2000

Runde 1

Aufgabe 1

In fünf Schalen liegen jeweils drei Kugeln. Anna und Bernd ziehen abwechselnd. Bei einem Zug müssen aus einer Schale eine, zwei oder drei Kugeln entnommen werden.

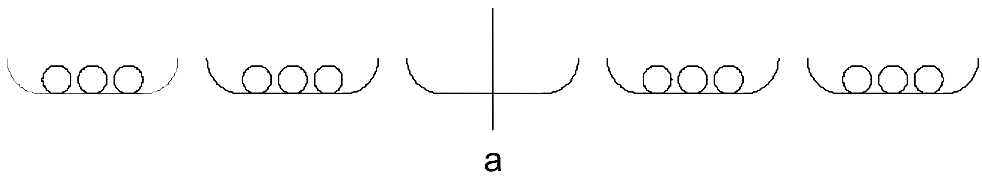
Wer die letzte Kugel wegnimmt, gewinnt. Wenn Anna anfängt, gewinnt sie immer.

Wie erklärst du das?

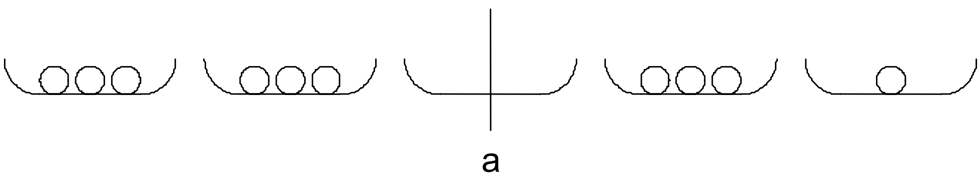
Lösung

Die fünf Schalen und die drei Kugeln stehen nebeneinander.

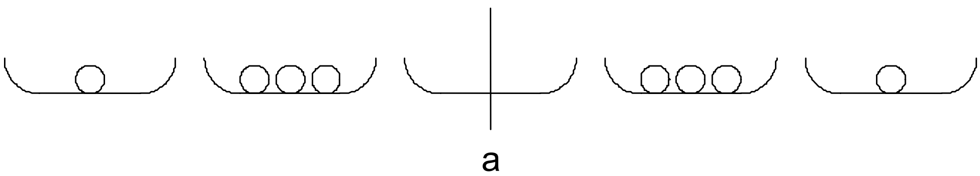
Anna zieht alle drei Kugeln aus einer Schale, z. B. der dritten Schale. Bernd findet vor seinem ersten Zug also folgende Lage vor.



Die vier Schalen, in denen sich noch Kugeln befinden, sind symmetrisch zur Achse a.
Bernd ist am Zug. Er nimmt z. B. aus der 5. Schale zwei Kugeln.

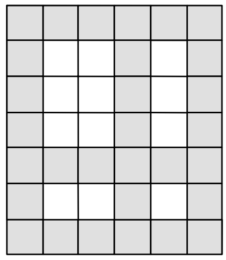


Die Gewinnstrategie von Anna ist nun, nach Bernds Zug so zu ziehen, dass bezüglich a wieder eine symmetrische Verteilung entsteht. Anna zieht aus der ersten Schale zwei Kugeln.



Zieht Bernd Kugeln, so sind die zur Achse a symmetrischen Kugeln noch vorhanden und Anna zieht diese. Die Zahl der Kugeln nimmt bei jedem Zug ab. Nach endlich vielen Schritten wird die letzte Kugel gezogen. Nach der beschriebenen Gewinnstrategie zieht Anna diese letzte Kugel und gewinnt damit das Spiel.

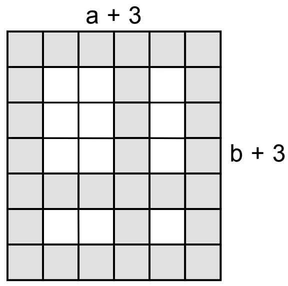
Aufgabe 2



Mit gleich großen schwarzen und weißen quadratischen Platten soll ein rechteckiges Muster gelegt werden. Die Platten am Rand sowie zusätzlich eine waagerechte und eine senkrechte Reihe sollen schwarz sein, alle übrigen Platten sind weiß (siehe Abbildung).

Aus wie vielen Platten kann ein solches Muster bestehen, wenn gleich viele schwarze und weiße Platten verwendet werden sollen?

1. Lösung



Vertikal und horizontal sind jeweils drei Reihen mit schwarzen Platten belegt. Daher setzen wir für die Seitenlängen des Rechtecks a + 3 und b + 3. Die Anzahl der weißen Platten beträgt dann $a\cdot b$.

Die Anzahl der Felder, in denen sich horizontale und vertikale schwarze Reihen treffen, beträgt $3\cdot 3 = 9$. Außerdem gibt es noch $3\cdot a + 3\cdot b$ schwarze Platten, also insgesamt: $3\cdot a + 3\cdot b + 9$.

Die Bedingung lautet also: $a\cdot b = 3\cdot a + 3\cdot b + 9$

oder

$$a\cdot(b-3) = 3b + 9\,. \qquad (*)$$

Da die rechte Seite positiv und a nicht negativ ist, müssen beide Faktoren auf der linken Seite positiv sein, also: $b > 3$ und entsprechend $a > 3$.

Durch weitere Umformungen von (*) erhalten wir:

$$a\cdot(b-3) = 3b - 9 + 18$$
$$a\cdot(b-3) = 3\cdot(b-3) + 18$$
$$a\cdot(b-3) - 3\cdot(b-3) = 18$$
$$(a-3)\cdot(b-3) = 18.$$

Da beide Faktoren positive ganze Zahlen sind und das Produkt von a – 3 und b – 3 den Wert 18 besitzt, kann keiner der beiden Faktoren größer als 18 sein. Daraus folgt sowohl für a als auch für b die Einschränkung $4 \le a, b \le 21$.

Um nun alle Möglichkeiten zu finden, löst man (*) nach a auf und setzt für b der Reihe nach die Zahlen 4 bis 21 ein. Erhält man einen ganzzahligen Wert zwischen 4 und 21 für a, so hat man eine Lösung gefunden.

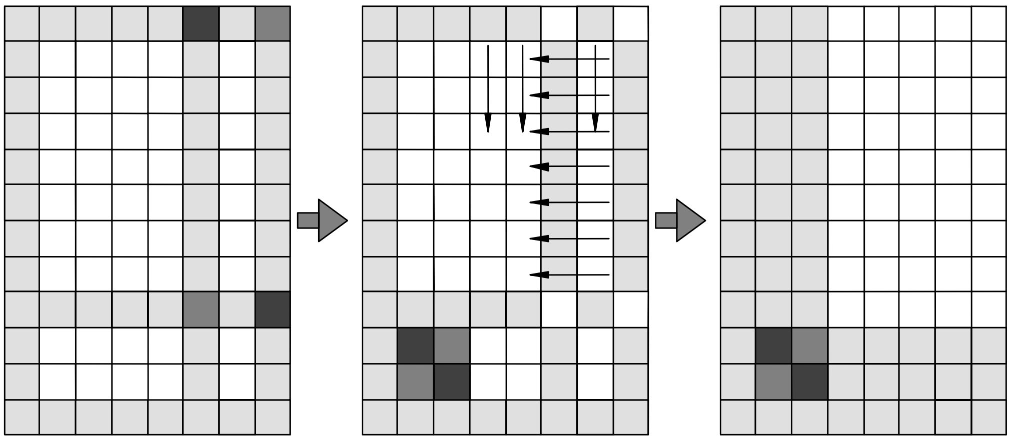
Es ergibt sich:

a	21	12	9	6	5	4
b	4	5	6	9	12	21

Für die Seitenlängen des Rechtecks sind also die Paare (24|7), (15|8) und (12|9) möglich. Die Anzahl der Platten beträgt dann 168, 120 bzw. 108.

2. Lösung

Aus den nachfolgenden Bildern entnimmt man den folgenden Ansatz, wobei u und v die Seitenlängen des Rechtecks mit $u, v \in N$ und $u > 3$, $v > 3$. (Die unterschiedlichen Grautöne dienen nur der Unterscheidung und stellen jeweils schwarze Platten dar.)



Die Anzahl der schwarzen Platten beträgt $9+3\cdot(u-3)+3\cdot(v-3)$,
die Anzahl der weißen Platten $(u-3)\cdot(v-3)$.

Die diese beiden Anzahlen übereinstimmen sollen, muss gelten:

$$9+3\cdot(u-3)+3\cdot(v-3)=(u-3)\cdot(v-3)$$
$$3u=(v-3)\cdot(u-3-3)$$
$$3u=(v-3)\cdot(u-6)$$
$$\frac{3u}{u-6}=v-3.$$

Zur Vereinfachung des Bruches können wir umformen:

$$\frac{3u-18+18}{u-6}=v-3$$
$$\frac{3u-18}{u-6}+\frac{18}{u-6}=v-3$$
$$3+\frac{18}{u-6}=v-3$$
$$v=\frac{18}{u-6}+6.$$

Die rechte Seite der Gleichung stellt genau dann eine ganze Zahl dar, wenn der Nenner u – 6 ein Teiler von 18 ist. Für u – 6 kommen also nur die Einsetzungen –18, –9, –6, –3, –2, –1, 1, 2, 3, 6, 9 und 18 in Frage. Da u und v die Anzahlen der Platten längs der Rechtecksseiten sind, müssen u und v ***natürliche*** Zahlen sein.

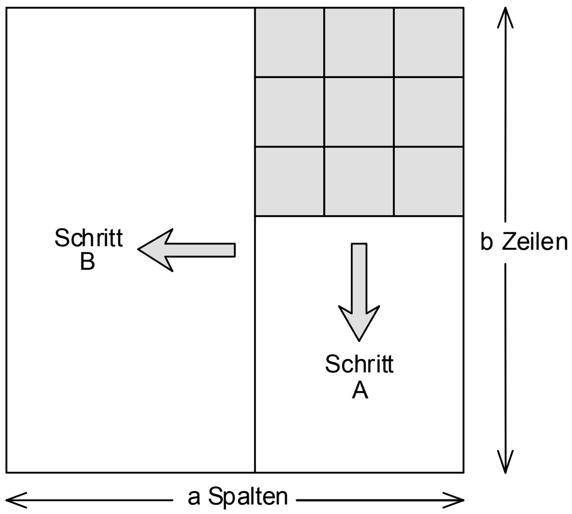
u – 6	–18	–9	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6	9	18
u	–12	–3	0	3	4	5	7	8	9	12	15	24
v	5	4	3	0	–3	–12	24	15	12	9	8	7

Aus der Tabelle ergeben sich drei verschiedene Rechtecke, bei denen längs der Seiten 24 und 7, 15 und 8 bzw. 12 und 9 Platten liegen. Man kann also drei verschiedene Rechtecke mit 168, 120 und 108 Platten legen, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen.

3. Lösung

Nach Aufgabenstellung enthält das rechteckige Muster außer dem Rand eine waagerechte Reihe (hier **Zeile** genannt) und eine vertikale Reihe (hier **Spalte** genannt) aus schwarzen Platten. Das kleinste mögliche Muster enthält also neun Platten: drei Zeilen und drei Spalten. Alle neun Platten müssen schwarz sein.

Jedes beliebige Rechteck aus a Spalten und b Zeilen können wir in zwei Schritten aus dem minimalen Rechteck gewinnen:



In Schritt A dehnen wir das minimale Rechteck nach unten aus, bis wir die gewünschten b Spalten haben. Das dann gewonnene Rechteck hat drei Spalten und b Reihen, nach Aufgabenstellung müssen alle 3b Platten schwarz sein, da ja außer den Randspalten eine weitere Spalte schwarz sein muss.

In Schritt B dehnen wir das so entstandene Rechteck nach links um $n = a - 3$ neue Spalten aus. In jeder neuen Spalte muss die oberste und die unterste, sowie eine bestimmte mittlere Platte schwarz sein, die restlichen $b - 3$ neuen Platten müssen weiß sein. Pro Spalte kommen also $b - 6$ mehr weiße als schwarze Platten hinzu, in n Spalten also $n \cdot (b-6)$ mehr weiße als schwarze Platten.

Damit am Ende gleich viel schwarze wie weiße Platten vorhanden sind, muss in Schritt B der Überhang von $3 \cdot b$ schwarzen Platten abgebaut werden, der ja vor Schritt B vorhanden ist. Es muss die Anzahl $n \cdot (b-6)$ der überzähligen weißen Platten in Schritt B gerade gleich groß wie dieser Überhang $3 \cdot b$ der schwarzen Platten vor Schritt B, also $n \cdot (b-6) = 3 \cdot b$.

Daraus ergibt sich unmittelbar, dass $b \geq 7$ sein muss, sonst wäre die linke Seite dieser Gleichung ja nicht positiv. Außerdem könne wir annehmen, dass $b \leq a$ ist. Im anderen Fall drehen wir das Rechteck einfach um 90°.

<u>Behauptung:</u> Es muss $b \leq 10$ sein.

Je größer nämlich die Zeilenzahl b ist, desto weniger neue Spalten braucht man in Schritt B um den Überhang der schwarzen Platten abzubauen. Hat man nämlich eine Zeile mehr, so hat man zwar zu Beginn von Schritt B auch 3 schwarze Platten mehr. In jeder zusätzlichen Spalte ist aber auch eine weitere überschüssige weiße Platte vorhanden. Nach drei Spalten hat man also bereits den zusätzlichen Überhang von 3 schwarzen Platten abgebaut, in allen weiteren Spalten hilft die weitere weiße Platte den Überschuss der schwarzen Platten schneller auszugleichen. Somit braucht man mit mehr Zeilen weniger Spalten. Dies kann man auch an der folgenden Tabelle erkennen, in der in Abhängigkeit von $b \geq 7$ die Zahl $n = \frac{3b}{b-6}$ der neuen Spalten und $a = n + 3$ berechnet wurde:

b	7	8	9	10	11	12	13	14	...
n	21	12	9	7,5	6,5	6	ca. 5,6	5,25	...
a	24	15	12	10,5	9,5	9	ca. 8,6	8,25	...

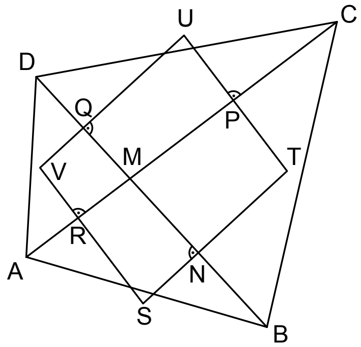
Aus der Tabelle erkennt man, dass für alle $b \geq 11$ bereits $a < b$ ist. Da mit wachsendem b aber a immer kleiner wird, ergibt sich aus $b \leq a$, dass $b \leq 10$ sein muss, und die Behauptung ist bewiesen.
Es bleiben also nur $b = 7$, $b = 8$, $b = 9$ und $b = 10$ übrig. Der Tabelle entnimmt man, dass für $b=10$ die Anzahl der Spalten 9,5 sein müsste - da die Platten aber nicht halbiert werden sollen, ist dieser Fall ausgeschlossen. Es bleiben die Fälle $b = 7$, $b = 8$, $b = 9$ mit zugehöriger Spaltenzahl $a = 24$, $a = 15$, $a = 12$ und zugehöriger Plattenzahl 168, 120 bzw. 108.

Aufgabe 3

Das Innere eines Vierecks ABCD wird durch die Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt. Die Umkreismittelpunkte dieser Teildreiecke bilden das Viereck STUV.

Welche Eigenschaften muss das Viereck ABCD haben, damit das Viereck STUV ein Quadrat ist?

Lösung



Der Schnittpunkt der Vierecksdiagonalen heiße M.

Die Punkte S und T sind die Umkreismittelpunkte der Teildreiecke ABM und BCM. Diese beiden Punkte liegen daher auf derselben Mittelsenkrechten zu BM. Die Punkte U und V sind die Umkreismittelpunkte der Teildreiecke CDM und DAM. Sie liegen auf derselben Mittelsenkrechten zu DM. Da M auf BD liegt und sowohl ST als auch UV damit orthogonal zu BD sind, ist die Parallelität von ST und UV gesichert.

Analog weist man nach, dass die Strecken TU und VS parallel sind.

Das Viereck STUV hat somit zwei Paare von parallelen Gegenseiten und ist daher ein Parallelogramm.

Die Strecke ST schneidet BM im Mittelpunkt N, die Strecke TU schneidet CM im Mittelpunkt P, die Strecke UV schneidet DM im Mittelpunkt Q, die Strecke VS schneidet AM im Mittelpunkt R.

Das Viereck NTPM hat bei den Eckpunkten N und P jeweils einen rechten Winkel. Die beiden Winkel mit den Scheiteln T und M haben daher nach dem Winkelsummensatz bei Vierecken zusammen die Weite 180°. Der Winkel mit dem Scheitel T ist also genau dann ein rechter Winkel, wenn der Winkel bei M ein rechter Winkel ist.

Das Parallelogramm STUV ist also genau dann ein Rechteck, wenn sich die Diagonalen des Vierecks ABCD rechtwinklig schneiden.

Genau dann, wenn das Viereck STUV ein Rechteck ist, gilt: ST ist parallel zu AC und TU ist parallel zu BD.

Wegen |AR| = |RM| und |MP| = |PC| sowie |RP| = |ST| folgt:

$$|ST| = |RP| = |RM| + |MP| = \frac{1}{2}|AM| + \frac{1}{2}|MC| = \frac{1}{2}|AC|.$$

Wegen |BN| = |NM| und |MQ| = |QD| sowie |NQ| = |TU| folgt:

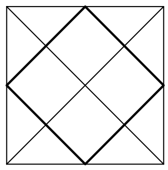
$$|TU| = |NQ| = |NM| + |MQ| = \frac{1}{2}|BM| + \frac{1}{2}|MD| = \frac{1}{2}|BD|.$$

Das Rechteck STUV hat also genau dann gleich lange Seiten ST und TU, wenn die Diagonalen AC und BD gleich lang sind.

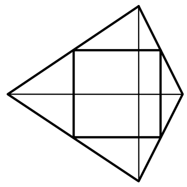
Daher gilt: Das Viereck STUV ist genau dann ein Quadrat, wenn das Viereck ABCD gleich lange und orthogonale Diagonalen hat.

Bemerkung

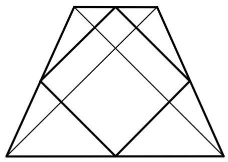
Vierecke mit gleich langen und orthogonalen Diagonalen können höchst unterschiedliche Formen haben:



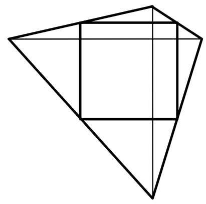
Quadrat



Drachenviereck



Gleichschenkliges Trapez



„Allgemeines Viereck“

Aufgabe 4

Setzt man vor eine beliebige natürliche Zahl ihr Achtfaches, ergibt sich eine neue Zahl. So entsteht beispielsweise aus 12 die Zahl 9612.

Gibt es unter den so gebildeten Zahlen unendlich viele Quadratzahlen?

Lösungen

Behauptung: Unter den nach der Vorschrift gebildeten Zahlen sind unendlich viele Quadratzahlen.

Vorbemerkung:

Es genügt ein Bildungsgesetz für natürliche Zahlen anzugeben, das die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt und das beliebig viele Quadratzahlen erzeugt. Dabei ist es unerheblich, ob damit alle Zahlen mit der geforderten Eigenschaft erfasst sind.

Probieren mit maximal zweistelligen Zahlen ergibt nur die Lösungen

1 →	81	$\sqrt{81} = 9$,
4 →	324	$\sqrt{324} = 18$,
9 →	729	$\sqrt{729} = 27$,
89 →	71289	$\sqrt{71289} = 267$.

Die Weiterführung der ersten drei Lösungen 1, 4 und 9 durch die Quadratzahlen 16 und 25 führt zu 12616 und 20025 und damit nicht auf Quadratzahlen.

Das gezielte Probieren mit weiteren Zahlen der Form 88...89 ergibt dann

889	→	7112889	→	$\sqrt{7112889} = 2667$,
8889	→	711128889	→	$\sqrt{711128889} = 26667$.

Es wird nun nachgewiesen, dass alle Zahlen der Form 88..89 durch das in der Aufgabenstellung beschriebene Bildungsgesetz zu Quadratzahlen führen.

1. Lösung

Es sei a eine beliebige natürliche Zahl mit n Stellen. Um das Achtfache von a vor diese n-stellige Zahl a zu setzen, müssen wir a mit 8 und mit 10^n multiplizieren und dann a addieren. Es steht die neue Zahl

$$z = 8 \cdot 10^n \cdot a + a = a \cdot (8 \cdot 10^n + 1) .$$

$8 \cdot 10^n + 1$ stellt für n = 1, 2, 3, ... die Zahlen 81, 801, 8001, ... dar und hat für größere Werte von n die Form 800...01. Alle Zahlen haben die Quersumme 9 und sind deshalb durch 9 teilbar.

$8 \cdot 10^n + 1$ hat n + 1 Stellen, $\frac{8 \cdot 10^n + 1}{9}$ hat n Stellen. Für n = 1, 2, 3, ... entstehen die Zahlen 9, 89, 889, ...

Setzt man vor die natürliche Zahl $\frac{8 \cdot 10^n + 1}{9}$ ihr Achtfaches, so entsteht die Zahl $\frac{8 \cdot 10^n + 1}{9} \cdot (8 \cdot 10^n + 1)$.

Dieser Term lässt sich umformen zu: $\frac{8 \cdot 10^n + 1}{9} \cdot (8 \cdot 10^n + 1) = \frac{(8 \cdot 10^n + 1)^2}{9} = \left(\frac{8 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$

Wie oben bereits gezeigt, ist $8 \cdot 10^n + 1$ durch 9 und damit auch durch 3 teilbar. Der Term $\frac{8 \cdot 10^n + 1}{3}$ ist also immer eine natürliche Zahl. Somit ist $\left(\frac{8 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$ für jedes n das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Es gibt demnach beliebig viele Quadratzahlen mit dem angegebenen Bildungsgesetz.

2. Lösung

Bei einer n-stelligen natürlichen Zahl a ergibt sich für die nach der Vorschrift gebildete neue Zahl z:

$$z = 8 \cdot a \cdot 10^n + a = a \cdot (8 \cdot 10^n + 1)\ .$$

Eine solche Zahl ist nun eine Quadratzahl, wenn

sowohl a und als auch $8 \cdot 10^n + 1$ Quadratzahlen sind

ODER

sich beide Zahlen so faktorisieren lassen, dass sich nach dem Zusammenfassen ein vollständiges Quadrat ergibt.

Betrachten wir also zunächst Zahlen der Form $8 \cdot 10^n + 1$ genauer.

$n = 1$	$81 = 9 \cdot 9$
$n = 2$	$801 = 9 \cdot 89$
$n = 3$	$8001 = 9 \cdot 889$
Allgemein:	Alle Zahlen sind wegen der Quersumme 9 durch 9 teilbar und es ist $8 \cdot 10^n + 1 = 9 \cdot \underbrace{8 \ldots\ldots 8}_{\text{n–1 Stellen}} 9 = 9 \cdot k$

Die Zahl $8 \cdot 10^n + 1$ hat n + 1 Stellen, die natürliche Zahl k hat n Stellen.

Wählt man nun für $n \geq 1$ als Ausgangszahl die Zahl k, so ist

$$8 \cdot k \cdot 10^n + k = k \cdot \left(8 \cdot 10^n + 1\right) = k \cdot 9 \cdot k = (3k)^2\ .$$

Damit gibt es unter den so gebildeten Zahlen unendlich viele Quadratzahlen.

3. Lösung

Ist a eine Ausgangszahl, so ist die gemäß der Aufgabenstellung neu gebildete Zahl

$$z = 8 \cdot 10^n \cdot a + a = a \cdot \left(8 \cdot 10^n + 1\right).$$

Es wird gezeigt, dass für $a_1 = 9,\ a_2 = 89,\ a_3 = 889,\ \ldots\ , a_n = \underbrace{8 \cdots 89}_{\text{n Stellen}},\ \ldots$ jeweils die neu gebildete Zahl z_n eine Quadratzahl ist.

Es ist nämlich $a_n = 10^n - \underbrace{11 \cdots 11}_{\text{n–mal Ziffer 1}} = 10^n - \left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1\right)$. Nach der Summenformel für geometrische Reihen ist $10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1 = \dfrac{10^n - 1}{10 - 1} = \dfrac{10^n - 1}{9}$, also

$$a_n = 10^n - \frac{10^n - 1}{9} = \frac{9 \cdot 10^n - \left(10^n - 1\right)}{9} = \frac{8 \cdot 10^n + 1}{9}\ .$$

Damit ergibt sich $z_n = a_n \cdot \left(8 \cdot 10^n + 1\right) = \dfrac{8 \cdot 10^n + 1}{9} \cdot \left(8 \cdot 10^n + 1\right) = \left(\dfrac{8 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$.

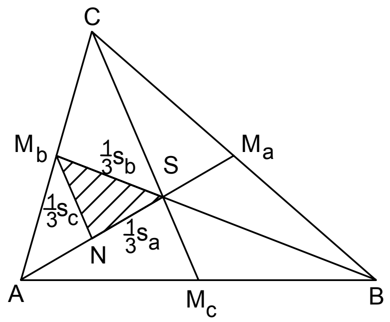
Da $8 \cdot 10^n + 1$ die Quersumme 9 besitzt und damit durch 9 teilbar ist, ist $\left(\dfrac{8 \cdot 10^n + 1}{3}\right)$ eine natürliche Zahl und $\left(\dfrac{8 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$ eine Quadratzahl.

Aufgabe 5

Aus den drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks mit dem Flächeninhalt A kann ein neues Dreieck konstruiert werden.

Zeige, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks $\frac{3}{4}A$ ist.

1. Lösung



Im Dreieck ABC werden die Seitenhalbierenden AM_a, BM_b und CM_c eingezeichnet. Ihre Längen seien s_a, s_b und s_c.

Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt S. Der Schwerpunkt S teilt jede der drei Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 von der jeweiligen Dreiecksecke aus.

Der Punkt N sei der Mittelpunkt der Strecke AS. Dann hat das Dreieck SM_bN die Seitenlängen $\frac{1}{3}s_a$ und $\frac{1}{3}s_b$. Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes ist M_bN parallel zu CS und nach dem zweiten Strahlensatz halb so lang wie die Strecke CS. Deshalb gilt $|M_bN| = \frac{1}{3}s_c$. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks werde mit A^* bezeichnet.

Die Dreiecke SM_bN und M_bAN haben gleiche Grundseitenlängen $|AN| = |NS|$ und wegen der gemeinsamen Ecke M_b auch gleiche Höhe über der Grundseite AN bzw. NS. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ASM_b gilt daher: $A_{\Delta ASM_b} = 2 \cdot A^*$.

Das Dreieck BSA hat wegen $|BS| = 2 \cdot |SM_b|$ eine doppelt so lange Grundseite wie das Dreieck SM_bA und wegen der gemeinsamen Ecke A den doppelten Flächeninhalt. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABM_b gilt daher: $A_{\Delta ABM_b} = 3 \cdot A_{\Delta ASM_b} = 6 \cdot A^*$.

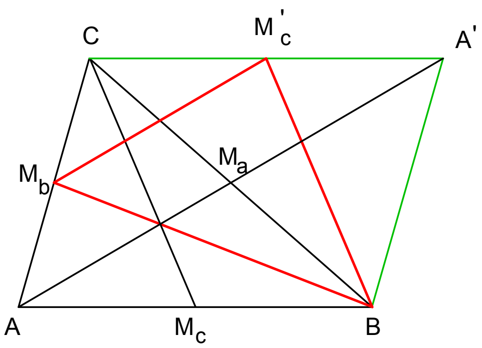
Das Dreieck ABM_b hat wegen $|AM_b| = |M_bC|$ die gleiche Grundseitenlänge wie das Dreieck M_bBC und daher wegen der gemeinsamen Ecke B den gleichen Flächeninhalt. Somit gilt:

$$A_{\Delta ABC} = 2 \cdot A_{\Delta ABM_b} = 12 \cdot A^*.$$

Durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor 3 entsteht aus dem Dreieck SM_bN eines, dessen Seiten die Längen der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC haben und das den 9-fachen Flächeninhalt, also $9 \cdot A^*$, hat. Sein Flächeninhalt ist also drei Viertel mal so groß wie der des Dreiecks ABC. Dies war zu zeigen.

2. Lösung

Spiegelt man das Dreieck ABC am Mittelpunkt M_a der Seite BC, so entsteht das Parallelogramm ABA'C. Dabei wird der Mittelpunkt M_c der Seite AB auf den Mittelpunkt $M_c{}'$ der Seite A'C abgebildet, da das Bild des Mittelpunkts einer Strecke auch der Mittelpunkt der Bildstrecke ist.



Die Strecke $M_bM_c{}'$ ist daher Mittellinie im Dreieck AA'C und folglich halb so lang wie AA'. Somit gilt:

$$|M_bM_c{}'| = |AM_a| = s_a \,.$$

Da B der Bildpunkt von C bei der genannten Punktspiegelung ist, gilt wegen der Längentreue der Abbildung:

$$|BM_c{}'| = |CM_c| = s_c \,.$$

Somit hat das Dreieck $M_c{}'M_bB$ die Seitenlängen s_a, s_b und s_c.

Da das gegebene Dreieck ABC den Flächeninhalt A hat, ist der Flächeninhalt des Parallelogramms ABA'C das Doppelte davon, also 2 · A.

Das Teildreieck $BA'M_c{}'$ hat eine halb so lange Grundseite $A'M_c{}'$ wie das Dreieck BA'C und gleiche Höhe. Daher hat es ein Viertel des Flächeninhalts des Parallelogramms, also $\frac{1}{2}A$.

Das Teildreieck ABM_b hat eine halb so lange Grundseite AM_b wie das Dreieck ABC und die gleiche Höhe. Daher hat es ebenfalls den Flächeninhalt $\frac{1}{2}A$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $M_bM_c{}'C$ ist $\frac{1}{4}$ des Inhalt des Dreiecks AA'C, denn seine Seiten sind halb so lang wie die des Dreiecks AA'C. Wegen $A_{\Delta AA'C} = \frac{1}{2}A_{\Diamond ABA'C} = A_{\Delta ABC} = A$ hat das Dreieck $M_bM_c{}'C$ den Inhalt $\frac{1}{4}A$.

Folglich gilt für den Flächeninhalt $\overline{A}$ des gesuchten Dreiecks:

$$\overline{A} = 2A - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}A = \frac{3}{4}A \,.$$

Dies war zu zeigen.

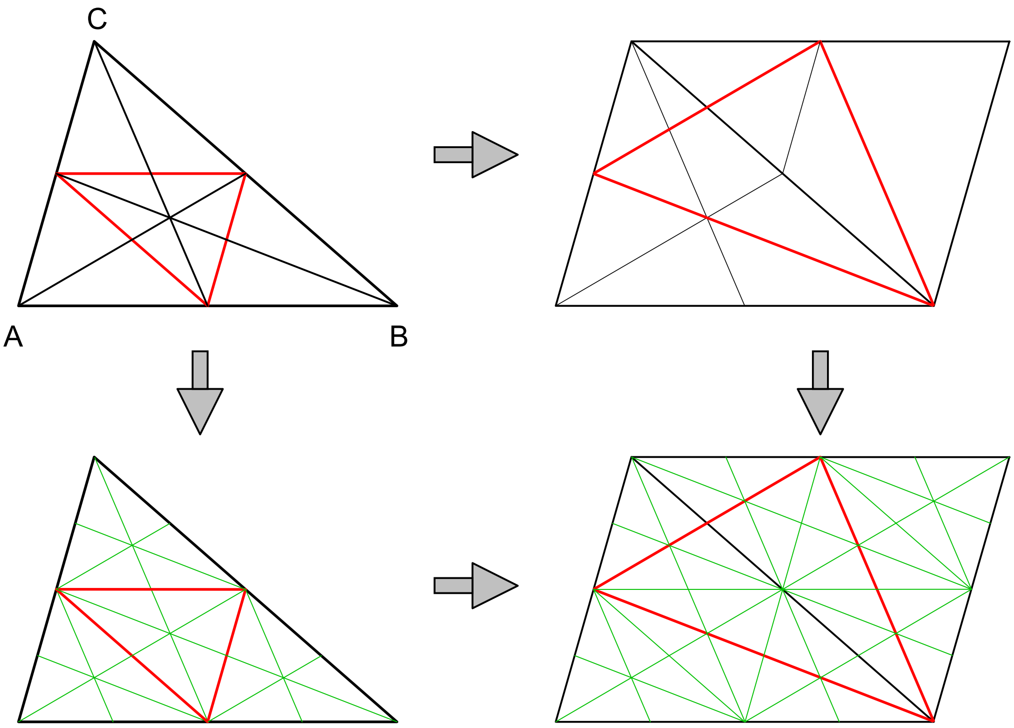
3. Lösung

Ein Dreieck ABC wird durch das Mittendreieck in vier kongruente Teildreiecke zerlegt (Bild links oben).

Die Seitenhalbierenden dieser Teildreiecke zerlegen diese jeweils in sechs flächengleiche Dreiecke, so dass das Ausgangsdreieck ABC in 24 flächengleiche Dreiecke zerlegt ist (Bild links unten).

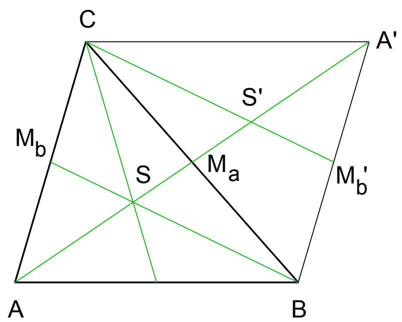
Das Dreieck ABC wird am Mittelpunkt der Seite BC gespiegelt. Original und Bildfigur ergeben zusammen ein Parallelogramm. Die Seitenhalbierenden des Ausgangsdreiecks werden teilweise durch Parallelverschiebungen zu einem Dreieck in diesem Parallelogramm angeordnet (Bild rechts oben).

Die Zerlegung des Dreiecks ABC und des Bilddreiecks in jeweils 24 flächengleiche Teildreiecke wird in das Parallelogramm übernommen. Die Behauptung ergibt sich durch Abzählen (Bild rechts unten).



4. Lösung

Wird das Dreieck ABC am Mittelpunkt M_a der Seite a gespiegelt, so erhält man die nebenstehende Figur.



Aus den Eigenschaften des Schwerpunktes eines Dreieckes ergibt sich:

$$|SC| = \frac{2}{3}s_c \text{ und } |SM_a| = \frac{1}{3}s_a .$$

Da Punktspiegelungen längentreu sind, ist

$$|S'M_a| = \frac{1}{3}s_a \text{ und damit } |SS'| = \frac{2}{3}s_a ,$$

$$|S'C| = |SB| = \frac{2}{3}s_b .$$

Das Dreieck SS'C hat damit die Seitenlängen $\frac{2}{3}s_a$, $\frac{2}{3}s_b$, $\frac{2}{3}s_c$. Es ist folglich zu dem aus den Seitenhalbierenden konstruierbaren Dreieck ähnlich. Sein Inhalt ist $\frac{4}{9}$ des Inhalts eines Dreiecks aus den Längen der Seitenhalbierenden.

Die Dreiecke SS'C und AA'C stimmen in der zur Seite AA' gehörigen Höhe überein. Ihre Flächeninhalte verhalten sich also wie die Längen ihrer Seiten SS' und AA'. Da nun $|AA'| = 2s_a$ und $|SS'| = \frac{2}{3}s_a$ ist, ist der Inhalt des Dreiecks SS'C ein Drittel des Flächeninhalts des Dreiecks AA'C.

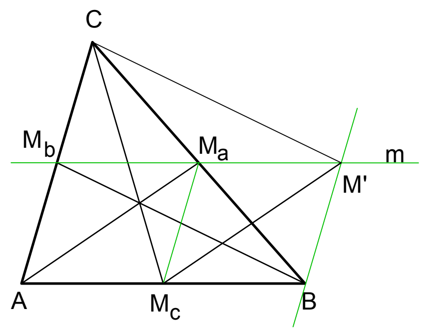
Da die Seitenhalbierenden ein Dreieck in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegen und die Dreiecke AM_aC und $M_aA'C$ in einer Seitenlänge ($|AM_a| = |M_aA'|$) und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, haben die Dreiecke AA'C und ABC den gleichen Flächeninhalt.

Insgesamt ergibt sich also für den Flächeninhalt A* des aus den Seitenhalbierenden konstruierten Dreiecks:

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{9}{4} \cdot A_{\Delta\,SS'C} \\ &= \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta\,AA'C} \\ &= \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \\ &= \frac{3}{4} \cdot A. \end{aligned}$$

5. Lösung

Im nebenstehenden Bild sind M_a , M_b und M_c die Seitenmitten des Dreiecks ABC. Als Seite des Mittendreiecks ist M_bM_a parallel zu AB und halb so lang wie diese Seite.
Die Gerade m durch diese Seitenmitten M_a und M_b schneidet die Parallele zu AM_a durch M_c im Punkt M'.



Das Viereck $AM_cM'M_a$ ist ein Parallelogramm, da gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Daraus folgt: $|AM_c| = |M_aM'| = |M_bM_a| = |M_cB|$

und $|M_cM'| = |AM_a| = s_a$ (1)

Das Viereck $M_cBM'M_a$ ist ebenfalls ein Parallelogramm, da die Seiten M_cB und M_aM' parallel und gleich lang sind.

Daraus folgt insbesondere: $BM' \parallel M_cM_a \parallel AC$ und $|BM'| = |M_cM_a| = |AM_b| = |M_bC|$

Das Viereck $BM'CM_b$ ist ein Parallelogramm, da die Seiten BM' und M_bC parallel und gleich lang sind.

Daraus folgt: $|M'C| = |BM_b| = s_b$ (2)

Aus (1) und (2) folgt, dass die Längen der Seiten des Dreiecks $M_cM'C$ mit den Längen der Seitenhalbierenden im Dreieck ABC paarweise übereinstimmen. Das Dreieck $M_cM'C$ ist also kongruent zu dem aus den Längen der Seitenhalbierenden von ABC konstruierbaren Dreieck.

Die Dreiecke CM_cM_a, AM_cM_a und BM_aM_b haben jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{4}A$, da sie im Vergleich zum Dreieck ABC halbe Grundlinie und halbe Höhe haben. (3)

Begründung für das Dreieck CM_cM_a:

Die Seite CM_a ist halb so lang wie die Seite BC. Die zugehörige Höhe, d.h. der Abstand des Punktes M_c von der Geraden (CM_a) ist halb so groß wie der Abstand des Punktes A von dieser Geraden, da M_cM_b die Mittellinie des Dreiecks ABC ist.

Für die beiden anderen Dreiecke gilt eine analoge Begründung.

Die Dreiecke $M_cM'M_a$ und AM_cM_a sind nach dem Kongruenzsatz sss kongruent, da die Seiten M_cM' und AM_a sowie M_aM' und AM_c gleich lang sind und die Seite M_aM_c gemeinsam ist. Entsprechend gilt auch $\Delta CM_aM' \cong \Delta BM_aM_b$.

Das Dreieck $M_cM'C$ wird durch die Strecken M_aM_c, M_aM' und M_aC in die inhaltsgleichen Dreiecke M_aM_cM', $M_aM'C$ und M_aCM_c zerlegt, die jeweils den Inhalt $\frac{1}{4}A$ haben.

Daraus folgt: Das Dreieck $M_cM'C$ hat den Inhalt $\frac{3}{4}A$.

6. Lösung

Der Formelsammlung kann man Ausdrücke zur Berechnung des Flächeninhalts sowie der Längen der Seitenhalbierenden eines Dreiecks entnehmen. Für den Flächeninhalt eines Dreiecks findet man

die Heronische Formel $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit dem halben Dreiecksumfang s

und für die Längen der Seitenhalbierenden

$$s_a = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\ ,\ s_b = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\ \text{ und }\ s_c = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\ .$$

Damit wir die Formel für den Flächeninhalt bequemer auf das Dreieck mit den Seitenhalbierenden als Seiten anwenden können, formen wir sie so um, dass darin möglichst die Quadrate der Seitenlängen vorkommen.

Setzen wir also zunächst für den halben Umfang $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A_\Delta &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}(b+c-a)\cdot\tfrac{1}{2}(a+c-b)\cdot\tfrac{1}{2}(a+b-c)} \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{(b^2+2bc+c^2-a^2)\cdot(a^2+2bc-c^2-b^2)} \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{(2bc+c^2-(a^2-b^2))\cdot(2bc-c^2+(a^2-b^2))} \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{4b^2c^2-c^4+(a^2-b^2)\cdot 2c^2-(a^2-b^2)^2} \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)\cdot c^2-(a^2-b^2)^2}.
\end{aligned}$$

Damit ist das erste Ziel erreicht.

Zur Berechnung des Flächeninhaltes $\tilde{A}$ des Dreiecks aus den drei Seitenhalbierenden des ursprünglichen Dreiecks müssen wir in diesem Ausdruck „nur" a durch s_a, b durch s_b und c durch s_c ersetzen. Dann ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{(2{s_a}^2+2{s_b}^2-{s_c}^2)\cdot{s_c}^2-({s_a}^2-{s_b}^2)^2}\\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}(2b^2+2c^2-a^2)+\tfrac{1}{2}(2a^2+2c^2-b^2)-\tfrac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)\right)\cdot\tfrac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)-(\tfrac{1}{4}\cdot(3b^2-3a^2))^2}\\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{(\tfrac{9}{4}c^2)\cdot\tfrac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)-(\tfrac{9}{16}\cdot(b^2-a^2)^2)}\\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{\tfrac{9}{16}c^2\cdot(2a^2+2b^2-c^2)-\tfrac{9}{16}\cdot(a^2-b^2)^2}\\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{\tfrac{9}{16}\left(c^2\cdot(2a^2+2b^2-c^2)-(a^2-b^2)^2\right)}\\
&= \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{c^2\cdot(2a^2+2b^2-c^2)-(a^2-b^2)^2}\\
&= \tfrac{3}{4}\cdot A_\Delta .
\end{aligned}
$$

Dies war zu zeigen.

Aufgabe 6

Bestimme alle natürlichen Zahlen k, m und n, welche die Gleichung $2^k + 2^m = n!$ erfüllen.

Dabei bedeutet $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.

1. Lösung

Durch Probieren mit kleinen Werten von n erhalten wir folgende Lösungen für $2^k + 2^m = n!$:

n	n!	Darstellung als Summe von genau zwei Zweierpotenzen
1	1	nicht möglich
2	2	$2^0 + 2^0$, also k = m = 0
3	6	$2^1 + 2^2$, also k = 1 und m = 2 oder k = 2 und m = 1
4	24	$2^3 + 2^4$, also k = 3 und m = 4 oder k = 4 und m = 3
5	120	wegen $2^6 + 2^6 = 128 > 120$ und $2^5 + 2^6 = 96 < 120$ ist die Darstellung mit genau zwei Zweierpotenzen nicht möglich.

Für $n \geq 5$ ist n! sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar. Die gegebene Gleichung ist deshalb höchstens dann erfüllbar, wenn die Summe $2^k + 2^m$ durch 3 und durch 5 teilbar ist. Keiner der Summanden ist selbst durch 3 oder durch 5 teilbar.

Betrachten wir nun die Reste der Zweierpotenzen bei der Division durch 3 bzw. durch 5.

t	2^t	Rest bei Division durch 3	Rest bei Division durch 5
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	1	4
3	8	2	3
4	16	1	1
5	32	2	2
6	64	1	4

Bei der Division durch 3 und durch 5 können die Zweierpotenzen nur die Rest 1 und 2 bzw. 1, 2, 3 oder 4 haben. Die Reste müssen sich also wiederholen. Die Folge der Rest der Zweierpotenzen bei der Division durch 3 bzw. 5 wiederholen sich in der Reihenfolge $1 \to 2 \to 1 \to ...$ bzw. $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$ ... Die Reste der Zweierpotenzen bei der Division durch 3 sind also periodisch mit der Länge 2, bei der Division durch 5 sind sie periodisch mit der Länge 4.

Aus dieser Periodizität und der Reihenfolge der Reste 1 und 2 bei der Division durch 3 bzw. 1, 2, 4 und 3 bei der Division durch 5 folgt:

Die Summe von zwei Zweierpotenzen ist genau dann durch 3 teilbar, wenn einer der Exponenten gerade und der andere ungerade ist. Die Summe von zwei Zweierpotenzen ist nur dann durch 5 teilbar, wenn eine der beiden Potenzen den Rest 1 und der andere den Rest 4 oder die eine Zweierpotenz den Rest 2 und die andere den Rest 3 ergibt. Aus der Tabelle oben und der Periodenlänge 4 folgt, dass dies nur der Fall ist, wenn beide Exponenten gerade oder beide Exponenten ungerade sind.

Wenn die Summe von zwei Zweierpotenzen durch 3 teilbar ist, dann ist sie nicht durch 5 teilbar und umgekehrt. Es kann also für $n \geq 5$ keine natürliche Zahlen k und m geben, so dass die Gleichung $2^k + 2^m = n!$ erfüllt ist.

2. Lösung

$2^k + 2^m$ ist nach den Voraussetzungen für k und m mindestens 2, kann also niemals 1! sein.

Für $n \in \{2, 3, 4\}$ gilt $2! = 2 = 2^0 + 2^0$,

$3! = 6 = 2 + 4 = 2^1 + 2^2$,

$4! = 24 = 8 + 16 = 2^3 + 2^4$.

Für n > 4 ist n! sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar.

Im folgenden sei ohne Einschränkung $k \le m$. Dann gilt: $2^k + 2^m = 2^k \cdot \left(1 + 2^{m-k}\right)$. Der erste Faktor der rechten Seite ist nur durch Potenzen von 2, aber nicht durch 3 oder durch 5 teilbar. Bleibt also nur zu untersuchen, ob ein Term der Form $1 + 2^s$ gleichzeitig durch 3 und durch 5 teilbar sein kann.

Teilbarkeit von $z = 2^s + 1$ durch 3:

Behauptung: Die Zweierpotenzen 2^s und 2^{s+2} ergeben bei der Division durch 3 den gleichen Rest.

Beweis:

Jede Zweierpotenz 2^s lässt sich in der Form $3 \cdot t + r$ mit r = 1 oder r = 2 darstellen.

Es sei also $2^s = 3t + r$.

Daraus folgt: $4 \cdot 2^s = 4 \cdot (3t + r)$

$\Leftrightarrow \quad 2^2 \cdot 2^s = 12t + 4r$

$\Leftrightarrow \quad 2^{s+2} = 3 \cdot 4t + 3r + r$

$\Leftrightarrow \quad 2^{s+2} = 3 \cdot (4t + r) + r$.

Da der erste Summand auf der rechten Seite das Produkt von 3 und der natürlichen Zahl $4t + r$ ist, ist der erste Summand durch 3 teilbar. Der Rest von 2^{s+2} bei der Division durch 3 stimmt mit dem Rest von 2^s bei der Division durch 3 überein.

Betrachten wir nun die ersten beiden Zweierpotenzen, so erhalten wir $2^1 = 2$ bzw. $2^2 = 4$. Da sich die Reste der Zweierpotenzen bei der Division durch 3 durch die Multiplikation mit 4 nicht verändern, haben alle Zweierpotenzen mit geradem Exponenten bei Division durch 3 den Rest 1 und alle Zweierpotenzen mit ungeradem Exponenten bei der Division durch 3 den Rest 2.

Der Term $2^s + 1$ ist also genau dann durch 3 teilbar, wenn s eine ungerade natürliche Zahl ist.

Es bleibt jetzt nur noch zu untersuchen, ob $z = 2^s + 1$ für ungerade s durch 5 teilbar sein kann.

Teilbarkeit von $z = 2^s + 1$ durch 5 für ungerades s:

Es sei $2^{2u+1} = 2^{2u} \cdot 2 = 4^u \cdot 2$.

Die Potenzen von 4 haben für u > 0 die Einerziffern 4 und 6. Wird eine Zahl mit der Einerziffer 4 mit 2 multipliziert, entsteht eine Zahl mit der Einerziffer 8. Wird eine Zahl mit der Einerziffer 6 mit 2 multipliziert. so entsteht eine Zahl mit der Einerziffer 2. Die Addition von 1 führt im ersten Fall zu einer Zahl mit der Einerziffer 9, im zweiten Fall zu einer Zahl mit der Einerziffer 3. In beiden Fällen entsteht eine Zahl, die nicht durch 5 teilbar ist.

Für u = 0 ist $2^{2u+1} = 2^1 = 2$ und damit $1 + 2^1$ ebenfalls nicht durch 5 teilbar.

Zusammenfassung:

Der Term $1 + 2^s$ ist für s > 0 nie durch 3 und 5 gleichzeitig teilbar. Deshalb ist $2^k + 2^m = 2^k \cdot (1 + 2^{m-k})$ nicht gleichzeitig durch 3 und 5 teilbar.

Die Gleichung $2^k + 2^m = n!$ besitzt also nur für $n \in \{2, 3, 4\}$ die oben angegebenen Lösungen.

3. Lösung

Für die beiden natürlichen Zahlen k und m wird $k \le m$ angenommen. Die Summe $2^k + 2^m$ kann dann in das Produkt $2^k \cdot (1 + 2^{m-k})$ zerlegt werden. Dabei ist $1 + 2^{m-k}$ eine natürliche Zahl, da $m - k \ge 0$ ist.

Betrachten wir zunächst die Primfaktorzerlegung von Zahlen der Art $2^t + 1$, wobei t eine natürliche Zahl ist.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^t + 1$	3	5	9	17	33	65	129	257	513	1025
Primfaktorzerlegung	3	5	$3 \cdot 3$	17	$3 \cdot 11$	$5 \cdot 13$	$3 \cdot 43$	257	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$	$5 \cdot 5 \cdot 41$

Bei der Primfaktorzerlegung der Zahlen $2^t + 1, t \in N$ fällt auf, dass für $t \le 10$ keine der Potenzen den Primfaktor 7 enthält. Betrachten wir deshalb die Reste dieser Zahlen bei der Division durch 7 genauer.

t	2^t	Rest von 2^t bei der Division durch 7	Rest von $2^t + 1$ bei Division durch 7
1	2	2	3
2	4	4	5
3	8	1	2
4	16	2	3
5	32	4	5
6	64	1	2
7	128	2	3
8	256	4	5
9	512	1	2
10	1024	2	3

Die Reste von 2^t bei der Division durch 7 sind 2, 4 und 1 und wiederholen sich mit der Periodenlänge 3. Entsprechend wiederholen sich die Reste 3, 5 und 2 von $2^t + 1$ bei der Division durch 7. Keine der Zahlen $2^t + 1$ ist also durch 7 teilbar.

Da auch die Zweierpotenzen 2^k nicht durch 7 teilbar sind, ist wegen $2^k + 2^m = 2^k \cdot \left(1 + 2^{m-k}\right)$ die Summe $2^k + 2^m$ nie durch 7 teilbar.

Da n! für $n \ge 7$ durch 7 teilbar ist, kann die Gleichung $2^k + 2^m = n!$ allenfalls für $n \le 6$ erfüllt sein.

n	n!	k	m	$2^k + 2^m$
1	1			
2	2	0	0	$2^0 + 2^0 = 1$
3	6	1	2	$2^1 + 2^2 = 6$
4	24	3	4	$2^3 + 2^4 = 24$
5	120	$k \le m \le 6$	$m \le 6$	Keine der Summen $2^k + 2^m$ ergibt 120.
6	720	$k \le m \le 9$	$m \le 9$	Keine der Summen $2^k + 2^m$ ergibt 720.

Die Gleichung $2^k + 2^m = n!$ ist für die Zahlentripel (0/0/2), (1/2/3) und (3/4/4) erfüllt. Verzichtet man auf die Einschränkung $k \le m$, so kommen noch die Zahlentripel (2/1/3) und (4/3/4) hinzu.