

2001

Runde 1**Aufgabe 1**

Yannick besitzt gleichseitige Dreiecke, Quadrate sowie regelmäßige Sechs- und Achtecke, die alle dieselbe Seitenlänge haben. Er legt damit ohne Lücken und Überlappungen regelmäßige Muster. Dabei treffen Ecken immer auf Ecken und an jeder Ecke dürfen zwar verschiedenartige Vielecke zusammentreffen, aber sie müssen an allen Ecken in jeweils gleicher Reihenfolge angeordnet sein.

Finde alle möglichen Muster und zeige, dass es keine weiteren gibt.

Lösung

Die Innenwinkel der regelmäßigen Vielecke haben die Winkelweiten 60° (Dreieck), 90° (Quadrat), 120° (Sechseck) und 135° (Achteck). Damit an einer Ecke keine Lücken oder Überschneidungen auftreten, muss sich der Vollwinkel von 360° als Summe dieser Winkel darstellen lassen. Wir erhalten durch systematisches Probieren folgende Möglichkeiten:

Vielecke der gleichen Art:	$6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$	sechs Dreiecke	(1)
	$4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$	vier Quadrate	(2)
	$3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$	drei Sechsecke	(3)

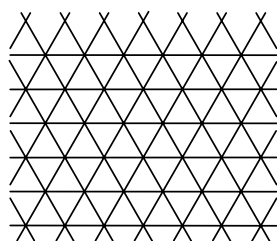
Ein Muster nur mit Achtecken ist nicht möglich, da 360 kein Vielfaches von 135 ist.

Da 135 die einzige ungerade Zahl ist, kann es nur zwei Achtecke oder kein Achteck geben, das an einem Eckpunkt des Musters vorkommt. Bei der folgenden Übersicht wurde immer versucht, möglichst große zulässige Summanden von 360° bzw. vom verbleibenden Winkelmaß zu subtrahieren.

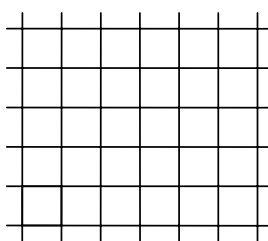
Vielecke unterschiedlicher Art:

$2 \cdot 135^\circ + 90^\circ = 360^\circ$	zwei Achtecke, ein Quadrat	(4)
$2 \cdot 120^\circ + 2 \cdot 60^\circ = 360^\circ$	zwei Sechsecke, zwei Dreiecke	(5)
$1 \cdot 120^\circ + 2 \cdot 90^\circ + 1 \cdot 60^\circ = 360^\circ$	ein Sechseck, zwei Quadrate, ein Dreieck	(6)
$1 \cdot 120^\circ + 4 \cdot 60^\circ = 360^\circ$	ein Sechseck, vier Dreiecke	(7)
$2 \cdot 90^\circ + 3 \cdot 60^\circ = 360^\circ$	zwei Quadrate, drei Dreiecke	(8)

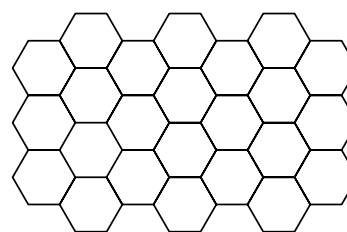
Die folgenden Bilder zeigen, dass es für jeden dieser Fälle ein regelmäßiges Muster gibt. Da bei der Anordnung der zwei Quadrate und der drei Dreiecke sogar zwei Möglichkeiten existieren, sind insgesamt neun Überdeckungen der Ebene mit den geforderten Eigenschaften möglich.



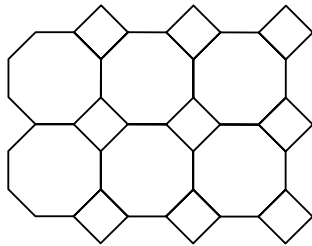
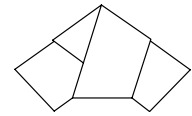
(1)



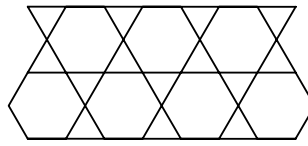
(2)



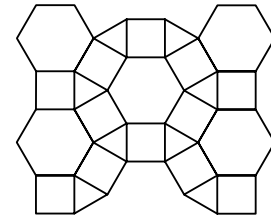
(3)



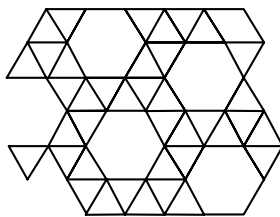
(4)



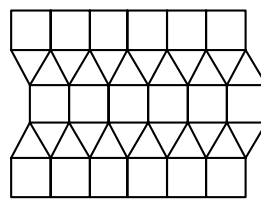
(5)



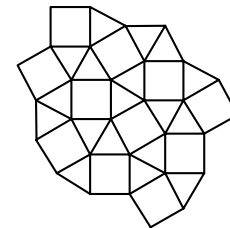
(6)



(7)



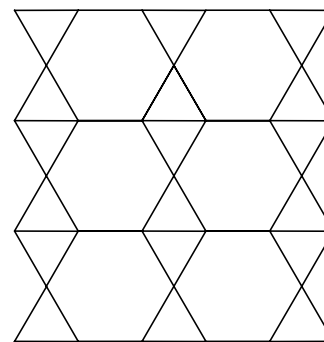
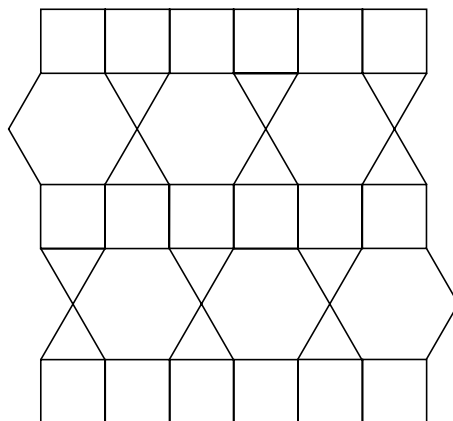
(8a)

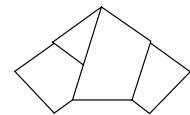


(8b)

Hinweis

Die Überlegungen zu der Winkelsumme 360° und den Innenwinkeln der verwendbaren Vielecke garantieren zunächst nur die lückenlose Überdeckung an **einem** Punkt. Dadurch ist noch nicht gesichert, dass die gleiche Reihenfolge der Vielecke an allen anderen Eckpunkten möglich ist wie die beiden folgenden Bilder zeigen.





Aufgabe 2

Die Felder eines Schachbretts sind in beliebiger Reihenfolge mit den Zahlen 1 bis 64 belegt. Man darf zwei Felder auswählen und bildet die Summe und das Produkt ihrer Zahlen. Danach wird die Zahl des einen Feldes durch die Einerziffer dieser Summe und die Zahl des anderen Feldes durch die Einerziffer dieses Produktes ersetzt.

Kann man durch mehrfache Anwendung dieses Verfahrens erreichen, dass das Schachbrett mit lauter gleichen Zahlen belegt ist?

Behauptung

Man kann nicht erreichen, dass alle Felder des Schachbretts mit der gleichen Zahl belegt sind.

1. Begründung

Wendet man das Verfahren einmal an, so erhält man zwei einstellige Zahlen.

Folgerung 1: Wenn man das Schachbrett mit der gleichen Zahl belegen kann, dann muss diese Zahl einstellig sein.

Ist mindestens eine der verwendeten Zahlen eine Zehnerzahl oder die Zahl 0, dann ist die Einerziffer des Produkts 0.

Folgerung 2: Wenn man das Schachbrett mit der gleichen Zahl belegen kann, dann muss diese Zahl die Null sein.

Von den Ausgangszahlen brauchen wir nur die Einerreste betrachten, denn nur diese haben Einfluss auf den Einerrest von Summe und Produkt.

Ist genau eine Ausgangszahl 0, so ist der Einerrest des Produktes, nicht aber der Einerrest der Summe 0. Damit erhöht sich die Anzahl der Nullen nicht.

Ist keine Ausgangszahl 0, so kann höchstens der Einerrest der Summe oder der Einerrest des Produkts 0 werden, nie die Einerreste von beiden, denn der Einerrest der Summe wird nur 0 bei den Einerziffern 9 und 1, 8 und 2, 7 und 3, 6 und 4 sowie 5 und 5. In diesen Fällen ist die Einerziffer des Produkts immer von 0 verschieden.

Folgerung 3: Bei wiederholter Anwendung dieses Verfahrens erhöht sich die Anzahl der Nullen bei jedem Schritt um höchstens 1.

Eine Startzahl ist sicher ungleich 0. Durch wiederholte Anwendung des Verfahrens kann man in einem Schritt die Anzahl der Nullen um höchstens 1 erhöhen. Sollen alle Felder mit 0 belegt sein, so hätte man im letzten Schritt als Ausgangszahlen 0 und eine von 0 verschiedene Zahl. Die Einerziffer der Summe dieser beiden Zahlen ist aber nie 0.

Folgerung 4: Man kann nicht erreichen, dass alle Felder des Schachbretts mit gleichen Zahlen belegt sind.

2. Begründung

Auf dem Schachbrett befinden sich 32 gerade und 32 ungerade Zahlen. Kombiniert man diese nach der vorgegebenen Methode, so ergeben sich folgende neue Belegungen der kombinierten Felder:

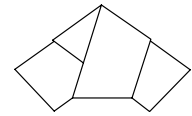
Fall 1: Beide Zahlen sind gerade.

Da sowohl das Produkt als auch die Summe von zwei geraden Zahlen wieder gerade ist, bleibt die Anzahl der geraden und die Anzahl der ungeraden Zahlen auf dem Schachbrett unverändert.

Fall 2: Eine Zahl ist gerade, die andere ist ungerade.

Das Produkt einer geraden Zahl mit einer ungeraden Zahl ist gerade, die Summe einer geraden Zahl und einer ungeraden Zahl ist ungerade.

In diesem Fall ändert sich nichts an der Anzahl der geraden und der ungeraden Zahlen.

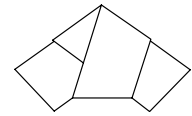


Fall 3: Die beiden Zahlen sind ungerade.

Das Produkt der beiden Zahlen ist ungerade, ihre Summe ist gerade.

Die Anzahl der ungeraden Zahlen vermindert sich um 1, die Anzahl der geraden erhöht sich um 1.

Insgesamt werden also nur im dritten Fall die Anzahlen der geraden und der ungeraden Zahlen verändert. Will man lauter gleiche Zahlen auf dem Schachbrett haben, so müssen diese also gerade sein, weil man nur die Anzahl der ungeraden verringern kann. Diese verringert sich jeweils um 1, beginnend mit 32. Bei diesem Verfahren wird schließlich irgendwann nur noch eine ungerade Zahl auf dem Schachbrett sein, während alle anderen Zahlen gerade sind. Um diese letzte ungerade Zahl zu beseitigen, fehlt aber für die Anwendung von Fall 3 ein ungerader Partner. Deshalb kann sie nicht beseitigt werden.

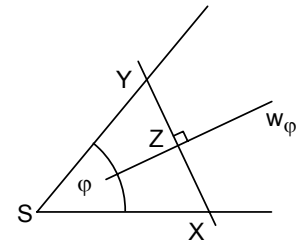
**Aufgabe 3**

In einem Dreieck ABC werden die Winkelhalbierenden von α und β , sowie die Winkelhalbierenden der Außenwinkel von α und β gezeichnet. Von C aus werden die Lote auf diese vier Winkelhalbierenden gefällt.

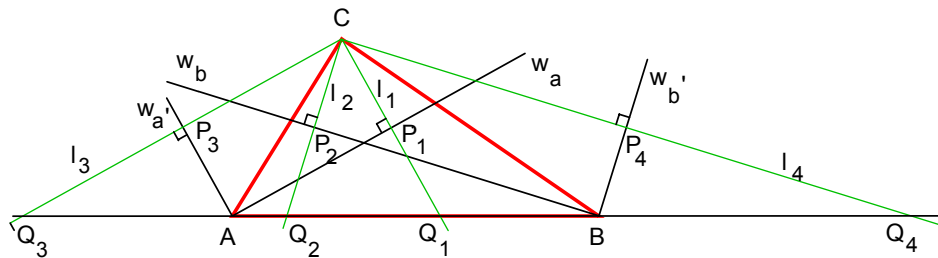
Zeige, dass die vier Lotfußpunkte auf einer Parallelen zu AB liegen.

1. Lösung (Verwendung der Spiegelung an den Winkelhalbierenden)**Vorüberlegung:**

Jedes Lot zu der Winkelhalbierenden w_φ eines Winkels φ in einem Punkt $Z \neq S$ von w_φ schneidet die Schenkel des Winkels zwei Punkten X bzw. Y . Die Dreiecke SXZ und SZY sind nach *wsw* kongruent, denn die beiden Dreiecke stimmen im rechten Winkel bei Z , den Winkelmaßen $\frac{1}{2}\varphi$ und der Streckenlänge $|SZ|$ überein. Daraus folgt, dass auch die Strecken ZX und ZY gleich lang sind. Der Punkt X ist also der Bildpunkt von Y bei der Achsenspiegelung an w_φ und umgekehrt.



In der nachfolgenden Figur sind die Winkelhalbierenden der Winkel α und β sowie ihrer Außenwinkel α' und β' eingezeichnet. Die vier Lote auf diese Winkelhalbierenden werden mit l_1, l_2, l_3 und l_4 bezeichnet.



Entsprechend der Zeichnung gilt:

$$\begin{aligned} l_1 &\perp w_\alpha, & l_1 \cap w_\alpha &= \{P_1\}, & l_1 \cap (AB) &= \{Q_1\}, \\ l_2 &\perp w_\beta, & l_2 \cap w_\beta &= \{P_2\}, & l_2 \cap (AB) &= \{Q_2\}, \\ l_3 &\perp w_{\alpha'}, & l_3 \cap w_{\alpha'} &= \{P_3\}, & l_3 \cap (AB) &= \{Q_3\}, \\ l_4 &\perp w_{\beta'}, & l_4 \cap w_{\beta'} &= \{P_4\}, & l_4 \cap (AB) &= \{Q_4\}. \end{aligned}$$

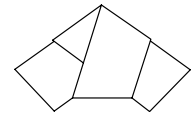
Gemäß der Vorüberlegung sind die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 die Spiegelpunkte von C bezüglich der entsprechenden Winkelhalbierenden.

Also gilt: P_1 ist der Mittelpunkt der Strecke Q_1C , P_2 ist der Mittelpunkt der Strecke Q_2C , usw.

Also ist P_1P_2 die Mittelparallele im Dreieck Q_2Q_1C und hat daher den Abstand $\frac{1}{2}h_c$ von AB .

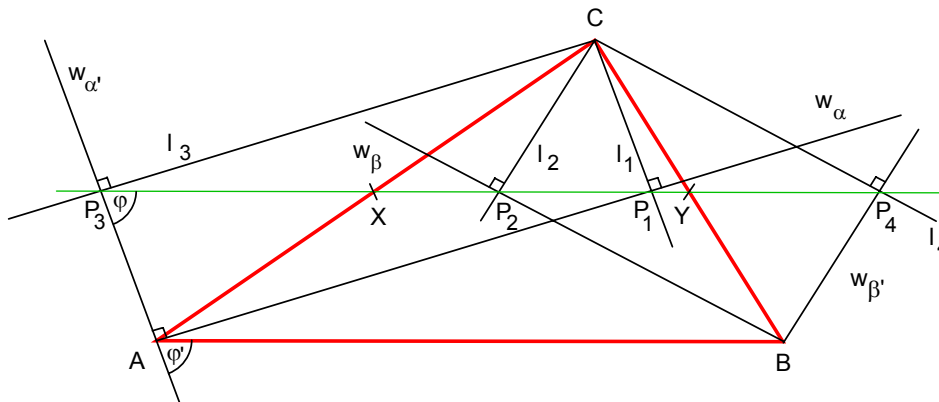
Entsprechend ist P_3P_4 die Mittelparallele im Dreieck Q_3Q_4C und hat daher den Abstand $\frac{1}{2}h_c$ von AB .

Da beide Parallelen auf der gleichen Seite der Geraden (AB) liegen, fallen sie zusammen. Die vier Lotfußpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen auf der Mittelparallelen des Dreiecks ABC .



2. Lösung (Rechteckseigenschaften von Teilfiguren)

Von C aus werden die Lote auf die Winkelhalbierende w_α und die Außenwinkelhalbierende $w_{\alpha'}$ gefällt. Die Lotfußpunkte sollen P_1 bzw. P_3 heißen.



Die Winkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende sind zueinander orthogonal, also ist

$$w(P_1AP_3) = 90^\circ.$$

Das Viereck AP_1CP_3 ist somit ein Viereck mit mindestens drei rechten Winkeln, also ein Rechteck.

Die Strecken AC und P_1P_3 sind die Diagonalen des Rechtecks AP_1CP_3 . Die Dreiecke AP_1C und P_3P_1C sind kongruent nach dem Kongruenzsatz sws. Daher sind die gleich liegenden Winkel $\angle P_1AC$ und

$\angle P_1P_3C$ gleich weit. Wegen $w(P_1AC) = w(BAP_1) = \frac{1}{2}\alpha$ (nach Voraussetzung) gilt also auch

$w(P_1P_3C) = \frac{1}{2}\alpha$. Die Geraden (P_3P_1) und (AB) schneiden die Gerade durch A und P_3 unter den Winkeln

φ und φ' . Die Weite dieser Winkel ist jeweils $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Die Geraden (P_3P_1) und (AB) sind demnach parallel (Umkehrung des Stufenwinkelsatzes).

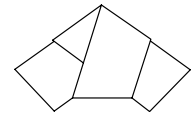
Die Diagonalen AC und P_1P_3 dieses Rechtecks schneiden sich im Punkt X . Da sich die Rechtecksdiagonalen halbieren, ist X insbesondere der Mittelpunkt der Dreiecksseite AC . Somit liegen die drei Punkte P_3 , X und P_1 auf der zu AB parallelen Mittellinie des Dreiecks ABC .

Von C aus werden die Lote auf die Winkelhalbierende w_β und die Außenwinkelhalbierende $w_{\beta'}$ gefällt. Die Lotfußpunkte sollen P_2 bzw. P_4 heißen.

Auf entsprechende Weise kann man nun zeigen, dass das Viereck P_2BP_4C ein Rechteck mit dem Diagonalschnittpunkt Y ist und die drei Punkte P_2 , Y und P_4 auf der zu AB parallelen Mittellinie des Dreiecks ABC liegen.

Da diese Mittellinie durch die Punkte X und Y eindeutig festgelegt ist, liegen die Punkte P_3 , P_1 , P_2 und P_4 also auf ein und derselben zu (AB) parallelen Geraden.

Dies war zu zeigen.



3. Lösung (Verwendung des Satzes von Thales)

Behauptung: Die vier Lotfußpunkte liegen auf der Mittelparallele des Dreiecks ABC.

Wir zeigen dies für den Lotfußpunkt P von C auf die Winkelhalbierende von α . Für die drei verbleibenden Lotfußpunkte verläuft der Beweis analog.

Nach Voraussetzung gilt:

$$CP \perp w_\alpha \Rightarrow \angle CPA = 90^\circ \Rightarrow P \text{ liegt auf dem Thaleskreis über AC.}$$

Der Radius des Thaleskreises werde mit r bezeichnet.

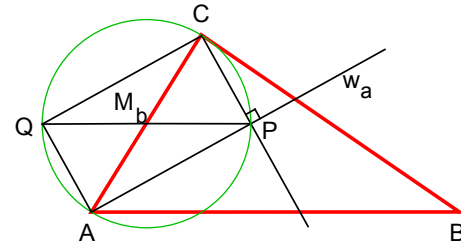
$$\Rightarrow |AM_b| = r = |PM_b| = |QM_b|,$$

\Rightarrow Die Dreiecke APM_b und AM_bQ sind gleichschenkelig mit Spitze M_b .

$$\Rightarrow \angle M_bPA = \angle PAM_b = \frac{\alpha}{2} = \angle BAP,$$

$\Rightarrow M_bP$ ist parallel zu AB (Wechselwinkel).

Da M_b der Mittelpunkt der Strecke AC ist, liegt P also auf der Mittelparallele des Dreiecks ABC.



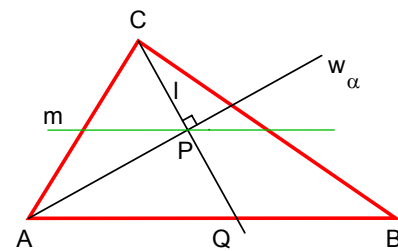
4. Lösung (Spiegelung)

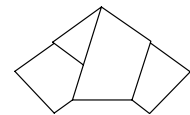
Wir zeigen, dass die vier Lotfußpunkte auf der Mittelparallelen m des Dreiecks ABC mit $m \parallel AB$ liegen.

Für den Fußpunkt P des Lotes von C auf die Winkelhalbierende w_α des Winkels α ergibt sich das folgendermaßen:

Bei der Spiegelung an w_α wird (AC) auf (AB) abgebildet. Das Bild Q von C liegt also auf (AB), zugleich aber auf (CP). Daher ist P der Mittelpunkt der Strecke CQ. Die Mittelparallele m halbiert nach dem Satz über die Mittelparallele bzw. über die Streifenschar ebenfalls die Strecke CQ, also liegt P auf m.

Entsprechend zeigt man, dass auch die anderen Lotfußpunkte auf m liegen.



**Aufgabe 4**

Eine natürliche Zahl soll **aufteilbar** heißen, wenn die Summe einiger Ziffern dieser Zahl gleich der Summe ihrer restlichen Ziffern ist.

Beispielsweise sind die Zahlen 25371 und 2851 **aufteilbar**, weil $2 + 7 = 5 + 3 + 1$ bzw. $2 + 5 + 1 = 8$ gilt.

Weise nach, dass es zwei, aber nicht drei aufeinander folgende Zahlen gibt, die **aufteilbar** sind.

Lösung

Eine Zahl kann höchstens dann aufteilbar sein, wenn die Summe ihrer Ziffern gerade ist, da nur dann eine Aufteilung der Ziffern in zwei Teilmengen mit gleicher Summe möglich ist.

Vergrößert man eine natürliche Zahl, deren Einerziffer nicht 9 ist, um 1, so vergrößert sich die Summe ihrer Ziffern um 1. Auf eine natürliche Zahl mit einer geraden Ziffernsumme folgt in diesem Fall eine Zahl mit ungerader Ziffernsumme und umgekehrt.

Zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen können also höchstens dann beide eine gerade Ziffernsumme haben, wenn die kleinere der beiden Zahlen die Einerziffer 9 hat.

Daraus folgt, dass es keine drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen geben kann, die alle drei eine gerade Ziffernsumme haben.

Damit ist nachgewiesen, dass es keine drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen geben kann, die alle drei **aufteilbar** sind.

Da beispielsweise die beiden Zahlen 549 und 550 wegen $5 + 4 = 9$ bzw. $5 + 0 = 5$ aufteilbar sind, ist die Existenz von zwei aufeinander folgenden Zahlen, die aufteilbar sind, gesichert.

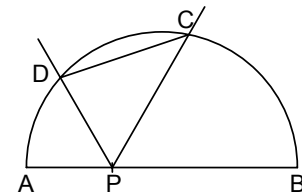


Aufgabe 5

Auf dem Durchmesser AB eines Halbkreises wird ein beliebiger Punkt P ($P \neq A, P \neq B$) gewählt. Von P aus werden zwei Halbgeraden gezeichnet, so dass bei P drei Winkel der Weite 60° entstehen (siehe Skizze).

Diese Halbgeraden schneiden den Halbkreis in den Punkten C und D.

Wie lang ist die Strecke CD?



Lösungen

Behauptung: Die Länge der Strecke CD stimmt mit dem Kreisradius r überein.

Ist P der Mittelpunkt des Halbkreises, so gilt $|PC| = |PD| = r$ und $w(CPD) = 60^\circ$.

Das Dreieck PCD ist gleichschenkelig mit einem 60° -Winkel an der Spitze und damit sogar gleichseitig. Es gilt also $|CD| = r$.

Bei den folgenden Lösungen wird davon ausgegangen, dass P zwischen dem Mittelpunkt des Halbkreises und dem Punkt A liegt. Im anderen Fall wird P an M gespiegelt.

1. Lösung (Anwendung von Symmetrie und Peripheriewinkelsatz)

D' sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an der Achse (AB).

Wegen der Winkeltreue der Achsenspiegelung folgt: $\alpha = \beta$.

Aus der Winkelsumme im Dreieck D'PD erhalten wir

$$\alpha = \beta = 30^\circ.$$

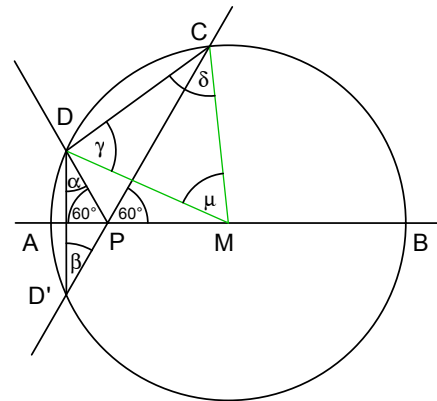
Der Umfangswinkelsatz liefert bei Anwendung auf die Sehne CD:

$$\mu = 2\beta = 60^\circ.$$

Da das Dreieck DMC wegen $|MC| = |MD| = r$ gleichschenkelig ist, folgt

$$\gamma = \delta = (180^\circ - \mu) : 2 = 60^\circ.$$

Das Dreieck DMC ist also sogar gleichseitig, d.h. $|CD| = r$.



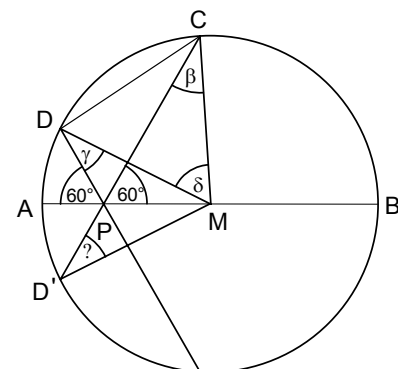
2. Lösung (Kongruenz)

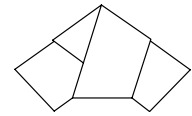
Zum Beweis der Behauptung werden der Halbkreis zu einem Kreis und die Halbgeraden zu Geraden ergänzt. Mit den in der nebenstehenden Skizze verwendeten Bezeichnungen ergibt sich dann:

Die Winkel $\sphericalangle MD'C$ und $\sphericalangle D'CM$ haben nach Voraussetzung dieselbe Weite, da das Dreieck D'MC gleichschenkelig ist.

Die Winkel $\sphericalangle D'PM$ und $\sphericalangle MPD$ haben die Weite 120° und liegen deshalb in den Dreiecken D'MP bzw. MDP jeweils der längeren Dreiecksseite gegenüber. Nach dem Kongruenzsatz Ssw sind diese beiden Dreiecke zueinander kongruent.

Damit ist $\beta = \gamma$.





Die Winkelsumme in Dreieck MCD ergibt:

$$\begin{aligned}
 \delta &= 180^\circ - (w(\text{DCM}) + w(\text{MDC})) \\
 &= 180^\circ - (\beta + w(\text{DCP}) + w(\text{MDC})) \\
 &= 180^\circ - (w(\text{DCP}) + w(\text{MDC}) + \gamma) \quad , \text{ da } \beta = \gamma \\
 &= 180^\circ - (w(\text{DCP}) + w(\text{PDC})) \\
 &= 180^\circ - (180^\circ - w(\text{CPD})) \\
 &= 60^\circ.
 \end{aligned}$$

Da das Dreieck DCM gleichschenkelig ist, ergibt sich mit $\delta = 60^\circ$, dass dieses Dreieck gleichseitig ist. Damit ist $|CD| = r$.

3. Lösung (Anwendung des Fasskreises)

k ist der gegebene Halbkreis mit Durchmesser AB . Der Radius sei r .

Wir betrachten $D \in k$ mit $w(\text{MPD}) = 120^\circ$.

Für $P \neq M$ schneidet der Umkreis u des Dreiecks MPD k außer in D noch in einem weiteren Punkt E , da sich wegen der vorgegebenen Winkelmaße bei P die Kreise k und u nicht in D berühren können.

Somit ist das Viereck $MEDP$ ein Sehnenviereck, in dem sich – wie bekannt – Gegenwinkel zu 180° ergänzen. Deshalb gilt:

$$w(\text{DEM}) = 60^\circ. \quad (1)$$

Da $|MD| = |ME| = r$ ist, gilt:

$$\Delta \text{MED ist gleichschenkelig.} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt: $\Delta \text{MED ist gleichseitig, d.h.}$

$$|DE| = r$$

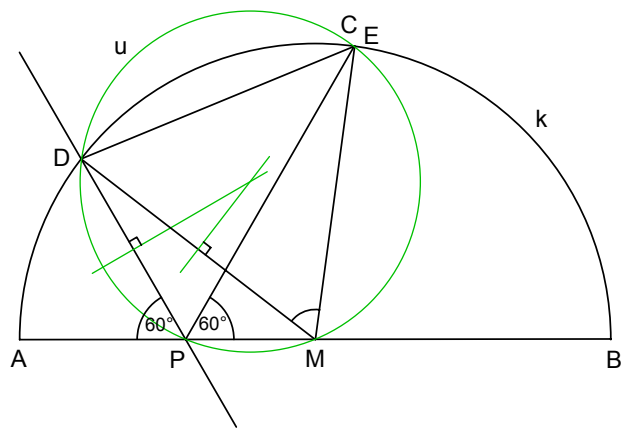
$$\text{und} \quad w(\text{EMD}) = 60^\circ.$$

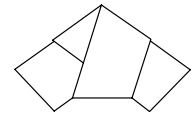
Aus der letzten Aussage folgt, dass u der 60° -Fasskreisbogen über DE ist.

Da $P \in u$ ist, gilt: $w(\text{EPD}) = 60^\circ$.

Demnach ist $C = E$, also $|DC| = |DE| = r$.

Die Strecke CD hat also immer die Länge r , unabhängig von der Lage des Punktes P .





4. Lösung (Ergänzen der Figur durch Hilfslinien)

Die Figur wird durch die Parallelen zu (PD) und (PC) durch den Mittelpunkt M des Halbkreises ergänzt. Diese beiden Parallelen schneiden den Halbkreis in den Punkten E bzw. F.

P sei von M verschieden und liege zwischen A und M. Der Schnittpunkt der beiden Strecken PC und ME sei G.

Die Größe der Innenwinkel des Dreiecks PMG bei P und M beträgt nach Konstruktion jeweils 60° . Nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke ist dann auch der dritte Innenwinkel ein 60° -Winkel. Das Dreieck PMG ist also gleichseitig.

Die beiden Dreiecke PMD und GMC sind kongruent, denn sie stimmen in den Längen der Dreiecksseiten PM und GM, den Radien MD und MC sowie den Größen der Winkel \sphericalangle MPD und \sphericalangle MGC überein, die als Nebenwinkel von 60° -Winkeln beide die Winkelweite 120° besitzen. Da diese 120° -Winkel die größten Winkelmaße der Dreiecke sind, kann der vierte Kongruenzsatz angewandt werden.

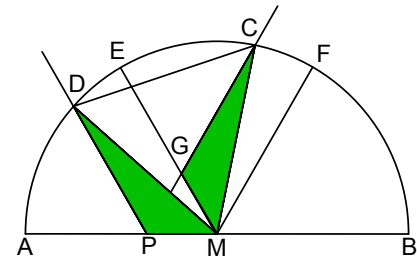
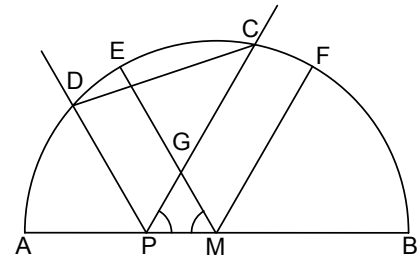
Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt $w(DMP) = w(CMG)$.

Daraus folgt:

$$w(CMD) = w(CMG) + w(GMD) = w(DMP) + w(GMD) = w(GMP) = 60^\circ, \text{ (nach Voraussetzung).}$$

Das Dreieck DMC ist gleichschenkelig ($|MD| = |MC| = r$) mit einem 60° -Winkel an der Spitze, also gleichseitig.

Damit gilt $|DC| = |MD| = |MC| = r$.



5. Lösung (Rechnen mit Kreis- und Geradengleichungen)

Legen wir den Mittelpunkt des Kreises mit Radius r in den Ursprung des Koordinatensystems, so erhalten wir die Kreisgleichung

$$k: x^2 + y^2 = r^2, \quad M(0/0).$$

Der Punkt P wird auf der negativen x-Achse angenommen. Für seine Koordinaten gelte $P(-s/0)$, $0 < s < r$.

Die Geraden durch P, die die x-Achse im Winkel von 60° schneiden, haben die Steigungen $\sqrt{3}$ bzw. $-\sqrt{3}$ (Begründung siehe unten).

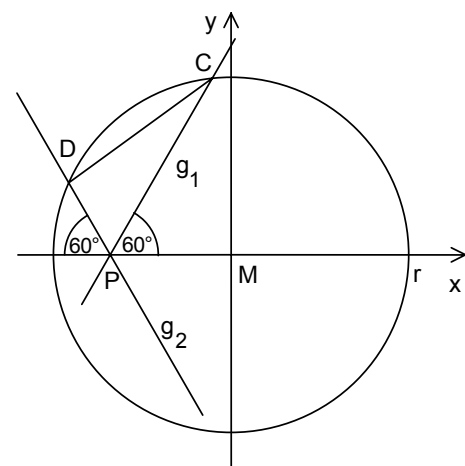
Die beiden Geraden g_1 und g_2 haben also die Gleichungen: $g_1: y = \sqrt{3} \cdot (x + s)$ und $g_2: y = -\sqrt{3} \cdot (x + s)$.

Durch Ersetzen der Variablen y in der Kreisgleichung durch $\sqrt{3} \cdot (x + s)$ bzw. $-\sqrt{3} \cdot (x + s)$ erhalten wir in beiden Fällen die quadratische Gleichung

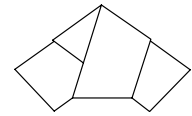
$$x^2 + 3 \cdot (x + s)^2 = r^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6s \cdot x + 3s^2 - r^2 = 0$$

$$x = \frac{-6s + \sqrt{36s^2 - 48s^2 + 16r^2}}{8} \quad \vee \quad x = \frac{-6s - \sqrt{-12s^2 + 16r^2}}{8}$$

$$x = \frac{-3s + \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4} \quad \vee \quad x = \frac{-3s - \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4}$$



$$(4r^2 - 3s^2 > 0, \text{ wegen } r > s).$$



Nach der Bezeichnung in der Figur ist $x = \frac{-3s + \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4}$ die x-Koordinate des Punktes C und

$x = \frac{-3s - \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4}$ die x-Koordinate des Punktes D. Die y-Koordinaten dieser Punkte ergeben sich durch das Einsetzen der x-Koordinaten in die entsprechende Geradengleichung.

Die Länge der Strecke CD wird nach dem Satz von Pythagoras berechnet.

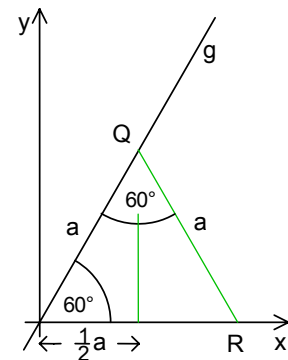
$$\begin{aligned} |CD|^2 &= (y_D - y_C)^2 + (x_D - x_C)^2 = \\ &= \left(\sqrt{3} \cdot \left(\frac{-3s - \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4} + s \right) - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{-3s + \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4} + s \right) \right)^2 + \left(\frac{-3s - \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4} - \frac{-3s + \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4} \right)^2 \\ &= 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}s + 2s \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - 3s^2} \right)^2 \\ &= 3 \cdot \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4} \cdot (4r^2 - 3s^2) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Die Länge der Strecke CD stimmt mit dem Radius des Kreises überein.

Nachweis der Steigung der Geraden g

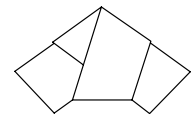
Das nebenstehende Bild zeigt die Ursprungsgerade g, die mit der positiven x-Achse einen 60° -Winkel bildet. Der Punkt Q wird auf dieser Geraden beliebig gewählt. Außerdem wird durch Q eine Gerade gezeichnet, die mit g einen Winkel von 60° bildet. Auf Grund der Winkelsumme ist dann auch der dritte Innenwinkel ein 60° -Winkel. Das Dreieck ORQ ist deshalb gleichseitig.

Die x-Koordinate des Punktes Q stimmt mit der halben Seitenlänge a des Dreiecks überein, die y-Koordinate von Q ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck, also $\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}$. Die Steigung der Geraden (OQ) ist der Quotient aus der Differenz der y-Koordinaten und der Differenz der x-



Koordinaten von O und Q. Daraus folgt: $m = \frac{\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$.

Aus Symmetriegründen ist die Steigung der zweiten Gerade $-\sqrt{3}$.

**Aufgabe 6**

Drei natürliche Zahlen a , b und c mit $a < b < c$ werden Jahrtausendtrio genannt, wenn die größte und die kleinste Zahl die Differenz 2001 haben und die Summe von je zwei der drei Zahlen eine Quadratzahl ist.

Wie viele Jahrtausendtrios gibt es?

1. Lösung

Nach Aufgabenstellung sind für ein Jahrtausendtrio a , b , c mit $a < b < c$ die drei Summen $a + b$, $a + c$ und $b + c$ jeweils Quadratzahlen. Es gibt also natürliche Zahlen x , y und z , so dass $x^2 = a + b$, $y^2 = a + c$ und $z^2 = b + c$. Aus $b < c$ folgt $a + b < a + c$ und damit $x < y$. Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ und damit $y < z$. Es ist also $x < y < z$, d.h. y muss zwischen x und z liegen.

Außerdem ist $2001 = c - a$. Setzt man in dieser Gleichung $c = z^2 - b$ und $a = x^2 - b$ ein, so ergibt sich

$$2001 = (z^2 - b) - (x^2 - b) = z^2 - x^2 = (z - x) \cdot (z + x).$$

$z - x$ und $z + x$ müssen also Teiler von 2001 sein. Um alle Möglichkeiten zu finden, bestimmen wir die Primzahlzerlegung von 2001: $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$.

Somit hat 2001 die acht Teiler 1, 3, 23, 29, 69, 87, 667, 2001. Da $z - x < z + x$ gilt, ergeben sich die folgenden vier Fälle:

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $z - x = 1, z + x = 2001$ | 2) $z - x = 3, z + x = 667$ |
| 3) $z - x = 23, z + x = 87$ | 4) $z - x = 29, z + x = 69$ |

In Fall 1) ist $2z = (z - x) + (z + x) = 2002$, also $z = 1001$ und $x = z - 1 = 1000$. Da die natürliche Zahl y zwischen x und z liegen muss, ist dieser Fall ausgeschlossen.

In Fall 2) ergibt sich ebenso $2z = 670$, also $z = 335$ und $x = 332$.

In Fall 3) ist $2z = 110$, also $z = 55$ und $x = 32$.

In Fall 4) ist $2z = 98$, also $z = 49$ und $x = 20$.

In jedem der Fälle muss y zwischen x und z liegen. Es darf y aber nicht eine beliebige natürliche Zahl zwischen x und z sein.

Es gibt noch zwei weitere Einschränkungen:

Einschränkung 1:

Es ist $z^2 - x^2 = (b + c) - (a + b) = c - a$, also $y^2 + (z^2 - x^2) = (a + c) + (c - a) = 2c$. Wegen $z^2 - x^2 = 2001$, ist also $y^2 + 2001 = 2c$ eine gerade Zahl. Da 2001 ungerade ist, muss y^2 und damit auch y **ungerade** sein.

Einschränkung 2:

Wegen $z^2 - x^2 = c - a$ (s. Einschränkung 1) ist $y^2 - (z^2 - x^2) = (a + c) - (c - a) = 2a > 0$.

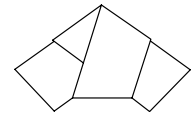
Also ist $y^2 > z^2 - x^2 = 2001$ und somit $y \geq 45$.

Mit diesen beiden Einschränkungen bleibt in Fall 2 nur $y = 333$, in Fall 3 bleibt $y = 45, 47, 49, 51, 53$ und in Fall 4 bleibt nur $y = 45, 47$. Insgesamt gibt es also 8 Möglichkeiten.

Um zu überprüfen, ob alle acht Möglichkeiten zu Jahrtausendtrios führen oder ob es noch weitere Einschränkungen gibt, berechnen wir jeweils die zugehörigen Jahrtausendtrios.

Dies geht so: Nach Einschränkung 2 ist $a = \frac{y^2 - 2001}{2}$, nach Einschränkung 1 ist $c = \frac{y^2 + 2001}{2}$.

Daraus ergibt sich b durch $b = x^2 - a = z^2 - c$.



Somit erhält man die folgende Tabelle:

Fall 2		Fall 3				Fall 4	
x = 332 z = 335		x = 32 z = 55				x = 20 z = 49	
y = 333	y = 45	y = 47	y = 49	y = 51	y = 53	y = 45	y = 47
a = 54 444	a = 12	a = 104	a = 200	a = 300	a = 404	a = 12	a = 104
b = 55 780	b = 1012	b = 920	b = 824	b = 724	b = 620	b = 388	b = 296
c = 56 445	c = 2013	c = 2105	c = 2201	c = 2301	c = 2405	c = 2013	c = 2105

In den letzten drei Zeilen haben sich in allen 8 Fällen Jahrtausendtrios ergeben.

Es gibt also genau 8 Jahrtausendtrios.

2. Lösung

Die drei natürlichen Zahlen mögen a, a + n, a + m sein mit n, m ∈ ℕ, n < m.

Dann soll gelten:

(1) (a + m) - a = 2001, also m = 2001,

(2) a + (a + n) = 2a + n = u², u ∈ ℕ,

(3) a + (a + m) = 2a + m = v², v ∈ ℕ,

(4) (a + n) + (a + m) = 2a + n + m = w², w ∈ ℕ.

Aus (2) und (4) folgt: w² - u² = m.

Mit (1): w² - u² = 2001 ⇔ (w - u)(w + u) = 3 · 23 · 29.

Wegen u, w ∈ ℕ und u < w gilt 0 < w - u < w + u sowie wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung von 2001 gibt es nun nur die folgenden vier Fälle der Zerlegung von 2001 in zwei Faktoren. Aus diesen Faktoren in der zweiten und dritten Spalte lassen sich dann w und u berechnen. Wegen (1), (2) und (3) liegt v zwischen u und w. Dies liefert die Eintragungen der letzten Tabellenspalte.

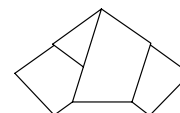
	w - u	w + u	w	u	mögliche Werte für v
Fall 1	1	2001	1001	1000	keine
Fall 2	3	667	335	332	334, 333
Fall 3	23	87	55	32	54, 53, 52, ... 35, 34, 33
Fall 4	29	69	49	20	48, 47, 46, ... 23, 22, 21

Aus (2), (3) und (4) folgt: (5) u² + v² - w² = 2a.

Dies ist eine gerade natürliche Zahl. Die obige Tabelle zeigt, dass u immer gerade ist. Die Bedingung (5) kann daher höchstens erfüllt werden, wenn v und w zugleich gerade oder zugleich ungerade sind. Denn nur in diesen Fällen ist v² - w² selbst eine gerade Zahl. Da w gemäß Tabelle immer ungerade sein muss, kommen auch nur **ungerade** Werte für v in Frage.

Für diese Werte ergeben sich in der sechsten Spalte der folgenden Tabelle die möglichen Werte von a und mit Hilfe von (2) die zugehörigen Werte von n in der siebten Spalte. Die achte und neunte Spalte liefern dann b bzw. c.

	w	u	v	u ² +v ² -w ² =2a	a	n = u ² - 2a	b = a + n	c = a + 2001
Fall 2	335	332	333	108888	54444	1336	55780	56445
Fall 3	55	32	bis 43	negativ				
			45	24	12	1000	1012	2013
			47	208	104	816	920	2105
			49	400	200	624	824	2201
			51	600	300	424	724	2301
			53	808	404	216	620	2405
Fall 4	49	20	bis 43	negativ				
			45	24	12	376	388	2013
			47	208	104	192	296	2105



Die systematische Untersuchung liefert somit acht mögliche Trios (a; b; c), nämlich:

(12;388;2013), (12;1012;2013), (104;296;2105), (104;920;2105), (200;824;2201), (300;724;2301),
(404;620;2405), (54444;55780;56445).

Die Probe zeigt, dass alle acht Trios die in der Aufgabenstellung geforderten Bedingungen erfüllen.