2000

Runde 2

Aufgabe 1

Auf einer Tafel stehen 40 positive, ganze Zahlen in acht Zeilen und fünf Spalten angeordnet.

Die Zahlen dürfen nur auf folgende zwei Arten abgeändert werden:

(Z) Alle Zahlen einer Zeile werden verdoppelt.

(S) Alle Zahlen einer Spalte werden um 1 vermindert.

Kann man so erreichen, dass 40-mal die Zahl Null auf der Tafel steht?

Lösung:

Man kann erreichen, dass 40-mal die Zahl Null auf der Tafel steht. Das folgende Verfahren hat zunächst das Ziel, schrittweise alle Zahlen einer beliebigen Spalte „auf Null zu bringen“. Beschrieben wird nun das Verfahren für die i-te Spalte (i = 1...5) :

n sei die kleinste positive ganze Zahl, die in der i-ten Spalte vorkommt. Diese Zahl kann möglicherweise in mehreren Feldern der Spalte vorkommen.

<u>Schritt 1:</u> Man wendet (n – 1)-mal die Umformungsregel (S) auf die i-te Spalte an.

Dadurch werden alle Zahlen der Spalte um n – 1 vermindert. Die Felder, in denen die Zahl n stand, enthalten nun jeweils eine Eins. Alle anderen Felder enthalten Zahlen größer als 1.

<u>Schritt 2:</u> Man wendet die Umformungsregel (Z) einmal auf diejenigen <u>Zeilen</u> an, deren Felder in der i-ten Spalte eine Eins enthalten.

Die Felder der i-ten Spalte, die eine Eins enthielten, enthalten nach Schritt 2 jeweils eine Zwei, der Inhalt aller anderen Felder der Spalte bleibt unverändert.

Die Zahlen der veränderten Zeilen werden verdoppelt, bleiben also positive ganze Zahlen.

<u>Schritt 3:</u> Man wendet die Umformungsregel (S) einmal auf die i-te Spalte an.

Nun stehen in den gleichen Feldern wie nach Schritt 1 wiederum Einsen. In allen anderen Feldern haben sich die Zahlen um 1 vermindert. Möglicherweise sind dadurch in der i.-ten Spalte weitere Felder mit Einsen hinzugekommen.

<u>Schritt 4:</u> Man wiederholt Schritt 2 und Schritt 3 so lange, bis in allen Feldern der i-ten Spalte nur Einsen stehen.

Dies ist möglich, da sich mit jeder Durchführung der Schritte 2 und 3 in der i-ten Spalte alle Zahlen, die größer als 1 sind, um 1 vermindern und alle Felder mit Einsen nach diesen beiden Schritten wieder eine Eins enthalten.

<u>Schritt 5:</u> Man wendet die Umformungsregel (S) einmal auf die i-te Spalte an.

Nun steht in allen Feldern der Spalte die Zahl Null.

Mit diesem Verfahren bearbeitet man nacheinander alle fünf Spalten. Da eine Umformung nach der Regel (Z) sich nicht auf ein Feld auswirkt, in dem die Zahl Null steht, bleiben bereits bearbeitete Spalten unverändert.

Nach endlich vielen Schritten steht 40-mal die Zahl Null auf der Tafel.

Aufgabe 2

In einem Dreieck ABC wird durch den Mittelpunkt M der Seite AB die Senkrechte zur Winkelhalbierenden w_γ gezeichnet. Sie schneidet die Gerade AC im Punkt X und die Gerade BC im Punkt Y.

Beweise: $|AX| = |BY|$.

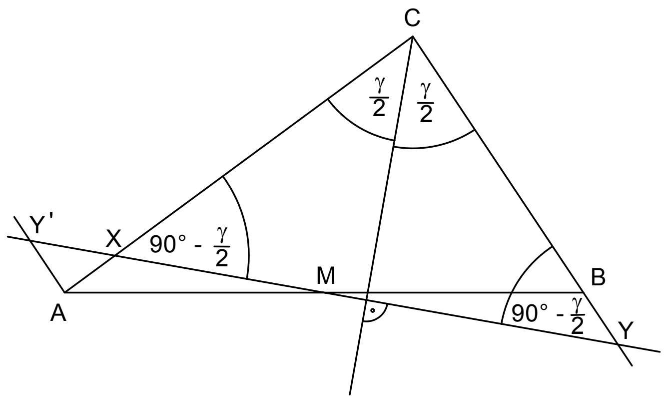
Vorbemerkung

Wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist mit der Basis AB, dann ist die Mittelsenkrechte von AB gleichzeitig auch die Winkelhalbierende. Die Orthogonale zur Winkelhalbierenden von γ durch den Mittelpunkt der Strecke AB ist dann die Gerade (AB). Die Punkte X und Y stimmen in diesem Fall mit dem Punkt A bzw. B überein. Die Strecken AX und BY haben dann die Länge 0.

Bei den folgenden Lösungen wird vorausgesetzt, dass im Dreieck ABC die Seiten AC und BC nicht gleich lang sind. Außerdem wird angenommen, dass AC die längere Seite sei.

1. Lösung

Im Dreieck ABC wird die Halbierende des Winkels ACB gezeichnet. Die Orthogonale zu dieser Winkelhalbierenden durch den Mittelpunkt M der Strecke AB schneidet die Geraden (AC) und (BC) in den Punkten X und Y.



Das Dreieck MYB wird am Punkt M gespiegelt. Dabei fällt B auf A, M bleibt fest, der Bildpunkt von Y sei Y'. Y' liegt auf der Geraden (XY).

Auf Grund der Abbildungseigenschaften der Punktspiegelung gilt:

(1) $\quad |BY| = |AY'|$,

(2) $\quad w(BYM) = w(AY'M) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Die Winkel $\measuredangle$ MXC und $\measuredangle$ Y'XA sind Scheitelwinkel und deshalb gleich groß.

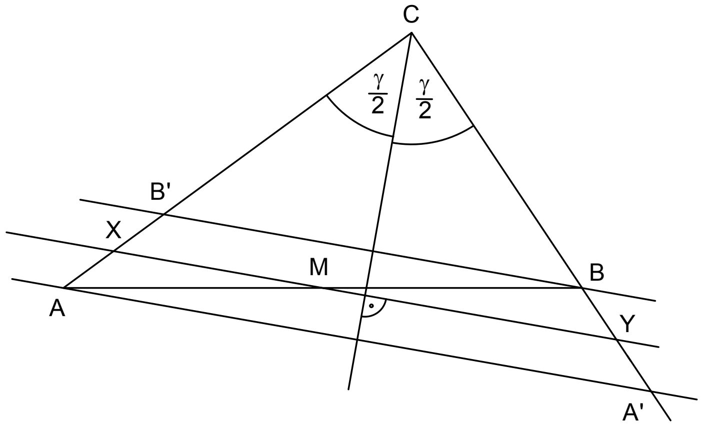
Es gilt also auch $\quad w(MXC) = w(Y'XA) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Wegen der übereinstimmenden Größe der Winkel $\measuredangle$ Y'XA und $\measuredangle$ AY'X ist das Dreieck XY'A gleichschenklig mit der Basis XY'.

Die Schenkel AX und AY' sind gleich lang. Wegen Eigenschaft (1) gilt also $|AX| = |AY'| = |BY|$.

2. Lösung

Durch die Punkte A und B werden ebenfalls die Orthogonalen zur Winkelhalbierenden w_γ gezeichnet. Die Schnittpunkte mit den Geraden (AC) und (BC) werden mit B' bzw. A' bezeichnet. Die drei Geraden (AA'), (YX) und (B'B) sind parallel zueinander, da sie alle zur Winkelhalbierenden orthogonal sind.



Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AB und liegt auf der Geraden (XY). Die Gerade (XY) ist deshalb die Mittelparallele der beiden Geraden (AA') und (B'B). Die Mittelparallele halbiert jede Querstrecke, deren Endpunkte auf (AA') bzw. (BB') liegen.

Es gilt deshalb: $|AX| = |XB'|$ und $|A'Y| = |YB|$. (1)

Die Winkelhalbierende w_γ ist die gemeinsame Symmetrieachse der Dreiecke AA'C, BB'C und XYC.

Durch die Spiegelung an der Winkelhalbierenden fallen die Punkte A, B und X auf die Punkte A', B' und Y und umgekehrt.

Daraus folgt: $|AX| = |A'Y|$ und $|XB'| = |YB|$. (2)

Aus (1) und (2) $|AX| = |A'Y| = |YB|$.

Dies war zu zeigen.

3. Lösung

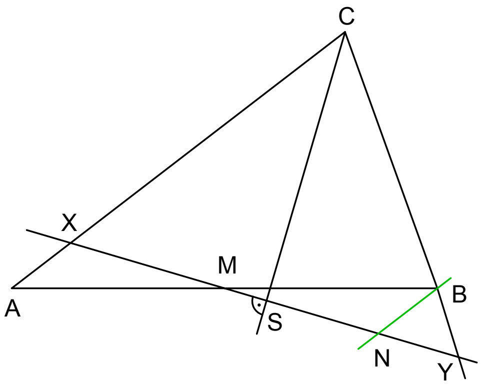
S sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit der Geraden (XY).
Das Dreieck XSC ist nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent zum Dreieck YCS, da

$|CS| = |CS|$,

$w(XCS) = w(SCY) = \frac{\gamma}{2}$,

$w(CSX) = w(YSC) = 90^{\circ}$ gilt.

Daher ist auch $w(YXC) = w(CYX)$. (*)



Die Parallele (Hilfslinie) zu AC durch B schneidet die Strecke XY in N.

Nach dem Kongruenzsatz wsw ist das Dreieck AMX kongruent zum Dreieck BMN, da

$|MA| = |MB|$, (nach Voraussetzung)
$w(XMA) = w(NMB)$, (Scheitelwinkel)
$w(MAX) = w(MBN)$. (Wechselwinkel)

Daher gilt: $|AX| = |BN|$. (**).

Wegen der Parallelität der Geraden (NB) und (AC) ist $w(YNB) = w(YXC)$ (Stufenwinkel).

Wegen (*) gilt $w(YXC) = w(CYX)$ und damit auch $w(YNB) = w(BYN)$. Also ist das Dreieck NYB gleichschenklig mit Basis NY. Daher gilt $|BN| = |BY|$ und wegen (**) auch $|AX| = |BY|$.

Aufgabe 3

Eine Azteken-Pyramide hat die Form eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grund- und Deckfläche. Die Grundfläche besitzt eine Kantenlänge von 81 m, die Deckfläche eine Kantenlänge von 16 m. Die Seitenkanten sind 65 m lang. Eine Außentreppe für Touristen führt zur Deckfläche des Pyramidenstumpfs. Sie beginnt an einer Ecke der Grundfläche und überquert jede Seitenfläche genau einmal, bevor sie an einer Ecke der Deckfläche endet. Dabei ist ihre Steigung überall gleich.

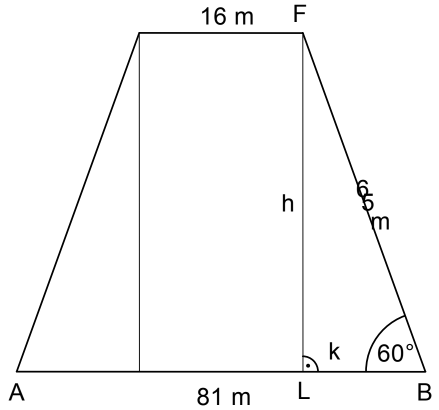
Welche Entfernungen haben die Punkte, an denen die Treppe die Kanten trifft, von den zugehörigen Eckpunkten der Grundfläche?

Vorbemerkung

Alle Streckenlängen werden in Meter angegeben.

1. Lösung

Die Seitenflächen des Pyramidenstumpfs sind gleichschenklige Trapeze. Die parallelen Seiten haben die Längen 81 bzw. 16, die Schenkel haben die Länge 65. Die Trapezhöhe sei h.

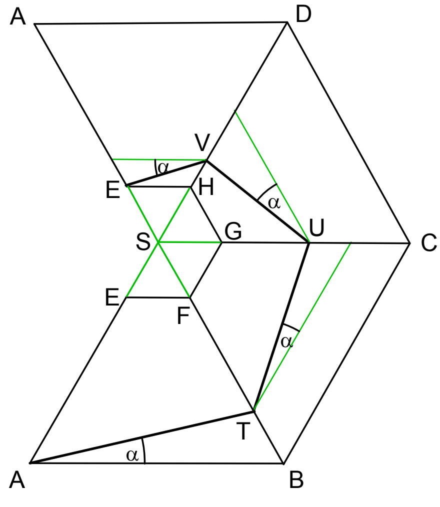


Dann ergibt sich für die Länge k

$$k = \frac{1}{2} \cdot (81 - 16) = 32{,}5\,.$$

Folglich hat das rechtwinklige Dreieck LBF eine Kathete, die halb so lang ist wie die Hypotenuse. Der von dieser Kathete und der Hypotenuse eingeschlossene Winkel hat demnach die Weite 60°. Die Seitenflächen des Pyramidenstumpfs sind also gleichschenklige Trapeze mit Basiswinkeln der Weite 60°.

Vier dieser Trapeze bilden den Mantel des Pyramidenstumpfs. Wegen der Basiswinkel mit der Weite 60° schneiden sich die Verlängerungen der Trapezschenkel alle in einem Punkt S ebenfalls unter Winkeln der Weite 60°. Die Dreiecke EFS, FGS, GHS und HES sind demnach gleichseitig mit den Seitenlängen |EF| = 16.
Außerdem gilt |AS| = |BS| = |CS| = |DS| = 81.



Die Treppe beginne in Punkt A und sei mit einem Winkel der Weite α gegen die Grundkante AB ansteigend. Sie trifft die Kante BF im Punkt T. Von T aus wird die Treppe unter dem Winkel derselben Weite gegenüber der Parallele zur Grundkante BC fortgesetzt und erreicht die Kante CG im Punkt U. Entsprechend setzt man die Treppe über die dritte und vierte Seitenfläche des Pyramidenstumpfs fort. Sie trifft die Kante DC im Punkt V und die Kante AE nach Voraussetzung im Punkt E der Deckfläche.

Die Dreiecke ATS, TUS, UVS und VES sind alle ähnlich, denn sie haben je einen Winkel der Weite 60° bei S und je einen Winkel der Weite $60° - \alpha$ bei A bzw. T bzw. U bzw. V.

Folglich gilt:

|AS| : |ST| = |ST| : |SU| und |ST| : |SU| = |SU| : |SV| und |SU| : |SV| = |SV| : |SE|.

Mit |ST| = x, |SU| = y und |SV| = z erhält man daraus:

(1) 81 : x = x : y,

(2) x : y = y : z,

(3) y : z = z : 16.

Aus (3) folgt $y = \frac{z^2}{16}$.

Eingesetzt in (2) ergibt $x = \frac{y^2}{z} = \frac{z^3}{256}$.

Setzt man beides in (1) ein und vereinfacht, so entsteht schrittweise

$$81y = x^2 \Leftrightarrow 81\frac{z^2}{16} = \frac{z^6}{256^2} \Leftrightarrow z^4 = 331776 .$$

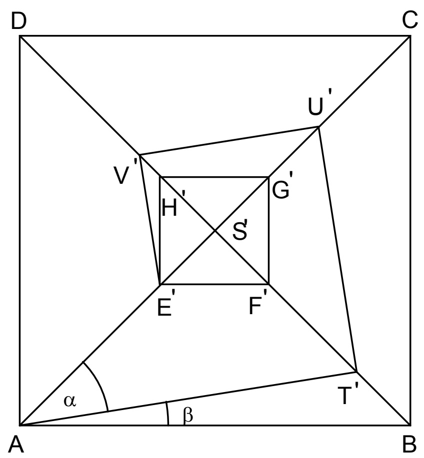
Da z als Streckenlänge eine positive Zahl ist, folgt z = 24.

Daraus ergibt sich schließlich: y = 36 und x = 54

Demzufolge gilt: |BT| = |SB| – x = 27 , |CU| = |SC| – y = 45, |DV|= |SD| – z = 57.

2. Lösung

Die Treppe beginnt in einer Ecke A der Grundfläche ABCD und endet nach Aufgabenstellung im Punkt E der Deckfläche EFGH. Die Seitenkanten der AE, BF, CG und DH des Pyramidenstumpfes schneiden sich in der Spitze S der Gesamtpyramide. BF wird von der Treppe in T, CG in U und DH in V geschnitten.



Im nebenstehenden Bild ist der Sachverhalt im Grundriss dargestellt. Von den über der Grundebene liegenden Punkten wie E, F usw. hat man die Bilder E', F' usw.

Je kleiner die Winkelweite α = w(T'AS') ist, desto größer ist der Winkel β = w(BAT'), desto höher liegt T über der Grundebene und desto kürzer ist der horizontale Abstand von A zu T', desto steiler verläuft also die Treppe.

Entsprechendes gilt für die Wegabschnitte auf den drei anderen Seitenflächen der Pyramide.

Wegen der Symmetrie der Pyramide muss also

w(U'T'S') = w(V'U'S') = w(E'V'S') = α sein.

Da die Diagonalen im Quadrat zueinander orthogonal sind, sind auch die aufeinander folgenden Abschnitte AT', T'U', U'V' und V'E' zueinander orthogonal.

Nach dem Höhensatz gilt in den rechtwinkligen Dreiecken AT'U', T'U'V' und U'V'E' mit $t = |S'T'|$, $u = |S'U'|$ und $v = |S'V'|$ das Gleichungssystem:

$$t^2 = |S'A| \cdot u \qquad (1)$$
$$u^2 = t \cdot v \qquad (2)$$
$$v^2 = |S'E'| \cdot u \qquad (3).$$

Quadriert man die erste Gleichung und setzt die zweite ein, so ergibt sich

$$t^3 = |S'A|^2 \cdot v .$$

Löst man die erste Gleichung nach u auf und setzt in die dritte ein, so erhält man

$$v^2 = \frac{t^2}{|S'A|} \cdot |S'E'|.$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminiert man v und erhält

$$t = \sqrt[4]{|S'A|^3 \cdot |S'E|}$$

und daraus mit den Werten $|S'A| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 81$, $|S'E| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 16$ den Wert $t = 27\sqrt{2}$ und mit den Gleichungen (1) und (2) $u = 18\sqrt{2}$ und $v = 12\sqrt{2}$.

Daraus ergibt sich: $|BT'| = |S'B| - t = |S'A| - t = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 27$ und entsprechend

$$|CU'| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 45 \text{ sowie } |DV'| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 57 .$$

Um nun die gesuchten Abstände auf den Seitenkanten des Pyramidenstumpfes zu finden, berechnen wir seine Höhe:

$$|AE'|^2 + |E'E|^2 = |AE|^2 \text{ mit } |AE'| = \frac{81-16}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 65, \text{ also}$$

$$|EE'| = |AE'| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 65 .$$

Das Dreieck AE'E ist also gleichschenklig-rechtwinklig. Seine Hypotenuse ist $\sqrt{2}$ - mal so lang wie seine Katheten. Dasselbe gilt für die Dreiecke BT'T, CU'U und DV'V.

Daraus folgt das Ergebnis $|BT| = \sqrt{2} \cdot |BT'| = 27, |CU| = 45, |DV| = 57$. Die Schnittpunkte der Treppe mit den Kanten der Pyramide haben von den Eckpunkten der Grundfläche die Abstände 27m, 45m und 57m.

Aufgabe 4

Zeige: Eine Primzahl p ist genau dann die Differenz von zwei dritten Potenzen ganzer Zahlen, wenn $p = 2$ ist oder wenn $\frac{p-1}{6}$ als Summe $1 + 2 + 3 + ... + n$ $(n \in \mathbb{N})$ geschrieben werden kann.

Lösung:

"$\Rightarrow$": Die Primzahl p sei Differenz zweier Kubikzahlen, also $p = a^3 - b^3$ für ganze Zahlen a und b.

Da p eine Primzahl ist, kann weder a noch b gleich 0 sein.

Wäre $a < 0$, so müsste auch $b < 0$ sein, da sonst $a^3 - b^3 < 0$ wäre.
Dann ist aber $p = a^3 - b^3 = (-b)^3 - (-a)^3$, und somit ist p eine Differenz von **positiven** Kubikzahlen. Wir können also annehmen, dass $a > 0$ ist. Es bleiben noch zwei Möglichkeiten: $b > 0$ bzw. $b < 0$.

Wenn $b < 0$, so kann man $c = -b$ setzen, damit ergibt sich $p = a^3 + c^3$. Also ist p die *Summe* von zwei positiven Kubikzahlen.

Wenn $b > 0$ ist, so p die *Differenz* von zwei positiven Kubikzahlen.

Somit haben wir die beiden folgenden Fälle:

Fall 1: $p = a^3 + c^3$ ist ***Summe*** von zwei positiven Kubikzahlen. Für p ergibt sich hier die Zerlegung $p = (a+c) \cdot (a^2 - ac + c^2)$. Weil p eine Primzahl ist, muss $a + c = 1$ oder $a + c = p$ sein.

- Falls $a + c = 1$, dann müsste a oder c gleich 0 sein, ein Widerspruch.
- Falls $a + c = p$, dann muss in der Zerlegung $p = (a+c) \cdot (a^2 - ac + c^2)$ der Faktor $(a^2 - ac + c^2)$ gleich 1 sein. Aus $1 = a^2 - ac + c^2 > a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$ folgt jetzt $(a-c)^2 = 0$, also $a = c$.
  Somit ist $p = a + c = 2a$ eine gerade Primzahl, folglich $p = 2$.

Fall 2: $p = a^3 - b^3$ ist ***Differenz*** von zwei positiven Kubikzahlen. Dann ist $p = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ und somit $a - b = 1$ oder $a - b = p$.

- Falls $a - b = 1$, dann ist $p = (b+1)^3 - b^3 = 3b \cdot (b+1) + 1$, also $\frac{p-1}{6} = \frac{b(b+1)}{2} = 1 + \ldots + b$.
- Falls $a - b = p$, dann ist $(a^2 + ab + b^2) = 1$. Es müsste nun a oder b gleich 0 sein, ein Widerspruch.

„$\Leftarrow$“ : Beweis der Rückrichtung

- Für die Primzahl p gebe es eine Zahl n mit $\frac{p-1}{6} = 1 + \ldots + n$. Dann ist $\frac{p-1}{6} = \frac{n(n+1)}{2}$, also ist $p = 3n(n+1) + 1 = (n+1)^3 - n^3$ eine Differenz von zwei Kubikzahlen.
- Wenn schließlich $p = 2$, so ist $p = 1^3 - (-1)^3$, also ebenfalls eine Differenz von zwei dritten Potenzen.

Variante für Fall 2:

Erkennt man die Zerlegung $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$ nicht, so kann man in diesem Fall dennoch wie folgt zu einer Lösung der Aufgabe kommen: Da $a \le b$ gibt es eine Zahl $k \le 0$, so dass a = b + k.

Damit gilt $a^3 - b^3 = (b+k)^3 - b^3 = 3bk^2 + 3b^2k + k^3 = k(3bk + 3b^2 + k^2)$.

Da $p = a^3 - b^3 = k(3bk + 3b^2 + k^2)$ eine Primzahl ist, gibt es wieder zwei Möglichkeiten:

k = 1 oder k = p.

Falls k = 1, dann ist a = b + 1 und $p = a^3 - b^3 = 3b(b+1)+1$, somit $\frac{p-1}{6} = \frac{b(b+1)}{2} = 1 + \ldots + b$.

Falls k = p, dann muss der zweite Faktor $3bk + 3b^2 + k^2$ gleich 1 sein. Da $b \ge 0$ und $k \ge 0$, folgt k = 1 und b = 0. Somit muss p = 1 sein und ist keine Primzahl.