91234575
3456792	4567896	5678919	6789132	7891245	8912358	9123471	1234584
456795	567900	678924	789138	891252	912366	123480	234585
56799	67905	78930	89145	91260	12375	23481	34587
6804	7911	8937	9153	1269	2376	3483	4590
810	918	945	162	270	378	486	594
18	27	54	63	72	81	90	99

Von unten nach oben gelesen, erhält man die Zahlenfolge von der zweistelligen Startzahl zur neunstelligen Zahl mit neun verschiedenen Ziffern ungleich 0.

2. Lösung

Zunächst wird untersucht, wie sich die Quersumme einer Zahl bei Anwendung der Vorschrift (V): *Man subtrahiert eine einstellige natürliche Zahl e ungleich 0 und setzt diese vor die Differenz*, ändert.

Dazu werden folgende Fälle, die bei der Subtraktion der Zahl *e* auftreten können, untersucht.

1. Fall: *Es kommt zu keinem Zehnerübergang.*

Hier bleibt die **Quersumme** offensichtlich **gleich**, denn die letzte Ziffer verringert sich um die Zahl *e*, diese wird aber als neue Ziffer vor der Zahl wieder zur Quersumme dazugezählt.

2. Fall: *Es kommt zu einem Zehnerübergang, ohne dass sich die Hunderterziffer ändert.*

D.h.: $a = \overline{a_n.....a_3a_2a_1} \xrightarrow{(V)} \overline{e\,a_n.....a_3a_2a_1} - e = \overline{e\,a_n.....a_3a_2'a_1'} = a'$ Hier gilt für die Ziffern der neuen Zahl: $a_1' = 10 + a_1 - e$ und $a_2' = a_2 - 1$. Dabei ist $a_2 \geq 1$, andernfalls würde sich die Hunderterstelle ändern. Die **Quersumme** der Zahl **erhöht** sich also um $10 - e - 1 + e =$ **9**.

3. Fall: *Es kommt es zu einem Zehnerübergang, bei dem sich auch die Hunderterziffer ändert, jedoch die Tausenderziffer gleich bleibt.*

Dies ist offensichtlich nur der Fall, wenn $a_2 = 0$ und $a_3 \geq 1$ gilt:

$a = \overline{a_n.....a_3a_2a_1} \xrightarrow{(V)} \overline{e\,a_n.....a_3a_2a_1} - e = \overline{e\,a_n.....a_4a_3'a_2'a_1'} = a'$.

Hier gilt für die Ziffern der neuen Zahl: $a_1' = 10 + a_1 - e$ und $a_2' = 9$, da $a_2 = 0$ und $a_3' = a_3 - 1$. Dabei ist $a_3 \geq 1$, andernfalls müsste sich die Tausenderstelle ändern, was hier ausgeschlossen ist.

Die **Quersumme** der Zahl **erhöht** sich also um $10 - e + 9 - 1 + e =$ **18**.

Weitere *Fälle* (Änderung auch der Tausenderziffer) können in dem Verfahren von einer zweistelligen Zahl zu einer neunstelligen Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 nicht auftreten. Dies kann wie folgt begründet werden: Aus jeder dreistelligen Zahl ($a_3 \geq 1$) wird mit dem Verfahren sicherlich spätestens nach 7 Schritten eine neunstellige Zahl. (In einem Schritt z.B. $100 \xrightarrow{(V)} 793$ könnte die Stellenzahl zunächst noch gleich bleiben). Nach sieben Schritten kann aber in der Summe maximal $7 \cdot 9 = 63$ von der Zahl, die aus den letzten drei Ziffern ($a_3 \geq 1$) gebildet wird, abgezogen worden sein. Dies reicht sicher nicht aus, um in einem der Schritte einen Tausenderübergang zu bewirken.

Nun folgt die eigentliche Untersuchung der notwendigen **Quersummenerhöhung**:

Eine neunstellige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 hat als Quersumme 45 und ist deshalb durch 9 teilbar. Da sich die Quersumme ausgehend von der Startzahl nur um 9 oder 18 erhöhen kann, müssen auch die möglichen zweistelligen Startzahlen durch 9 teilbar sein. Für die Startzahlen kommen also nur 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 und 99 in Frage. Alle diese Zahlen außer 99 haben die Quersumme 9. Bei diesen Zahlen muss also bei der mehrfachen Anwendung des Verfahrens (V) die **Quer-**

summe um insgesamt 36 erhöht werden. Dies ist nur möglich durch 4-maliges Reduzieren der Zehnerziffer (2. Fall: Quersumme **+9**) bzw. 2-maliges Reduzieren der Zehnerziffer (**+9**) und einmaliges Überschreiten von Zehner- und gleichzeitig auch der Hunderterziffer (3. Fall: Quersumme **+18**).

Es wird nun gezeigt, dass **45 und 36 nicht als Startzahlen** in Frage kommen.

Bei der **Startzahl 45** muss viermal die Zehnerziffer reduziert werden, damit die Quersumme 45 erreicht wird. Dann ist aber die Zehnerstelle 0, was nicht mit den Bedingungen der Zielzahl vereinbar ist.

Bei der **Startzahl 36** wird nach dreimaligem Reduzieren der Zehnerziffer auch beim vierten mal die Hunderterziffer überschritten, was es nicht ermöglicht, 4 mal die Quersumme um 9 zu erhöhen.

Für die anderen möglichen Startzahlen findet man z.B. die in der Tabelle bei Lösung 1 angegebenen Verfahrensschritte, die zu neunstelligen Zahlen mit lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 führen.

18, 27, 54, 63, 72, 81, 90, 99 sind also alle Zahlen, die die geforderte Eigenschaft besitzen.

Aufgabe 4

In einem Dreieck ABC gilt für das Verhältnis der Seitenlängen a : b : c = 3 : 4 : 5 .

Zeige, dass der Punkt B, der Umkreismittelpunkt U und der Inkreismittelpunkt I ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

Vorüberlegungen

Wenn für ein Dreieck ABC gilt a : b : c = 3 : 4 : 5, dann ist es nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras ein rechtwinkliges Dreieck und der rechte Winkel hat den Scheitel C.

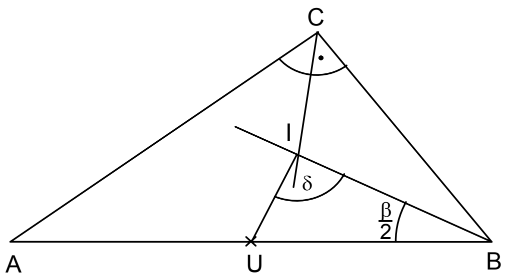
Der Umkreismittelpunkt im rechtwinkligen Dreieck ist der Mittelpunkt des Thaleskreises über der Hypotenuse. Für diesen Punkt U gilt daher: $U \in AB$ und $|AU| = |UB|$.

Der Inkreismittelpunkt I eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Deshalb hat der Winkel IBU die Weite $\frac{1}{2}\beta$.

Wenn es im Dreieck UBI einen rechten Winkel gibt, dann kann B nicht der Scheitel dieses rechten Winkels sein, da $\beta < 90°$ und daher erst recht $\frac{1}{2}\beta < 90°$.

Der rechte Winkel im Dreieck UBI kann auch nicht den Scheitel U haben, denn dann läge I auf der Mittelsenkrechten von AB und zugleich auf der Winkelhalbierenden von Winkel ACB, das Dreieck ABC wäre dann gleichschenklig-rechtwinklig. Dies ist aber auf Grund der gegebenen Seitenlängen des Dreiecks ABC nicht der Fall.

Demnach kann das Dreieck UBI - wenn überhaupt - den rechten Winkel nur beim Scheitel I haben.



Bestimmung des Inkreisradius ρ

Wegen der Voraussetzung a : b : c = 3 : 4 : 5 gibt es eine Streckenlänge u, für die gilt:

a = 3u, b = 4u, c = 5u.

Da U der Mittelpunkt von AB ist, gilt: $|AU| = |BU| = \frac{c}{2} = 2{,}5u$.

Das Viereck FIEC ist ein Rechteck, denn die Berührradien IF und IE sind orthogonal zu den Seiten AC und BC und der Winkel ACB ist nach Aufgabenstellung und den Vorüberlegungen ein rechter Winkel. Da die Berührradien gleich lang sind, hat das Rechteck benachbarte Seiten gleicher Länge ρ und ist daher sogar ein Quadrat.

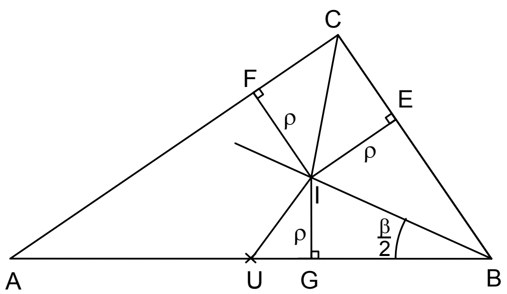
Folglich gilt: $|CF| = |CE| = \rho$.

Die Strecken BG und BE sind Tangentenabschnitte von B aus an den Inkreis und daher gleich lang:

$|BG| = |BE|$.

Wegen $|BE| = |BC| - |CE| = 3u - \rho$ folgt daraus:

$|BG| = 3u - \rho$.



Somit gilt: $|UG| = |BU| - |BG|$

$|UG| = 2{,}5u - (3u - \rho)$

$|UG| = \rho - 0{,}5u.$

Andererseits sind auch AF und AG Tangentenabschnitte von A aus an den Inkreis und daher:

$|AF| = |AG| = 4u - \rho$.

Damit erhält man: $|UG| = |AG| - |AU|$

$|UG| = 4u - \rho - 2{,}5u$

$|UG| = 1{,}5u - \rho.$

Aus den beiden Darstellungen von $|UG|$ folgt sofort $\rho = u$ und daraus $|UG| = 0{,}5u$, $|BG| = 2u$.

1. Lösung

Das rechtwinklige Dreieck UGI hat die Kathetenlängen $|UG| = 0{,}5u$ und $|GI| = u$, das rechtwinklige Dreieck GBI die Kathetenlängen $|GI| = u$ und $|BG| = 2u$. Diese beiden Dreiecke sind also ähnlich. In ähnlichen Dreiecken haben gleichliegende Winkel die gleiche Weite.

Daher gilt: $w(UIG) = w(IBG) = \frac{\beta}{2}$.

Deshalb gilt: $w(UIB) = w(UIG) + w(GIB) = \frac{\beta}{2} + (90^\circ - \frac{\beta}{2}) = 90^\circ$.

Dies war zu zeigen.

2. Lösung

Im rechtwinkligen Dreieck UGI gilt mit dem Satz von Pythagoras:

$|UI|^2 = |UG|^2 + |GI|^2 = (0{,}5u)^2 + u^2 = 1{,}25u^2$.

Im rechtwinkligen Dreieck GBI erhält man entsprechend:

$|BI|^2 = |BG|^2 + |GI|^2 = (2u)^2 + u^2 = 5u^2$.

Zusammenfassen führt auf:

$|UI|^2 + |BI|^2 = 6{,}25u^2 = (2{,}5u)^2 = |UB|^2$.

Mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras ist das Dreieck UBI rechtwinklig bei I.

Dies war zu zeigen.

Bemerkungen:

Der Inkreisradius ρ eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a und b sowie der Hypotenusenlänge c kann elementargeometrisch bestimmt werden zu $\rho = \frac{ab}{a+b+c}$.

(Dies kann man selbst überlegen oder Formelsammlungen bzw. gängige Lehrbücher heranziehen.)

Mit $a = 3u, b = 4u$ und $c = 5u$ folgt daraus sofort $\rho = u$. Dann lässt sich wie oben weiter argumentieren.

3. Lösung (ohne Verwendung des Inkreisradius)

Wie in der Vorüberlegung zu den ersten beiden Lösungen gezeigt, folgt aus der Vorgabe
$a : b : c = 3 : 4 : 5$

(1) Es gibt eine Streckenlänge u, für die gilt: $a = 3u$, $b = 4u$, $c = 5u$.

(2) $\gamma = w(ACB) = 90°$

(3) $U \in AB$ mit $|AU| = |UB|$

Aus (1) und (3) folgt:

(4) $|AU| = \frac{1}{2}|AB| = 2{,}5u$.

Aus (2) folgt wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC:

(5) $\alpha + \beta = 180° - \gamma = 90°$

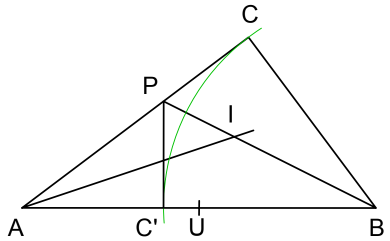
Da der Inkreismittelpunkt I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck ABC ist, folgt mit (5) für den Winkel AIB:

(6) $w(AIB) = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 180° - \frac{90°}{2} = 135°$.

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels β mit der Dreiecksseite AC werde mit P bezeichnet. Für den Nebenwinkel PIA des Winkels AIB gilt dann mit (6):

(7) $w(PIA) = 180° - w(AIB) = 180° - 135° = 45°$.

Im folgenden zeigen wir, dass $|AP| = 2{,}5u$. Wir spiegeln dazu die Dreiecksseite BC an der Winkelhalbierenden des Winkels β. C wird dabei so auf $C' \in AB$ abgebildet, dass (mit (1)) $|C'B| = |CB| = 3u$ gilt. Mit (1): $|AB| = 5u$ folgt, dass



(8) $|AC'| = 5u - 3u = 2u$ ist.

Da der Winkel PCB auf den Winkel BC'P abgebildet wird, gilt mit (2) $w(BC'P) = w(PCB) = w(ACB) = 90°$.

Mit $w(C'AP) = \alpha = w(BAC)$ folgt nun, dass das Dreieck AC'P ähnlich zum Dreieck ABC ist, da beide Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen. Es entsprechen sich hierbei die Seiten AC' und AC sowie die Seiten AP und AB.

Aus (1) und (8) lässt sich der Ähnlichkeitsfaktor bestimmen: $\frac{|AC'|}{|AC|} = \frac{2u}{4u} = \frac{1}{2}$.

Daraus folgt:

(9) $|AP| = \frac{1}{2}|AB| = 2{,}5u$.

Aus (4) und (9) folgt nun $|AP| = 2{,}5u = |AU|$. Da der Inkreismittelpunkt I auf der Winkelhalbierenden des Winkels α liegt, folgt daraus, dass das Viereck AUIP ein Drachenviereck ist, also symmetrisch zu AI ist.

Mit (7) folgt nun:

$w(AIU) = w(PIA) = 45°$ und mit (6) $w(UIB) = w(AIB) - w(AIU) = 135° - 45° = 90°$.

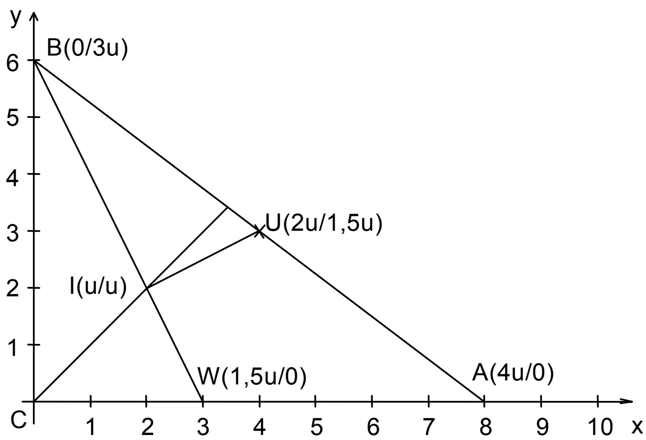
Das Dreieck UBI ist also rechtwinklig.

4. Lösung

Durch Rechnen im Koordinatensystem lässt sich dieses Ergebnis auch gewinnen. Dazu wird das rechtwinklige Dreieck so in ein Achsenkreuz gelegt, dass C = O, A(b/0) und B(0/a) ist.

Der Umkreismittelpunkt U hat dann die Koordinaten $U(\frac{b}{2}/\frac{a}{2})$.

Der Inkreismittelpunkt I liegt einerseits auf der Winkelhalbierenden des rechten Winkels mit der Gleichung y = x, andererseits auf der Winkelhalbierenden von Winkel CBA, die die Seite AC (und damit die x-Achse) im Punkt W schneidet.



Nach dem bekannten Satz über Winkelhalbierende des Dreiecks „Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks schneidet die Gegenseite des Winkels im Verhältnis der anliegenden Seiten“ erhält man in diesem Beispiel mit a = 3u, b = 4u und c = 5u, dass die Strecke CA im Verhältnis 3 : 5 geschnitten wird.

Der Punkt W hat deshalb die Koordinaten W(1,5u/0).

Damit lässt sich die Gleichung der Geraden durch die Punkte B und W aufschreiben: $y = -\frac{a+c}{b}x + a$.

Mit $a = 3u, b = 4u$ und $c = 5u$ folgt daraus $y = -2x + 3u$. Schneiden der beiden Geraden führt auf I(u/u).

Nun kann man wie in den ersten beiden Lösungen weiter argumentieren.