2001

Runde 2

Aufgabe 1

In einem Viereck ABCD sind die Seiten AB, BC und CD gleich lang. Die Seite DA hat die gleiche Länge wie die Diagonale DB. Diese Diagonale halbiert den Winkel ADC.

Wie groß können die Innenwinkel eines solchen Vierecks sein?

1. Lösung

Nach den Voraussetzungen ist das Dreieck BCD gleichschenklig mit der Basis BD, denn es gilt

$|BC| = |DC|$.

Somit sind die Winkel CBD und BDC gleich weit:

$w(CBD) = w(BDC) = \varphi$.

Da die Diagonale DB den Winkel ADC halbiert, gilt

$w(ADB) = w(BDC) = \varphi$.

Die Geraden (BC) und (AD) schließen mit der Diagonalen BD Winkel der gleichen Weite ein und sind nach der Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an sich schneidenden Geraden deshalb zueinander parallel.

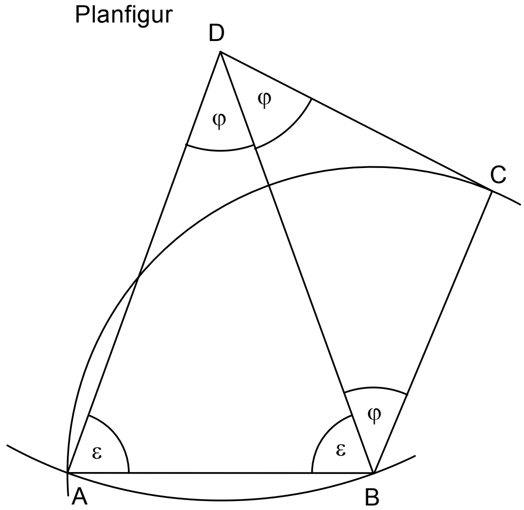
Das Dreieck ABD ist nach Aufgabenstellung ebenfalls gleichschenklig mit der Basis AB.

Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck gilt

$\varphi + 2\varepsilon = 180°$.

Im Viereck ABCD sind die Seiten BC und AD parallel und die Seiten AB und CD gleich lang. Das Viereck ABCD ist deshalb entweder ein gleichschenkliges Trapez oder ein Parallelogramm.

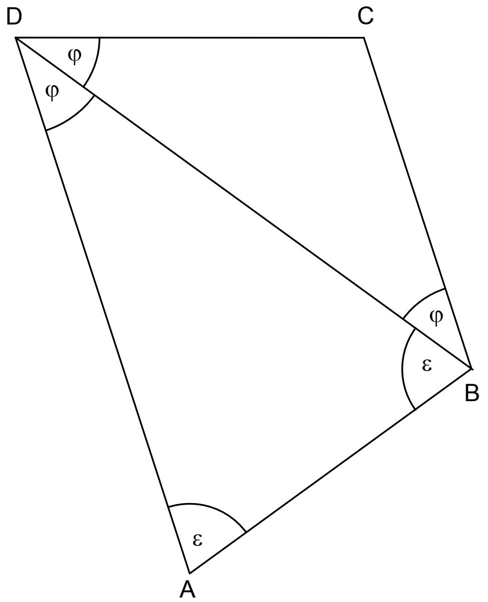
Planfigur



Ist ABCD ein gleichschenkliges Trapez mit der Basis AD, so sind die Basiswinkel BAD und ADC gleich weit.

Aus $\varepsilon = 2\varphi \quad \wedge \quad \varphi + 2\varepsilon = 180°$ folgt

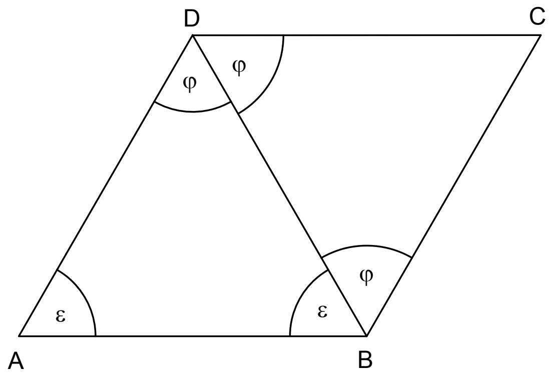
$\varphi = 36°$, $\varepsilon = 72°$.



Ist ABCD ein Parallelogramm, dann ergänzen sich die Winkel BAD und ADC zu 180°.

Aus $\varepsilon = 180° - 2\varphi \quad \wedge \quad \varphi + 2\varepsilon = 180°$ folgt

$\varphi = 60°$, $\varepsilon = 60°$.



2. Lösung

Nach Aufgabenstellung gilt |AB| = |BC| = |CD| =a und |AD| = |DB| = d. Außerdem ist die Diagonale DB Winkelhalbierende im Viereck.

Für die Längen a und d gilt stets genau eine der folgenden Aussagen:

$a < d$ oder $a = d$ oder $a > d$.

Da die Diagonale DB nach Aufgabenstellung die Winkelhalbierende des Vierecks ist, ist die Bildgerade von (DC) bei der Spiegelung an (DB) die Gerade (DA) und umgekehrt.

Im ersten oben genannten Fall liegt der Bildpunkt C' von C bei der Spiegelung an (DB) auf der Strecke AD.

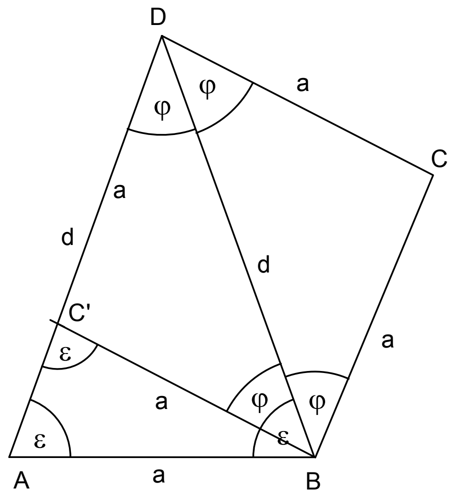
Das Viereck C'BCD ist eine Raute, da alle vier Seiten die Länge a haben.

Die beiden Dreiecke ABD und C'AB sind gleichschenklig mit dem gemeinsamen Winkel BAD bzw. BAC' als Basiswinkel. Deshalb sind die Winkel an der Spitze ebenfalls gleich groß. Es gilt also w(C'BA) = w(ADB) = φ

Daraus folgt $\varepsilon = 2\varphi$.

Im Dreieck ABD gilt für die Winkelsumme demnach $2\varphi + 2\varphi + \varphi = 180°$, also $5\varphi = 180°$, d.h. $\varphi = 36°$.

Die Innenwinkel in diesem Viereck haben die Maße 72°, 108°, 108° und 72°. Das Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez.

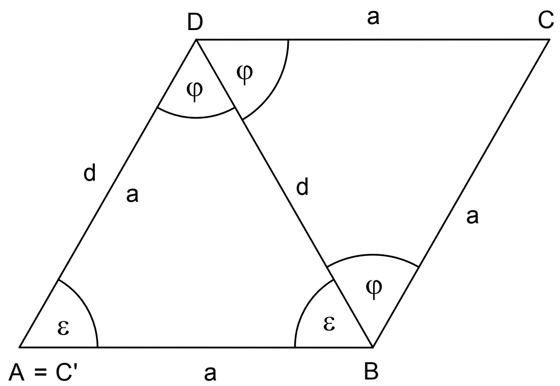


Im zweiten Fall stimmt der Bildpunkt C' von C bei der Spiegelung an (DB) wegen

|DC| = |DC'| = |DA| = a

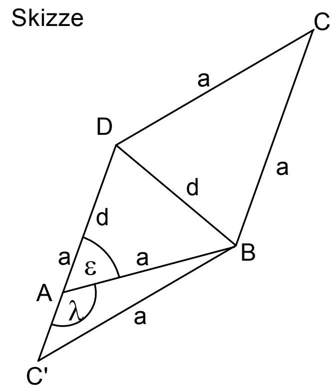
mit dem Punkt A überein.

Wegen d = |DB| = |DA| = |DC'| = |DC| = a sind die Teildreiecke ABD und BCD gleichseitig. Das Viereck ABCD ist eine Raute mit den Innenwinkeln 60°, 120°, 60° und 120°.



Der oben angegebene dritte Fall ist nicht möglich. Zur Begründung betrachten wir die folgende Skizze.

Das Dreieck BCD wird an der Winkelhalbierenden DB des Vierecks ABCD gespiegelt. Da d < a gilt, liegt A auf der Strecke DC'. Nach Aufgabenstellung und da Längenmaße bei einer Spiegelung erhalten bleiben, würden die in der nebenstehenden Skizze angegebenen Seitenlängen gelten.



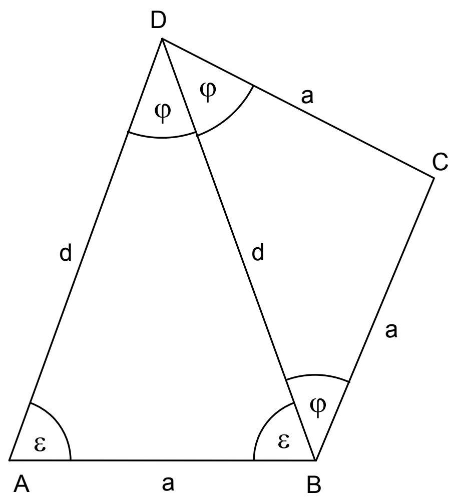
Die Dreiecke AC'B und ABD wären gleichschenklig mit den Grundseiten AC' bzw. AB und den Basiswinkeln BC'A und C'AB bzw. DAB und BAD.

Als Basiswinkel in einem gleichschenkligen Dreieck sind diese Winkel kleiner als 90°. Es würde also $\varepsilon < 90°$ und $\lambda < 90°$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\varepsilon + \lambda = 180°$.

Es gibt also nur die beiden oben bereits genannten Vierecke.

3. Lösung

In der nebenstehenden Skizze sind die Eigenschaften aus der Aufgabenstellung bereits eingetragen. Außerdem wurde bei der Angabe der Winkelmaße ausgenutzt, dass die Dreiecke ABD und DBC gleichschenklig sind.



Nach dem Sinussatz gilt im Dreieck ABD $\dfrac{d}{\sin\varepsilon} = \dfrac{a}{\sin\varphi}$

und im Dreieck DBC $\dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{d}{\sin(180° - 2\varphi)}$

Daraus folgt $\sin\varepsilon = \sin(180° - 2\varphi)$.

Da für die Basiswinkel ε und φ in den gleichschenkligen Dreiecken ABD und DBC die Abschätzung $0° < \varepsilon, \varphi < 90°$ gilt, ist die Beziehung zwischen den Sinuswerten erfüllt für

$$\varepsilon = 180° - 2\varphi \text{ oder } \varepsilon = 180° - (180° - 2\varphi), \text{ d.h. } \varepsilon = 2\varphi.$$

Aus der Winkelsumme im Dreieck ABD folgt für den ersten Fall

$$180° - 2\varphi + 180° - 2\varphi + \varphi = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 3\varphi = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 60°$$

Aus der Winkelsumme im Dreieck BCD erhalten wir für den Winkel DCB die Weite 60°.

Die Innenwinkel des Vierecks ABCD sind in diesem Fall 60°, 120°, 60° und 120°.

[Anmerkung: Das Viereck ist eine spezielle Raute, die aus zwei gleichseitigen Dreiecken ABD und BCD zusammengesetzt ist.]

Aus der Winkelsumme im Dreieck ABD folgt für den zweiten Fall:

$$2\varphi + 2\varphi + \varphi = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 5\varphi = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 36°$$

Aus der Winkelsumme im Dreieck BCD erhalten wir für den Winkel DCB die Weite 108°.

Die Innenwinkel des Vierecks ABCD sind in diesem Fall 72°, 108°, 108° und 72°.

[Anmerkung: Das Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez.]

Aufgabe 2

Zeige: Ist eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Summe zweier verschiedener positiver Quadratzahlen, so hat auch jede Potenz n^k $(k \in \mathbb{N}, k > 0)$ diese Eigenschaft.

1. Lösung

Nach der Aufgabenstellung ist die natürliche Zahl n die Summe von zwei verschiedenen positiven Quadratzahlen. Es gibt also natürliche Zahlen $a > b > 0$ mit $n = a^2 + b^2$.

Als erstes wollen wir zeigen, dass auch n^2 als Summe von zwei unterschiedlichen positiven Quadratzahlen dargestellt werden kann.

Es ist $n^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2$ eine Summe von zwei Quadratzahlen. Da $0 < b < a$ gilt, sind die beiden Zahlen positiv. Wären die beiden Quadratzahlen gleich, so wären auch die beiden Grundzahlen gleich, da beide positiv sind. Mit $x = 2ab = a^2 - b^2$ wäre $n^2 = 2x^2$ und somit wäre $\sqrt{2} = \frac{n}{x}$ eine rationale Zahl, was bekanntlich nicht der Fall ist.

Wir wissen also jetzt, dass es natürliche Zahlen $c > d > 0$ gibt, mit $n^2 = c^2 + d^2$.

Aus n und n^2 können wir durch fortgesetzte Multiplikation mit n^2 jede Potenz von n mit natürlichen Exponenten erhalten, denn aus n erhalten wir durch diese Multiplikation $n^3, n^5, n^7, \dots$ bzw. n^2 die Potenzen $n^4, n^6, n^8, \dots$.

Es wird jetzt gezeigt, dass bei der Multiplikation mit n^2 die Darstellbarkeit einer Potenz n^k als Summe aus zwei verschiedenen positiven Quadratzahlen erhalten bleibt. Dazu ist zu zeigen, dass aus der Darstellung von n^k als Summe von zwei verschiedenen positiven Quadratzahlen, also aus $n^k = x^2 + y^2$ mit $x > y > 0$, die Darstellung von $n^k \cdot n^2$ als Summe von zwei verschiedenen positiven Quadratzahlen folgt

$$n^k \cdot n^2 = \left(x^2 + y^2\right) \cdot n^2 = x^2 \cdot n^2 + y^2 \cdot n^2 = (x \cdot n)^2 + (y \cdot n)^2 .$$

Die Produkte $x \cdot n$ und $y \cdot n$ sind wegen $x > y > 0$ verschieden und positiv.

Damit ist die Darstellbarkeit für alle Potenzen von n als Summe von zwei verschiedenen positiven Quadratzahlen mit natürlichen Exponenten gezeigt.

2. Lösung

Wie bei der ersten Lösung wird zunächst gezeigt, dass n^2 als Summe von zwei verschiedenen, positiven Quadratzahlen dargestellt werden kann, wenn die natürliche Zahl n diese Eigenschaft besitzt.

Jetzt untersuchen wir als nächstes, ob wir damit auch n^3 als Summe von zwei verschiedenen positiven Quadratzahlen darstellen können.

Es ist

$$\begin{aligned}
n^3 = n \cdot n^2 &= (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) \\
&= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\
&= (ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2adbc + (bc)^2 \qquad \text{(I)} \\
&= (ac)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2adbc + (bc)^2. \qquad \text{(II)}
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich zwei Darstellungen für n^3 als Summe von Quadraten:

(I) $n^3 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ (II) $n^3 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass mindestens in einer der beiden Darstellungen die beiden Quadratzahlen positiv, d.h. ungleich 0, und verschieden sind.

Voraussetzung für positive Quadratzahlen

Für die folgenden Überlegungen gilt weiterhin $a > b > 0$ und $c > d > 0$.
Damit sind die Summen $ac + bd$ und $ad + bc$ positiv und damit auch die zugehörigen Quadrate.

Quadrate aus den Darstellungen I und II können also nur dann 0 sein, wenn $ad - bc = 0$ bzw. $ac - bd = 0$ ist. Wegen $a > b$ und $c > d$ ist $ac > bd$ und damit $ac - bd > 0$.

Von den vier Quadratzahlen in den beiden Darstellungen I und II kann allenfalls $(ad - bc)^2$ den Wert 0 haben. In der Darstellung II sind stets beide Summanden positiv.

Voraussetzung für verschiedene Summanden

Betrachten wir zunächst die erste Darstellung.

Wäre $(ac + bd)^2 = (ad - bc)^2$, so würde $(ac + bd) = (ad - bc)$ (*) oder $(ac + bd) = -(ad - bc)$ (**) gelten.

Durch Umformen erhalten wir

(*) $a \cdot (c - d) = -b \cdot (c + d)$ (**) $(a - b) \cdot c = -d \cdot (a + b)$

In beiden Fällen steht auf der linken Seite dieser Gleichung wegen $c > d$ bzw. $a > c$ eine positive Zahl, rechts eine negative, also ergibt sich ein Widerspruch.

In der ersten Darstellung sind die beiden Quadratzahlen also stets verschieden. Bei der zweiten Darstellung kann man auf diesem Weg nicht nachweisen, dass die beiden Quadratzahlen verschieden sind.

Zwischenbilanz:

Die erste Darstellung kann nicht verwendet werden, wenn $ad - bc = 0$ gilt.

Die zweite Darstellung ist nicht möglich, wenn $(ac - bd)^2 = (ad + bc)^2$ ist.

Es wird nun nachgewiesen, dass diese beiden Möglichkeiten nicht gleichzeitig eintreten können.

Wenn beide Eigenschaften gleichzeitig gelten würden, so wäre $n^3 = (ac + bd)^2$ und $n^3 = 2 \cdot (ad + bc)^2$.

Aus $(ac + bd)^2 = 2 \cdot (ad + bc)^2$ folgt aber $\left(\frac{ac + bd}{ad + bc}\right)^2 = 2$. Da das Quadrat einer rationalen Zahl aber nicht 2 sein kann, können nicht beide Einschränkungen gleichzeitig gelten.

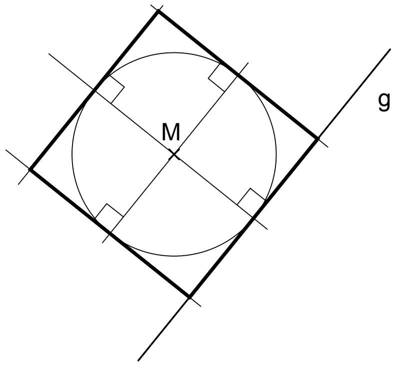
In einer der beiden Darstellungen sind also die Summanden beide positiv und verschieden.

Genauso wie wir jetzt von der Zerlegung von n^2 auf die Zerlegung von n^3 geschlossen haben, können wir von der Zerlegung von n^3 auf die Zerlegung von n^4 schließen, davon wiederum auf die Zerlegung von n^5 usw. Allgemein kann man von der Darstellung von $n^k = c^2 + d^2$ $(c > d > 0)$ als Summe von zwei verschiedenen positiven Quadraten auf eine solche Darstellung von n^{k+1} schließen. Man muss im gerade geführten Beweis nur n^k statt n^2 schreiben und n^{k+1} statt n^3. Somit gibt es eine solche gesuchte Darstellung für alle Potenzen n^k von n.

Aufgabe 3

Gegeben sind drei verschiedene Punkte M, P und Q, die nicht auf einer Geraden liegen. Es soll ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M konstruiert werden, so dass P und Q auf zwei benachbarten Seiten des Quadrats oder deren Verlängerungen liegen.

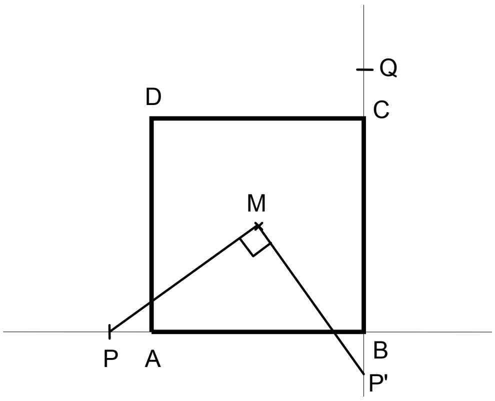
Wie viele verschiedene Quadrate gibt es in Abhängigkeit von der gegenseitigen Lage der Punkte M, P und Q?

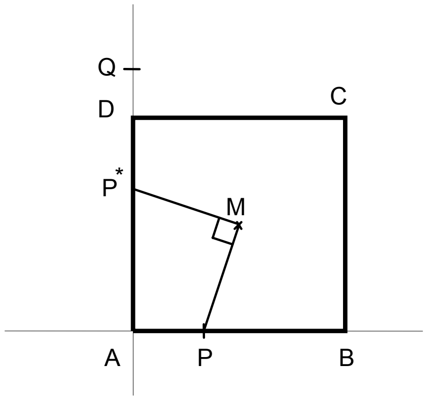


1. Lösung

Grundidee der Konstruktion

Aus den gegebenen Punkten M, P und Q soll ein Quadrat ABCD mit den genannten Eigenschaften konstruiert werden. Wir können die Bezeichnung der Eckpunkte des Quadrats so wählen, dass P auf der Geraden (AB) liegt. Der Punkt Q liegt dann auf der Geraden (BC) oder auf der Geraden (AD). Die nachfolgenden Bilder zeigen diese Möglichkeiten, wobei die Lage der Punkte P und Q auf den jeweiligen Geraden (AB) und (BC) bzw. (AD) variieren kann.





Dreht man die Strecke MP um M mit 90° bzw. 270°, dann liegen P' und Q bzw. P^* und Q auf der Trägergeraden der Quadratseite BC bzw. AD. Diese Eigenschaft folgt aus der Drehsymmetrie des Quadrats um seinen Mittelpunkt M als Zentrum. Die Gerade (AB) wird bei der Drehung um M und dem Drehwinkel 90° auf die Gerade (BC) und bei Drehung um 270° auf die Gerade (DA) abgebildet. Der Bildpunkt von P liegt deshalb auf (BC) bzw. (DA). Entsprechendes gilt für die Drehung der Strecke MQ um M mit 90° bzw. 270°. Es entstehen dabei Trägergeraden des gleichen Quadrats.

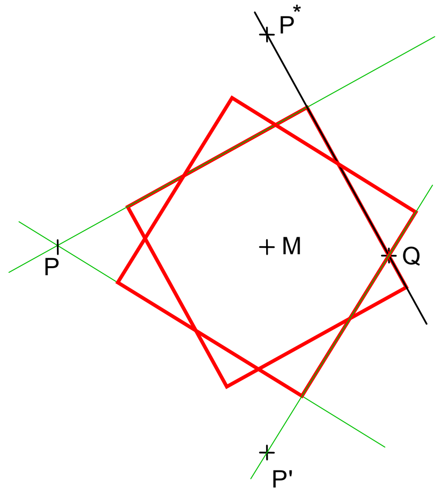
Die Gerade (QP') und die Gerade (QP^*) sind mögliche Trägergeraden von Quadratseiten.

Mit Kenntnis der Trägergeraden g einer Quadratseite und der Lage des Punktes M kann man das Quadrat konstruieren, da der Abstand von M zu g die Länge der halben Quadratseite ist. Die Konstruktion ergibt sich aus dem Bild auf der folgenden Seite.

Das Quadrat ist durch die Trägergerade g und den Mittelpunkt M eindeutig bestimmt.

Allgemeiner Fall

Liegt der Punkt Q nicht auf der Geraden (P'M) = (P^*M) = (P'P^*), so sind die Verbindungsgeraden (QP') und (QP^*) verschieden. Jede dieser Geraden ist die Trägergerade einer Quadratseite. Es gibt also genau zwei verschiedene Quadrate.



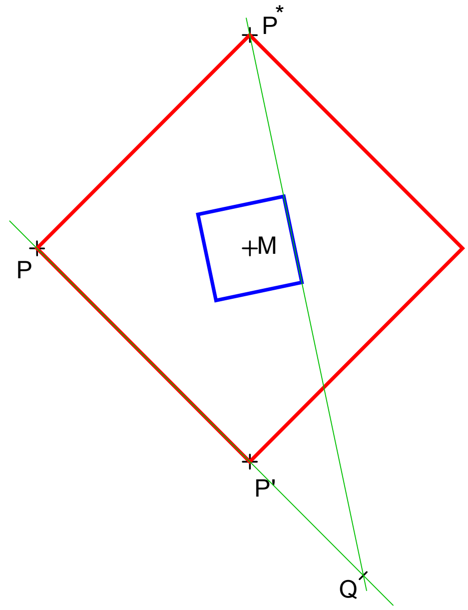
Hinweis

Liegt Q auf der Geraden (PP') [oder (PP^*)], so ist die Gerade (PQ) selbst eine Trägergerade des Quadrats. Konstruiert man nun das zugehörige Quadrat, dann sind P, P' und P^* Eckpunkte dieses Quadrats. Der Punkt P liegt als Eckpunkt gleichzeitig auf zwei benachbarten Seiten.

Außerdem gibt es ein zweites Quadrat mit einer Seite auf der Trägergeraden (QP*) [oder (QP')], falls $Q \neq P'$

[oder $Q \neq P^*$].

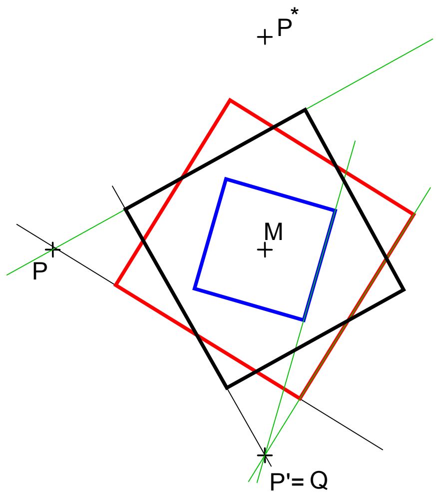
Diese Ausgangslage wird bei den Sonderfällen behandelt.



Sonderfälle

1) Fällt Q mit P' oder mit P* zusammen, so bilden die Punkte P, Q und M ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Die Gerade (QP') oder die Gerade (QP*) ist nicht mehr eindeutig bestimmt. Jede Gerade durch Q, die nicht durch M geht, ist Trägergerade eines Quadrats. Das nebenstehende Bild zeigt drei Möglichkeiten.

   Bei diesen beiden Lagen von Q gibt es jeweils unendlich viele Lösungen.



2) Liegt Q auf der Geraden (P'M) = (P^*M) = (P'P^*) und stimmt Q weder mit P' noch mit P^* überein, so ist der Abstand der Geraden (QP') = (QP^*) von M gleich 0. Es existiert kein Quadrat.

2. Lösung

Grundidee der Konstruktion

Falls ein solches Quadrat existiert, gibt es einen von M verschiedenen Eckpunkt S des Quadrats, für den die Geraden (SP) und (SQ) orthogonal sind. Durch den Mittelpunkt M und den Eckpunkt S ist das Quadrat eindeutig bestimmt.

Es gilt:

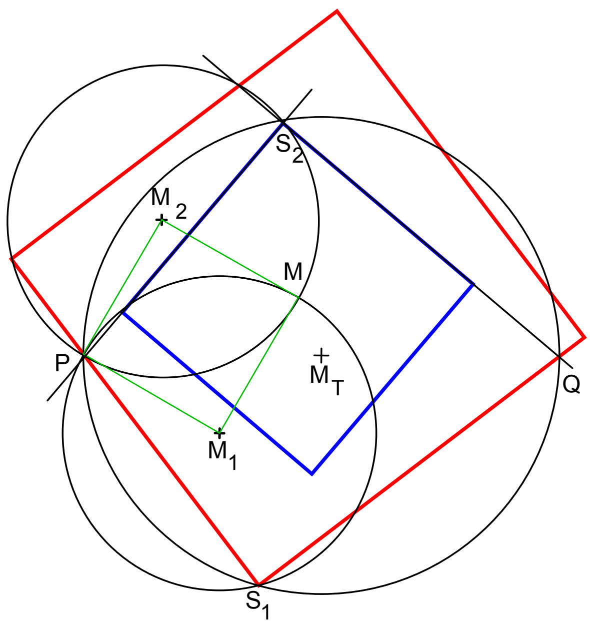
1. S liegt auf dem Thaleskreis über PQ.
2. Wegen w(PSM) = 45° oder w(PSM) = 90° + 45° = 135° liegt S auf dem Fasskreisbogen über MP zu 45° bzw. 135°.

Um diese Fasskreise zu erhalten, konstruiert man über der Strecke PM nach beiden Seiten ein gleichschenklig – rechtwinkliges Dreieck. Die der Strecke PM gegenüberliegenden Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Fasskreise. Die Fasskreise mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 und der Thaleskreis über PQ mit dem Mittelpunkt M_T schneiden sich auf Grund der Konstruktion immer in P. Für die übrigen Schnittpunkte der Fasskreise mit dem Thaleskreis gibt es mehrere Möglichkeiten:

Allgemeiner Fall

Der Punkt M liegt nicht auf dem Thaleskreis über PQ. Die Schnittpunkte S_1 bzw. S_2 der Fasskreise mit dem Thaleskreis sind dann von M verschieden.

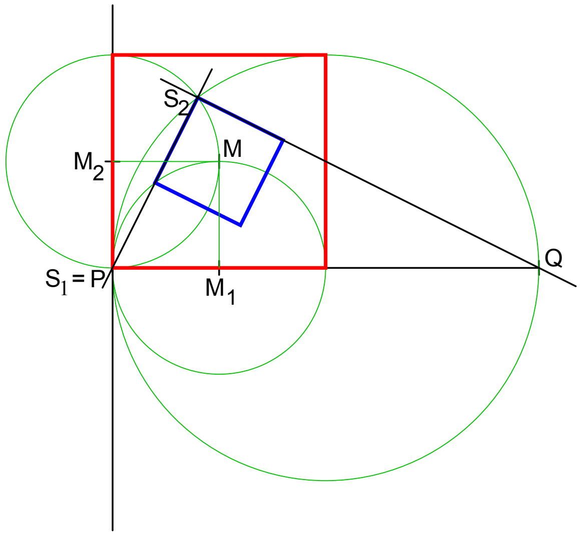
Es gibt zwei verschiedene Quadrate. Das nebenstehende Bild zeigt eine solche Situation.



Hinweis

Wenn der Mittelpunkt eines Fasskreises auf der Geraden (PQ) liegt, aber nicht mit dem Mittelpunkt der Strecke PQ zusammenfällt, dann berührt dieser Fasskreis den Thaleskreis über PQ in genau einem Punkt. Dieser Punkt ist P. Der Mittelpunkt des anderen Fasskreises liegt dann auf der Orthogonalen zu (PQ) durch P.

Das nebenstehende Bild zeigt die beiden möglichen Quadrate, wobei in einem Fall der Punkt P selbst Eckpunkt des Quadrates ist und zwei Seiten zugeordnet werden kann.

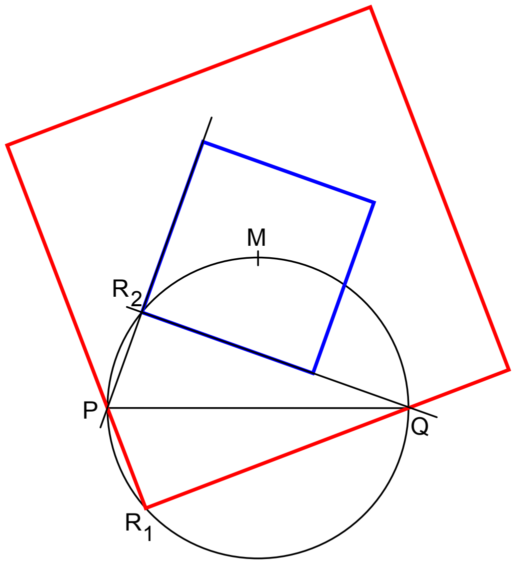


Sonderfälle

1. Der Punkt M ist der Schnittpunkt des Thaleskreises über PQ und der Mittelsenkrechten von PQ.

   Das Dreieck PQM ist gleichschenklig – rechtwinklig. Der Mittelpunkt des einen Fasskreises fällt mit dem Mittelpunkt des Thaleskreises zusammen, d.h. einer der Fasskreise ist mit dem Thaleskreis identisch. In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen.

   Im nebenstehenden Bild sind zwei dieser Quadrate mit den beliebig auf dem Thaleskreis gewählten Eckpunkten R_1 und R_2 angegeben.



2. Der Punkt M liegt auf dem Thaleskreis über PQ aber nicht auf der Mittelsenkrechten von PQ.

   Die Fasskreise und der Thaleskreis schneiden sich in den Punkten P und M.

   Die Möglichkeit M = S scheidet aus, da in diesem Fall die Seitenlänge des Quadrats 0 wäre.

   Für P = S wäre die Gerade (QS) und damit auch (PQ) Trägergerade einer Quadratseite. Da weiterhin M auf dem Thaleskreis über PQ aber nicht auf der Mittelsenkrechten von PQ liegt, ist die Winkelweite von $\measuredangle QSM$ von 45° verschieden. Es gibt deshalb kein Quadrat mit dem Eckpunkt S und einer Seite mit der Trägergeraden (SQ).

Aufgabe 4

Für natürliche Zahlen werden die beiden folgenden Operationen definiert:

(A) An die Zahl kann eine der Ziffern 0, 4 oder 8 angehängt werden.

(B) Die Zahl kann halbiert werden, wenn sie gerade ist.

Zeige, dass von 4 ausgehend jede positive natürliche Zahl durch eine endliche Anzahl dieser Operationen erreicht werden kann.

Zum Beispiel kann die Zahl 51 erreicht werden durch:

$$4 \xrightarrow{(A)} 40 \xrightarrow{(B)} 20 \xrightarrow{(A)} 204 \xrightarrow{(B)} 102 \xrightarrow{(B)} 51.$$

Lösung

Idee

Es wird gezeigt, dass es zu jeder der genannten Operationen eine eindeutige Umkehrung gibt und dass man durch die Anwendung dieser Umkehrungen von jeder beliebigen natürlichen Zahl n zur Zahl 4 gelangen kann.

Dieser Nachweis soll in zwei Teilen erfolgen.

Im ersten Teil wird gezeigt, dass durch die Anwendung der Umkehroperationen jede natürliche Zahl n verkleinert werden kann. Nach endlich vielen Schritten gelangt man dann zu einer einstelligen Zahl.

Im zweiten Teil wird nachgewiesen, dass man von jeder einstelligen Zahl durch die Anwendung der Umkehroperationen zur Zahl 4 gelangen kann.

Teil 1

Die drei unter (A) zusammengefassten Operationen werden zur einfacheren Darstellung mit A0, A4 bzw. A8 bezeichnet, je nachdem ob die Ziffer 0, 4 oder 8 angehängt wird.

Zu jeder der Operationen (A) und (B) gibt es eine eindeutige Umkehroperation:

$\overline{\text{A0}}$: Von einer natürlichen Zahl n mit der Einerziffer 0 wird die Endnull abgeschnitten,
d.h. $\overline{\text{A0}}\,(n) = n : 10$, $\overline{\text{A0}}$ hat demnach den Verkleinerungsfaktor 0,1.

$\overline{\text{A4}}$: Von einer natürlichen Zahl n mit der Einerziffer 4 wird die Endziffer abgeschnitten,
d.h. $\overline{\text{A4}}\,(n) = (n - 4) : 10$, $\overline{\text{A4}}$ hat demnach einen Verkleinerungsfaktor kleiner als 0,1, da vor der Division durch 10 die Zahl 4 subtrahiert wurde.

$\overline{\text{A8}}$: Von einer natürlichen Zahl n mit der Einerziffer 8 wird die Endziffer abgeschnitten,
d.h. $\overline{\text{A8}}\,(n) = (n - 8) : 10$, $\overline{\text{A8}}$ hat demnach einen Verkleinerungsfaktor kleiner als 0,1.

$\overline{\text{B}}$: n wird verdoppelt, d.h. $\overline{\text{B}}\,(n) = 2 \cdot n$, $\overline{\text{B}}$ hat demnach den Vergrößerungsfaktor 2.

Jede beliebige Verkettung von Operationen A0, A4, A8 und B kann durch Ersetzen von A0 durch $\overline{\text{A0}}$, A4 durch $\overline{\text{A4}}$ usw. rückgängig gemacht werden und umgekehrt. Gelingt also der Nachweis, dass es durch die Anwendung von $\overline{\text{A0}}$, $\overline{\text{A4}}$, $\overline{\text{A8}}$ und $\overline{\text{B}}$ einen Weg von einer beliebigen Zahl n zur Zahl 4 gibt, so gibt es durch die Anwendung von A0, A4, A8 und B einen Weg von der Zahl 4 zur Zahl n.

Es wird nun am Beispiel einer Zahl n mit der Einerziffer 1 gezeigt, dass durch eine endliche Anwendung der Umkehroperationen die Zahl verkleinert werden kann.

Zweimaliges Anwenden von $\overline{\text{B}}$, also zweimaliges Verdoppeln der Zahl n führt zu einer Zahl mit der Einerziffer 4. Die anschließende Anwendung von $\overline{\text{A4}}$ ergibt eine natürliche Zahl n'. Der Wert von n' ist kleiner als $0{,}4 \cdot n$, denn es gilt: $n' = (n \cdot 2 \cdot 2 - 4) : 10 = 0{,}4 \cdot n - 0{,}4 < 0{,}4 \cdot n$.

Mit den oben angegebenen Bezeichnungen kann man dies kurz so ausdrücken:

$$\overline{\text{A4}}\,\{\overline{\text{B}}\,[\overline{\text{B}}(n)]\} = (n \cdot 2 \cdot 2 - 4) : 10 < 0{,}4 \cdot n\,.$$

Für die übrigen Einerziffern ist die Folge der Umkehroperationen, die zu einer Verkleinerung von n führen in Kurzform in der nachfolgenden Tabelle angegeben.

Endziffer von n ($n \geq 10$)	***Verkettung von Operationen***		***Verkleinerungsfaktor***
0	$\overline{A0}$:	$n \rightarrow n:10$	= 0,1
1 / 6	$\overline{A4}\ \{\overline{B}[\overline{B}(n)]\}$:	$n \rightarrow (n\cdot 2\cdot 2 - 4):10$	< 0,4
2 / 7	$\overline{A4}\ [\overline{B}(n)]$:	$n \rightarrow (n\cdot 2 - 4):10$	< 0,2
3	$\overline{A4}\ (\overline{B}\{\overline{B}[\overline{B}(n)]\})$:	$n \rightarrow (n\cdot 2\cdot 2\cdot 2 - 4):10$	< 0,8
4	$\overline{A4}(n)$:	$n \rightarrow (n - 4):10$	< 0,1
5	$\overline{A0}\ [\overline{B}(n)]$:	$n \rightarrow n\cdot 2:10$	= 0,2
8	$\overline{A8}\ (n)$:	$n \rightarrow (n - 8):10$	< 0,1
9	$\overline{A8}[\overline{B}(n)]$:	$n \rightarrow (n\cdot 2 - 8):10$	< 0,2

Die Tabelle zeigt, dass jede natürliche Zahl n durch die Anwendung von höchstens vier geeigneten Umkehroperationen in eine kleinere Zahl n' übergeht. Wendet man nun auf die jeweils verkleinerte Zahl immer wieder die gleichen Verfahren an, so gelangt man schließlich zu einer einstelligen, von 0 verschiedenen Zahl.

Teil 2

Die folgende Tabelle zeigt, wie man von einer einstelligen Zahl zur Zahl 4 gelangt:

einstellige Zahl	***Verkettung von Operationen***	
1	$\{\overline{B}[\overline{B}(1)]\} = 4$	
2	$\overline{B}(2) = 4$	
3	$\overline{A4}\ (\overline{B}\{\overline{B}[\overline{B}(3)]\}) = 2$	, weiter wie bei 2.
4		
5	$\overline{A0}\ [\overline{B}(5)] = 1$	, weiter wie bei 1.
6	$\overline{A4}\ \{\overline{B}[\overline{B}(6)]\} = 2$	, weiter wie bei 2.
7	$\overline{A4}\ [\overline{B}(7)] = 1$	, weiter wie bei 1.
8	$\overline{A4}\ (\overline{B}\{\overline{B}[\overline{B}(8)]\}) = 6$	, weiter wie bei 6.
9	$\overline{A8}\ [\overline{B}(9)] = 1$	, weiter wie bei 1.

Damit ist gezeigt, dass von jeder natürlichen Zahl durch Anwendung der Umkehroperationen die Zahl 4 erreicht werden kann.

Da jeder dieser Wege umkehrbar ist, lässt sich von der Zahl 4 auch durch Anwenden der Operationen A und B jede natürliche Zahl erreichen.