2002

Runde 1

Aufgabe 1

Schreibe jede der Zahlen 1, 2, 3, …, 15 auf je eine Karteikarte.

Lege diese Karten so in eine Reihe, dass die Summe der Zahlen auf zwei benachbarten Karten immer eine Quadratzahl ist.

Wie viele solcher Anordnungen sind möglich?

1. Lösung

Die auftretenden Quadratzahlen sind 4, 9, 16 und 25. Man zerlegt sie in zwei verschiedene Summanden und schreibt alle diese Paare auf Kärtchen (wie bei Dominosteinen). Eine Lösung der Aufgabe ergibt sich, wenn eine Kette aus Kärtchen gemäß der Anlegeregel für Dominosteine (gleiche Zahlen stoßen aufeinander) gebildet werden kann.

Die auftretenden Paare sind:

(1/3), (1/8), (1/15), (2/7), (2/14), (3/1), (3/6), (3/13), (4/5), (4/12), (5/4), (5/11), (6/3), (6/10), (7/2), (7/9), (8/1), (9/7), (10/6), (10/15), (11/5), (11/14), (12/4), (12/13), (13/3), (13/12), (14/2), (14/11), (15/1), (15/10).

Die Zahlen 8 und 9 kommen jeweils nur einmal als erste (oder als zweite) Zahl in einem Paar vor. Es ist deshalb sinnvoll, mit (8/1) oder (9/7) zu beginnen, da dann kein Anlegen nach links möglich ist.

Beim Start mit (9,7) ergibt sich zwangsläufig

(**9**/7) (**7**/2) (**2**/14) (**14**/11) (**11**/5) (**5**/4) (**4**/12) (**12**/13) (**13**/3).

Da jede fettgedruckte Zahl nur einmal in der Schlussreihe vorkommen darf, werden nun alle weiteren Kärtchen mit diesen Zahlen entfernt.

Übrig bleiben: (1/3), (1/8), (1/15), (3/1), (3/6), (6/3), (6/10), (8/1), (10/6), (10/15), (15/1), (15/10)

Die mögliche Fortsetzung mit (3/1) und (1/8) führt zum Abbruch, es können nicht alle Zahlen verwendet werden. Übrig bleiben die Zahlen 6, 10 und 15.

Die mögliche Fortsetzung mit (3/1) und (1/15) ergibt zwangsläufig … (13/3) (3/1) (1/15) (15/10) (10/6) und führt zum Abbruch, es können nicht alle Zahlen verwendet werden. In diesem Fall bleibt die Zahl 8 übrig.

Also bleibt als Fortsetzung nur … (13/3) (**3**/6) (**6**/10) (**10**/15) (**15**/1) (**1**/**8**).

Damit erhalten wir die Zahlenreihe **9 7 2 14 11 5 4 12 13 3 6 10 15 1 8**.

Da sie auch rückwärts gelesen werden kann, ergeben sich zwei Lösungen der Aufgabe.

Der Beginn mit (8/1) führt auf eine vergleichbare Argumentation.

Jedoch führt auch der Beginn mit anderen Karten zum Ziel.

Als Beispiel: Beginn mit (15/10).

Nach rechts ist nun nur die Fortsetzung (10/6) und (6/3) möglich. Dies erzwingt nach links die Fortsetzung (1/15) und (8/1). Es entsteht: (**8**/1) (**1**/15) (**15**/10) (**10**/6) (**6**/3).

Übrig bleiben: (2/7), (2/14), (3/13), (4/5), (4/12), (5/4), (5/11), (7/2), (7/9), (9/7), (11/5), (11/14), (12/4), (12/13), (13/3), (13/12), (14/2), (14/11)

Die Fortsetzung ist nur noch rechts möglich: … (6/3) (**3**/13) (**13**/12) (**12**/4) (**4**/5)

Übrig bleiben: (2/7), (2/14), (5/11), (7/2), (7/9), (9/7), (11/5), (11/14), (14/2), (14/11).

Die Fortsetzung ergibt: … (4/5) (**5**/11) (**11**/14) (**14**/2) (**2**/7) (**7**/**9**).

Man erhält dieselbe Lösung wie oben.

2. Lösung

Notiert man alle Zahlenpaare mit verschiedenen Summanden aus dem vorgegebenen Zahlbereich, die addiert eine Quadratzahl ergeben, so erhält man (bis auf Kommutativität):

1 + 3 = 4	1 + 8 = 9	1 + 15 = 16	2 + 7 = 9	2 + 14 = 16
3 + 6 = 9	3 + 13 = 16	4 + 5 = 9	4 + 12 = 16	5 + 11 = 16
6 + 10 = 16	7 + 9 = 16	10 + 15 = 2511 + 14 = 2512 + 13 = 25		

Diese Aufstellung zeigt, dass die Zahlen 8 und 9 jeweils nur in einem einzigen Paar vorkommen. Diese beiden Zahlen müssen am Anfang und am Ende der Zahlenfolge sein.

Beginnen wir die Kette mit der Zahl 9, so folgt zwangsläufig 7, auf 7 folgt zwangsläufig die 2, auf 2 folgt zwangsläufig die 14. Danach folgen zwangsläufig die Zahlen 11, 5, 4, 12, 13 und 3.

Auf die Zahl 3 kann nun die Zahl 6 oder die Zahl 1 folgen.

Das nachfolgende Schema zeigt den bisher dargestellten und den weiteren Verlauf.

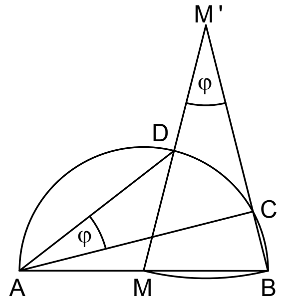
$$9 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2 \longrightarrow 14 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 3 \begin{cases} \nearrow 6 \longrightarrow 10 \longrightarrow 15 \longrightarrow 1 \longrightarrow 8 \\ \longrightarrow 1 \longrightarrow 8 \\ \searrow 1 \longrightarrow 15 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6 \end{cases}$$

Aus dieser Darstellung wird deutlich, dass nur im ersten Fall alle 15 Zahlen in der Folge auftreten. Diese Kette kann auch in der umgekehrten Reihenfolge durchlaufen werden. Es gibt also zwei Möglichkeiten.

Aufgabe 2

In der nebenstehenden Figur sind M und M' die Kreismittelpunkte. Die beiden Winkel CAD und MM'B haben das gleiche Winkelmaß φ.

Bestimme φ.



Lösung

(1) Nach den Voraussetzungen ist das Dreieck MBM' gleichschenklig mit der Basis MB, denn es gilt $|MM'| = |BM'|$. Somit sind die Winkel BMM' und M'BM gleich weit.

Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck gilt: w(BMM') = w(M'BM) = $90° - \frac{\varphi}{2}$.

(2) Die Winkel DMA und BMM' sind Nebenwinkel, deshalb folgt mit den Ergebnissen aus (1):

w(DMA) = 180° – w(BMM') = $90° + \frac{\varphi}{2}$.

(3) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit w(ACB) = 90°, da C auf dem Thaleskreis über [AB] liegt. Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck folgt zusammen mit den Ergebnissen aus (1):

w(BAC) = 180° – w(ACB) – w(M'BM) = $90° - \left(90° - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2}$.

(4) Das Dreieck AMD ist nach Aufgabenstellung gleichschenklig mit der Basis AD. Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck folgt mit den Ergebnissen aus (2):

w(MAD) = w(ADM) = $\frac{1}{2} \cdot \left(180° - w(DMA)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(180° - \left(90° + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = 45° - \frac{\varphi}{4}$.

(5) Aus (3) und (4) folgt nun:

$\varphi = w(MAD) - w(BAC) \Leftrightarrow \quad \varphi = \left(45° - \frac{\varphi}{4}\right) - \frac{\varphi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 45° - \frac{3}{4}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{4}\varphi = 45°$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = \frac{180°}{7}}}$.

Alternativ lässt sich (3) auch durch eine Argumentation ohne Verwendung des Satzes von Thales ersetzen.

(3') Die Dreiecke AMC und MBC sind nach Voraussetzung gleichschenklig mit den Basen AC bzw. BC.

Somit gilt w(MAC) = w(ACM) bzw. mit (1) w(MCB) = w(CBM) = w(M'BM) = $90° - \frac{\varphi}{2}$.

Damit folgt wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC:

w(MAC) + w(ACM) + w(MCB) + w(CBM) = 180°, also

$$2 \cdot \left(w(MAC) + 90° - \frac{\varphi}{2} \right) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad w(MAC) = \frac{\varphi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad w(BAC) = \frac{\varphi}{2}.$$

Aufgabe 3

Die Grundfläche eines Prismas ist ein regelmäßiges n-Eck. Addiert man die Anzahl der Flächen- und Raumdiagonalen, so erhält man das Hundertfache der Anzahl der Kanten.

Bestimme n.

1. Lösung (additiv)

In einem n-seitigen Prisma gilt

… für die Kantenzahl k:

Grund- und Deckflächen haben je n Kanten.
Es gibt n Verbindungslinien zwischen Grund- und Deckfläche.
$\Rightarrow \quad k = 3n$

… für die Diagonalenzahl d:

In einem regelmäßigen n-Eck gehen von jeder Ecke genau n – 3 Diagonalen aus, denn zu je zwei Punkten, die nicht nebeneinander liegen, gehört genau eine Diagonale. Da jede Diagonale dabei doppelt gezählt wird, gibt es in einem konvexen n-Eck also genau $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$ Diagonalen.

Von jedem Punkt der Grundfläche gehen genau n – 1 Diagonalen zu Punkten der Deckfläche aus. Es gibt also genau $n \cdot (n-1)$ Diagonalen zwischen Grund- und Deckfläche.

$$d = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3) + n \cdot (n-1) = n^2 - 3n + n^2 - n = 2n^2 - 4n$$

Nach Aufgabenstellung soll $d = 100k$ gelten. Nach den beiden voraus gehenden Abschnitten muss danach $2n^2 - 4n = 100 \cdot 3n$ gelten.

Daraus folgt:

$$2n^2 - 304n = 0$$
$$2n \cdot (n - 152) = 0$$

[n = 0] oder **n = 152**.

2. Lösung (subtraktiv)

Ein Prisma mit einem regelmäßigen n-Eck als Grundfläche hat 2n Ecken. Verbindet man zwei Ecken, so erhält man eine Kante oder eine Flächen- oder Raumdiagonale. Insgesamt kann jede der 2n Ecken mit jeder anderen Ecke verbunden werden, also mit 2n – 1 Ecken. Da jede Verbindungsstrecke **zwei** Punkte verbindet, gibt es $\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n-1)$ Verbindungsstrecken.

Da die Anzahl der Kanten 3n beträgt (je n Kanten für Grund- und Deckfläche sowie n Seitenkanten), gibt es $\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n-1) - 3n$ Flächen- oder Raumdiagonalen.

Die Bedingung, dass die Anzahl der Flächen- oder Raumdiagonalen das Hundertfache der Anzahl der Kanten ist, führt zur Gleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n-1) - 3n = 100 \cdot 3n\,.$$

Lösung dieser Gleichung ergibt:

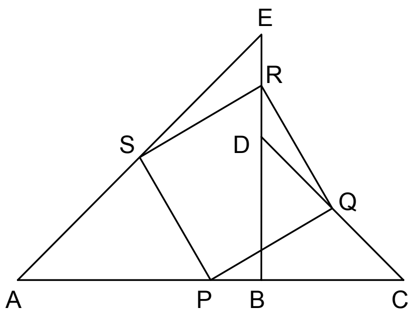
$$2n \cdot (2n-1) = 606n \quad \Rightarrow \quad 4n^2 = 608n\,.$$

Da $n \neq 0$ ist, gilt: **n = 152**.

Aufgabe 4

Zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke unterschiedlicher Größe werden – wie im Bild gezeigt – aneinander gelegt. Die Punkte P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der Strecken AC, CD, DE und EA.

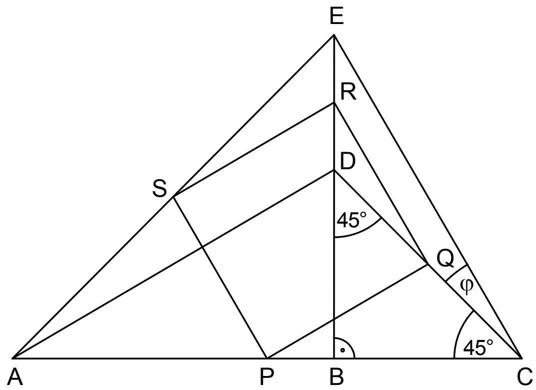
Weise nach, dass das Viereck PQRS ein Quadrat ist.



1. Lösung

Bei der Lösung wird angenommen, dass die Strecke BD kürzer ist als die Strecke BE.

Die Ausgangsfigur wird um die Strecken CE und AD ergänzt.



Die Punkte P, Q, R und S sind nach Aufgabenstellung die Mittelpunkte der Strecken AC, CD, DE und EA.

Im Dreieck CED ist QR Mittelparallele, also parallel zu CE und halb so lang wie CE.

Im Dreieck CEA ist SP Mittelparallele, also parallel zu CE und halb so lang wie CE.

Die Strecken QR und SP sind somit gleich lang und parallel.

Das Viereck QRSP ist also zumindest ein Parallelogramm.

Entsprechend zeigt man $|SR| = |PQ| = \frac{1}{2}|AD|$.

Die Dreiecke ABD und EBC sind kongruent (sws), denn es gilt nach Aufgabenstellung

$|AB| = |EB|$, $|BD| = |BC|$ und w(DBA) = w(CBE) = 90°.

Aus dieser Kongruenz folgt $|AD| = |CE|$.

Daher ist $|PQ| = |QR| = |RS| = |SP|$; das Viereck PQRS ist also eine Raute.

Betrachten wir nun die Winkel in der Figur.

Bezeichnet man die Weite des Winkels ECD mit φ, so gilt w(ECB) = 45° + φ

und wegen der Winkelsumme im Dreieck BCE w(BEC) = 45° – φ.

Wegen der Kongruenz der Dreiecke ABD und EBC gilt: w(ADB) = w(ECB) = 45° + φ.

Aus der Parallelität der Strecken AD und SR bzw. CE und QR ergibt sich daraus:

w(SRQ) = w(SRB) + w(BRQ) = w(ADB) + w(BEC) = 45° + φ + 45° – φ = 90°.

Die Raute PQRS ist deshalb sogar ein Quadrat.

2. Lösung

Bei der Lösung der Aufgabe wird verwendet:

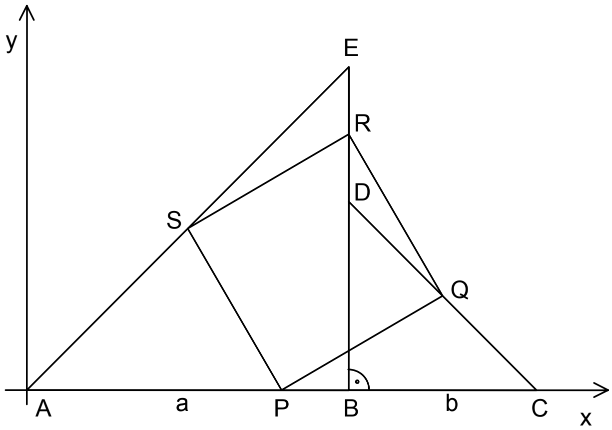
- Im Koordinatensystem werden die Koordinaten des Mittelpunkts M einer Strecke AB mit

  A $(x_A \mid y_A)$ und B $(x_B \mid y_B)$ berechnet mittels

  $$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,\middle|\,\frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

- Die Länge der Strecke AB wird durch Anwendung des Satzes von Pythagoras berechnet mittels

  $$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



Die Figur wird so in ein Koordinatensystem übertragen, dass der Punkt A im Ursprung und der Punkt B (und damit auch C) auf der x – Achse liegen.

Die Strecke AB habe a, die Strecke BC habe b als Längenmaßzahl. Damit erhält man für die Koordinaten der Punkte:

A $(0 \mid 0)$, B $(a \mid 0)$, C $(a + b \mid 0)$, D $(a \mid b)$, E $(a \mid a)$

Für die Mittelpunkte erhält man:

$$P\left(\frac{a+b}{2}\,\middle|\,0\right),\ Q\left(\frac{a+a+b}{2}\,\middle|\,\frac{b+0}{2}\right) = Q\left(a+\frac{1}{2}b\,\middle|\,\frac{1}{2}b\right),$$

$$R\left(\frac{a+a}{2}\,\middle|\,\frac{a+b}{2}\right) = R\left(a\,\middle|\,\frac{a+b}{2}\right),\ S\left(\frac{1}{2}a\,\middle|\,\frac{1}{2}a\right).$$

Für die Längen der Strecken PQ, PS, SR und QR ergibt sich:

$$|PQ| = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}b-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}b-0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}},$$

$$|PS| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a-0\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}},$$

$$|SR| = \sqrt{\left(a-\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}},$$

$$|QR| = \sqrt{\left(a-\left(a+\frac{1}{2}b\right)\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}b\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}}.$$

Es gilt somit: $|PQ| = |PS| = |SR| = |QR|$. $\Rightarrow$ Das Viereck PQRS ist eine Raute.

Für die Länge der Strecke SQ ergibt sich:

$$|SQ| = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}}.$$

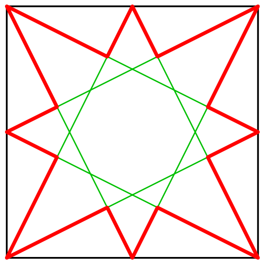
Mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras folgt nun aus

$|PQ|^2 + |PS|^2 = \left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)+\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} = |SQ|^2$, dass der Innenwinkel der Raute PQRS mit dem Scheitel P ein rechter Winkel ist.

PQRS ist somit ein Quadrat.

Aufgabe 5

In einem Quadrat mit der Seitenlänge a sind die Seitenmitten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden. Dadurch entsteht der gekennzeichnete Stern.



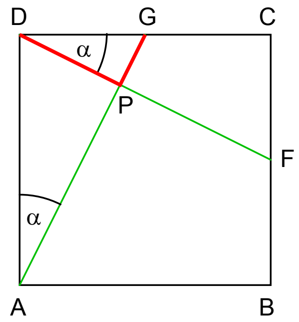
Wie groß ist sein Flächeninhalt in Abhängigkeit von a?

1. Lösung (Pythagoras / Ähnlichkeit)

Der Stern entsteht, indem man von einem Quadrat der Seitenlänge a acht Dreiecke wegschneidet. Aus der Symmetrie der Figur zu den Mittelparallelen und den Diagonalen des vorgegebenen Quadrates folgt, dass diese acht Dreiecke alle kongruent sind.

Daher gilt für den Flächeninhalt des Sterns:

$$A_S = a^2 - 8 \cdot A_{\Delta DPG} \qquad (1).$$



Da $|AD| = |DC|$, $|DG| = |CF|$ und w(ADG) = 90° = w(DCF) ist, ist nach sws das Dreieck AGD kongruent zum Dreieck DFC.

Daher gilt: w(GAD) = w(FDC) = α.

Ferner folgt: w(ADP) = w(ADG) – w(FDC) = 90° – α.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck APD folgt:

w(DPA) = 180° – α – (90° – α) = 90° .

Damit ist auch w(GPD) = 90° (Nebenwinkel).

Die beiden Dreiecke AGD und DPG stimmen in den zwei Winkeln α und 90° überein und sind deshalb ähnlich.

Daher gilt: $A_{\Delta DPG} = \dfrac{|DG|^2}{|AG|^2} \cdot A_{\Delta AGD} \qquad (2).$

Nach dem Satz von Pythagoras ist $|AG|^2 = |AD|^2 + |DG|^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}a^2$.

Eingesetzt in (2) ergibt sich: $A_{\Delta DPG} = \dfrac{\frac{a^2}{4}}{5 \cdot \frac{a^2}{4}} \cdot A_{\Delta AGD} = \dfrac{1}{5} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{20}a^2$.

Mit (1) erhält man: $A_S = a^2 - 8 \cdot \dfrac{1}{20}a^2 = \dfrac{3}{5}a^2$.

2. Lösung (Streifenschar)

Aus dem Unterricht wird als bekannt vorausgesetzt:

1. In einem Dreieck ABC ist die Verbindungsstrecke der beiden Seitenmitten von AC und BC parallel zur Seite AB und halb so lang wie diese. Diese Verbindungsstrecken nennen wir *Mittellinien* des Dreiecks. Für jeden Punkt P auf der Seite AB gilt: Die Mittellinie halbiert die Strecke PC.
2. Mehrere parallele Geraden in gleichem Abstand bilden eine sogenannte *Streifenschar*. Jede Verbindungsstrecke von Punkten der äußeren Geraden wird durch die Streifenschar in gleich lange Teilstrecken geteilt.

Für den Flächeninhalt A des Dreiecks DPG gilt:

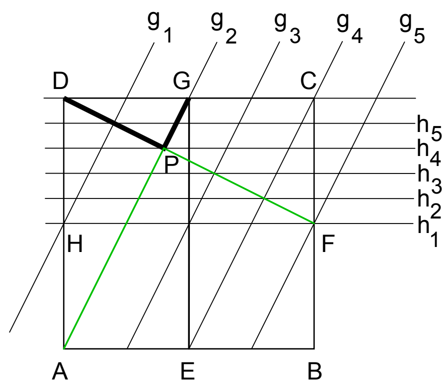
$$A = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a\right) \cdot h ,$$

wobei a die Länge der Quadratseite und h der Abstand des Punktes P von der Seite CD ist.

Die Punkt E, F, G und H sind die Seitenmitten des gegebenen Quadrats. In der folgenden Figur sind die Geraden (AG) = g_2 und (EC) = g_4 parallel. Die Dreiecke AGD, ECG, AEG und EBC sind kongruent.

Bestimmung von h:

g_1 ist Mittellinie des Dreiecks AGD,
g_3 ist Mittellinie des Dreiecks ECG,
g_5 ist Mittellinie des Dreiecks EBC.



Da $g_2 \parallel g_4$ ist, sind die fünf Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 zueinander parallel. Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 zerlegen die Strecken nach Konstruktion in vier gleich lange Teilstrecken. Gleiches gilt für die Geraden g_2, g_3, g_4 und g_5 bezüglich der Strecke AB. Diese fünf Geraden bilden eine Streifenschar, welche die Strecke DF in fünf gleich lange Teilstrecken teilt.

Die Geraden $_5$ sind die Parallelen zur Seite CD durch die Teilungspunkte der Strecke DF. Da diese Strecke in gleich lange Teilstrecken zerlegt ist, bilden auch die Geraden h_1, h_2, h_3, h_4 und h eine Streifenschar, die ihrerseits die Strecke DH in fünf gleich lange Teilstrecken.

Für die Höhe h des Dreiecks DPG gilt somit: $h = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{5} \cdot a$.

Damit erhält man den Flächeninhalt A des Dreiecks DPG: $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot a\right) = \frac{1}{20} \cdot a^2$.

Aus Symmetriegründen sind die acht Dreiecke, die den Stern zu einem Quadrat ergänzen, kongruent. Für den Flächeninhalt A_S des Sterns gilt also: $A_S = a^2 - 8 \cdot A = \frac{3}{5} \cdot a^2$.

Aufgabe 6

101 Kugeln sind fortlaufend von 1 bis 101 nummeriert. Sie werden auf zwei Schalen A und B verteilt. Die Kugel mit der Nummer 40 liegt in A. Sie wird nun in Schale B gelegt. Dadurch erhöht sich in beiden Schalen der Mittelwert der Kugelnummern um 0,25.

Wie viele Kugeln sind anfangs in Schale A gewesen?

1. Lösung

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die folgende Nummerierung gewählt: Es bezeichnet x_0 die Kugel mit der Nummer 40.

Dann liegen anfangs in Schale A die n + 1 Kugeln $x_0, x_1, \dots, x_n$. Entsprechend sind die Kugeln in Schale B fortlaufend mit $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{100}$ bezeichnet.

Die Durchschnittswerte m_A bzw. m_B aller Kugelnummern, die zu Beginn in A bzw. B liegen, lassen sich damit wie folgt angeben: $m_A = \dfrac{40 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}$ bzw. $m_B = \dfrac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{100-n}$.

Es bezeichnen entsprechend M_A und M_B die Durchschnittswerte aller Kugelnummern, nachdem die Kugel mit der Nummer 40 von A nach B gelegt worden ist.

Es ist offenbar: $M_A = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ und $M_B = \dfrac{40 + x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{101-n}$.

Die Mittelwerte M_A und M_B genügen nun laut Angabe den Bedingungen

(1) $M_A = m_A + 0{,}25$ und (2) $M_B = m_B + 0{,}25$

Mit den obigen Darstellungen für m_A, m_B, M_A und M_B ergeben sich daraus die Gleichungen

(I) $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{40 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1} + 0{,}25$ und (II) $\dfrac{40 + x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{101-n} = \dfrac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{100-n} + 0{,}25$.

Nach geschickter Umstellung vereinfachen sich beide Gleichungen schrittweise zu

(Ia) $\dfrac{x_1 + \ldots x_n}{n} - \dfrac{x_1 + \ldots x_n}{n+1} = \dfrac{40}{n+1} + \dfrac{1}{4}$ und (IIa) $\dfrac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{100-n} - \dfrac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{101-n} = \dfrac{40}{101-n} - \dfrac{1}{4}$ bzw.

(Ib) $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n(n+1)} = \dfrac{161+n}{4(n+1)}$ und (IIb) $\dfrac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{(100-n)(101-n)} = \dfrac{59+n}{4(101-n)}$ bzw.

(Ic) $x_1 + \ldots + x_n = \dfrac{n^2 + 161n}{4}$ und (IIc) $x_{n+1} + \ldots + x_{100} = \dfrac{(59+n)(100-n)}{4} = \dfrac{5900 + 41n - n^2}{4}$.

Nun ist $x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{100} = (1 + 2 + \ldots + 100 + 101) - 40 = \dfrac{101 \cdot 102}{2} - 40 = 5111$.

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen (Ic) und (IIc) ergibt sich die Gleichung

$$5111 = \frac{n^2 + 161n}{4} + \frac{5900 + 41n - n^2}{4}.$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit 4 und weiterer Vereinfachung erhalten wir schließlich

$20444 = n^2 + 161n + 5900 + 41n - n^2$ bzw. $14544 = 202n$ und damit $\mathbf{n = 72}$.

Zu Beginn sind also 73 Kugeln in Schale A gelegen.

2. Lösung

Aus der Angabe lässt sich folgendes entnehmen:

SCHALE	**A**	**B**	
VORHER:			
Anzahl an Kugeln:	a	b	wobei a + b = 101
Summe der Kugelnummern:	s_A	s_B	wobei $s_A + s_B = 1+2+\ldots+101 = \frac{101\cdot 102}{2} = 5151$
Mittelwert der Kugelnummern:	$m_A = \frac{s_A}{a}$	$m_B = \frac{s_B}{b}$	
NACHHER:			
Anzahl an Kugeln:	a - 1	b + 1	
Summe der Kugelnummern:	$s_A - 40$	$s_B + 40$	
Mittelwert der Kugelnummern:	$M_A = \frac{s_A - 40}{a - 1}$	$M_B = \frac{s_B + 40}{b+1}$	
BEDINGUNG:	(1) $M_A = m_A + 0{,}25$	und (2) $M_B = m_B + 0{,}25$	

Dies führt auf folgendes Gleichungssystem:

(I) $\frac{s_A - 40}{a-1} = \frac{s_A}{a} + 0{,}25$ und (II) $\frac{5151 - s_A + 40}{101 - a + 1} = \frac{5151 - s_A}{101 - a} + 0{,}25.$

Durch Umformen erhält man:

(Ia) $a \cdot s_A - 40a = a \cdot s_A - s_A + 0{,}25a^2 - 0{,}25a$ und (IIa) $524291 - 101 \cdot s_A - 5191a + a \cdot s_A =$
$525402 - 102 \cdot s_A - 5151a + a \cdot s_A$
$+2575{,}5 - 50{,}75a + 0{,}25a^2$ bzw.

(Ib) $s_A = 39{,}75a + 0{,}25a^2$ und (IIb) $s_A = 3686{,}5 - 10{,}75a + 0{,}25a^2$.

Gleichsetzen von Gleichung (Ib) und (IIb) ergibt nach Vereinfachung:

$50{,}5a = 3686{,}5 \Rightarrow$ **$a = 73$**.

Anfangs waren also 73 Kugeln in Schale A.