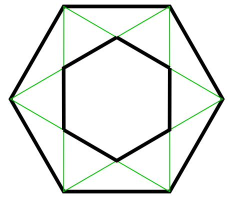
1999

Runde 1

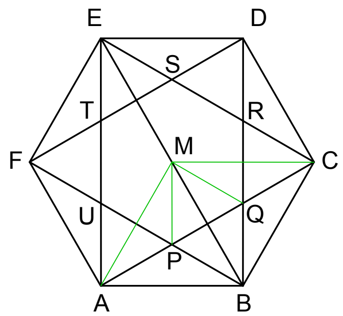


Aufgabe 1

In einem regelmäßigen Sechseck werden wie abgebildet Diagonalen eingezeichnet. Dadurch entsteht ein kleines Sechseck.

Welchen Anteil an der Gesamtfläche hat das kleine Sechseck?

1. Lösung



Wegen der Drehsymmetrie des regelmäßigen Sechsecks ABCDEF ist auch das Sechseck PQRSTU regelmäßig. Beide Sechsecke setzen sich aus jeweils sechs gleichseitigen Dreiecken ABM, BCM, ... bzw. PQM, QRM, ... zusammen.

Das Viereck ABCM ist demnach eine Raute und damit ein zu den Diagonalen AC und BM symmetrisches Viereck.

Deshalb gilt: $\Delta ACM \cong \Delta ABC$ und $\Delta PBQ \cong \Delta PQM$.

Für den Flächeninhalt der Dreiecke gilt dann:

$$A_{ACM} = A_{ABC} \text{ und } A_{PBQ} = A_{PQM}.$$

Entsprechendes gilt wegen der Drehsymmetrie auch für die anderen Teildreiecke der Figur.

Ist A der Flächeninhalt des Sechsecks ABCDEF und A^* der Flächeninhalt des Sechsecks PQRSTU, so gilt:

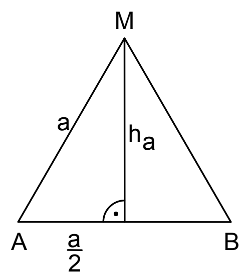
$$A = 3 \cdot A_{ABC} + 3 \cdot A_{ACM} = 6 \cdot A_{ACM} = 2 \cdot A_{ACE} = 2 \cdot A_{BDF} = A_{ACE} + A_{BDF}\ .$$

Außerdem gilt: $\quad A_{ACE} = A^* + 3 \cdot A_{PBQ}$.

Daraus folgt: $A = 2 \cdot A^* + 6 \cdot A_{PBQ} = 2 \cdot A^* + 6 \cdot A_{PQM} = 2 \cdot A^* + A^*$.

Somit erhält man $A = 3 \cdot A^*$ und daraus $A^* = \frac{1}{3} \cdot A$.

2. Lösung



Sei a die Seitenlänge des Ausgangssechsecks und b die Seitenlänge des kleinen Sechsecks.

Ein regelmäßiges Sechseck ist aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt.

Die Höhe im gleichseitigen Dreieck ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$h_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ also } h_a = \frac{1}{2} a\sqrt{3}\ .$$

Für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks gilt: $A_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{4} a^2 \cdot \sqrt{3}$

Aufgrund der Aufgabenstellung ist das Viereck ABCM eine Raute (Bild zur ersten Lösung). Die Diagonale AC halbiert deshalb die Strecke BM. Eine der Seitenhalbierenden des gleichseitigen Dreiecks liegt auf der Strecke AC. Außerdem ist die Höhe auf AB im gleichseitigen Dreieck ABM gleichzeitig auch Seitenhalbierende. Der Schnittpunkt P ist also der Schwerpunkt des Dreiecks ABM.

Damit folgt für die Seitenlänge b des kleinen Teildreiecks $b = \frac{2}{3}h_a = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

Folglich ergibt sich der Flächeninhalt des kleinen Sechsecks zu

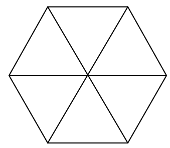
$$A_{klein} = 6 \cdot \frac{b^2}{4}\sqrt{3} = 6 \cdot \frac{a^2}{12}\sqrt{3} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}.$$

Da der Flächeninhalt des Ausgangssechsecks $A_{groß} = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$ ist, folgt $A_{klein} = \frac{1}{3}A_{groß}$.

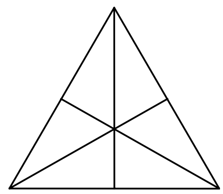
3. Lösung

Aus dem Unterricht ist bekannt:

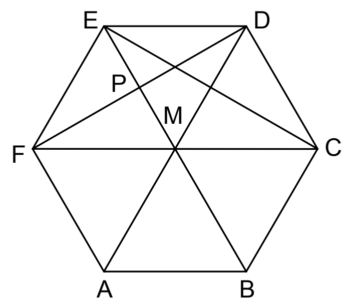
- Jedes regelmäßige Sechseck kann in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt werden.



- In jedem gleichseitigen Dreieck sind die Mittelsenkrechten zugleich Höhen. Sie zerlegen es in sechs kongruente rechtwinklige Dreiecke.



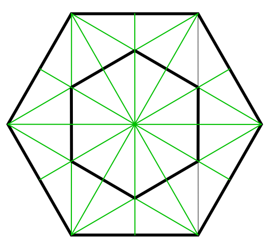
Die Mittelsenkrechten auf der gemeinsamen Strecke von je zwei benachbarten gleichseitigen Teildreiecken, beispielsweise die Mittelsenkrechten auf der Strecke ME in den Dreiecken MDE und MEF, liegen auf einer Geraden. Die beiden Strecken sind zusammen eine der eingezeichneten Sechsecksdiagonalen.



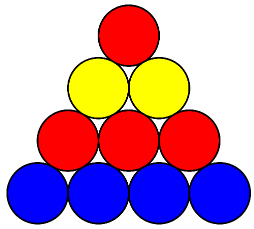
Ergänzen wir die gegebene Figur durch alle Diagonalen und die noch fehlenden Mittelsenkrechten der sechs Teildreiecke MAB, MBC, ... , so wird das Ausgangssechseck in 36 Teildreiecke zerlegt.

Wir erhalten eine Parkettierung des Sechsecks in 36 kongruente Dreiecke. Zwölf von ihnen haben den Sechsecksmittelpunkt als Ecke. Sie überdecken das kleine Sechseck.

Dieses hat also einen Flächenanteil von 12/36 oder 1/3 an der Gesamtfläche.



Aufgabe 2



Mehrere Reihen aus roten, gelben bzw. blauen Spielsteinen sind in Form eines Dreiecks gelegt.

Die nebenstehende Anordnung erfüllt die ersten drei der vier folgenden Bedingungen:

1. Oben liegt ein Spielstein; in der nächsten Reihe liegen zwei Steine, darunter drei usw.
2. Alle Spielsteine einer Reihe haben die gleiche Farbe.
3. In benachbarten Reihen sind die Farben verschieden.
4. Von jeder Farbe sind gleich viele Spielsteine vorhanden.

Wie viele Reihen hat eine solche Anordnung mindestens, wenn sie alle vier Bedingungen erfüllt?

Lösung

Die Zahl der Spielsteine der drei Farben rot, gelb und blau sei jeweils k, die Gesamtzahl somit 3k. Die Reihen werden von oben nach unten mit einer Nummer gekennzeichnet, so dass die Reihennummer mit der Anzahl der Steine in dieser Reihe übereinstimmt.

Für die Anzahl n der Reihen muss die Bedingung $1 + 2 + ... + n = 3k$ erfüllt sein. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen muss also ein Vielfaches von 3 sein.

Zur Berechnung der Minimalzahl von Reihen können wir die Farben der Spielsteine in den ersten beiden Reihen beliebig wählen. Sie müssen wegen der dritten Bedingung nur verschieden sein.

Um alle vier Bedingungen der Aufgabenstellung zu erfüllen, müssen wir die ersten n natürlichen Zahlen so in drei Teilsummen zerlegen können, dass die drei Teilsummen den gleichen Wert haben (Bedingung 4), aber keine zwei benachbarte natürliche Zahlen in einer der Teilsummen vorkommen (Bedingung 3).

Schrittweise werden nun die ersten n natürlichen Zahlen ausprobiert.

$n = 3$ kommt trivialerweise nicht in Frage.

$n = 4$: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, nicht durch 3 teilbar.

$n = 5$: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \Rightarrow k = 5$

Um die Summe 5 zu erhalten, kommen nur die Teilsummen 5, 4 + 1 und 3 +2 in Frage. Bei dieser Aufteilung haben die Spielsteine in der zweiten und in der dritten Reihe die gleiche Farbe.

$n = 6$: $1 + 2 + ... + 6 = 21 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow$

Die sechs Zahlen lassen sich nur auf eine einzige Art in drei Teilsummen mit dem Wert 7 zerlegen: $6 + 1$ $5 + 2$ $4 + 3$.

In den Reihe 3 und 4 liegen also Steine der gleichen Farbe.

$n = 7$: $1 + 2 + ... + 7 = 28$, nicht durch 3 teilbar.

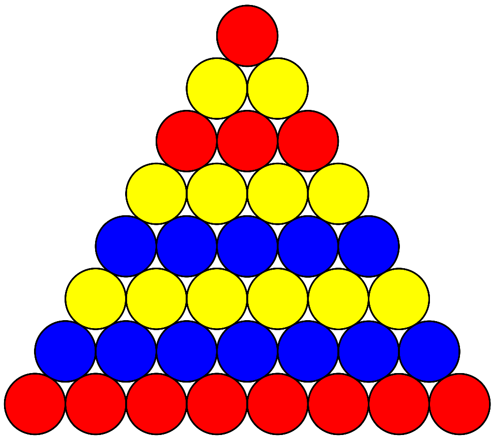
$n = 8$: $1 + 2 + ... + 8 = 36 \Rightarrow k = 12$

In der nachfolgenden Tabelle wird ausgehend vom Summanden 8 eine Ergänzung zur Summe 12 bestimmt. Dann werden die Möglichkeiten untersucht, den Summanden 7 mit noch verbleibenden Summanden zur Summe 12 zu ergänzen, dann den Summanden 6...

<table>
<tr><td colspan="2">8+4</td><td></td><td>8 + 3 + 1</td></tr>
<tr><td>7 + 5</td><td>7 + 3 + 2
Widerspruch zur Bedingung 3</td><td></td><td>7 + 5</td></tr>
<tr><td>6 + 3 + 2 + 1
Widerspruch zur Bedingung 3</td><td></td><td></td><td>6 + 4 + 2</td></tr>
</table>

Die letzte Spalte der Tabelle zeigt, dass die Zahlen 1, 2, 3, ... 8 so in drei Teilmengen zerlegt werden können, dass die Summe der Zahlen in einer Teilmenge jeweils 12 beträgt.

Da diese Eigenschaft bei keiner früheren Anzahl von Reihen möglich war, ist gezeigt, dass die minimale Anzahl von Steinen 36 betragen muss. Die Reihen 1, 3 und 8 werden mit einer Farbe, die Reihen 2, 4 und 6 mit einer zweiten Sorte und die restlichen Reihen 5 und 7 mit der dritten Farbe bestückt, wie im nebenstehenden Bild angegeben.



Aufgabe 3

Drei Kreise mit gleichem Radius und den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt P. Außerdem schneiden sich jeweils zwei Kreise in den Punkten A, B und C.

Begründe, weshalb die beiden Dreiecke $M_1M_2M_3$ und ABC kongruent sind.

Bezeichnungen:

Die drei Kreise um M_1, M_2 und M_3 mit gleich großen Radien r heißen k_1, k_2 bzw. k_3.

Alle drei Kreise gehen durch den gemeinsamen Punkt P. A ist der zweite Schnittpunkt von k_2 und k_3, B der zweite Schnittpunkt von k_3 und k_1 und C der zweite Schnittpunkt von k_1 und k_2.

1. Lösung

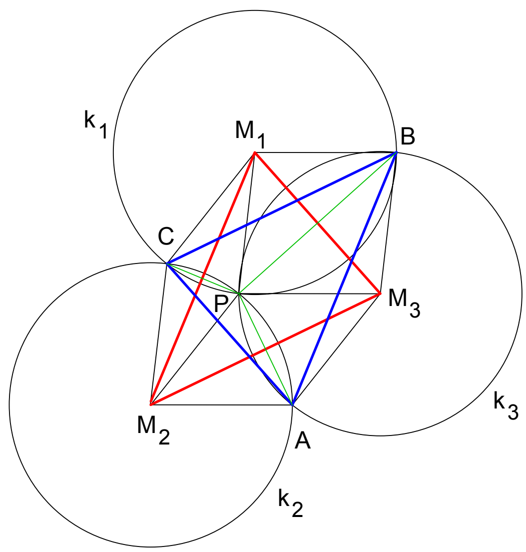
Da die Kreise k_1, k_2 und k_3 den gleichen Radius r haben und $k_1 \cap k_2 \cap k_3 = \{P\}$ ist, folgt:

$$|M_1P| = |M_2P| = |M_3P| = r\,. \qquad (1)$$

Außerdem gilt auf Grund der Aufgabenstellung:

$$|M_1B| = |M_1C| = |M_2C| = |M_2A| = |M_3A| = |M_3B| = r\,. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt, dass AM_3PM_2 eine Raute ist.



Entsprechend kann man zeigen, dass die Vierecke BM_1PM_3 und CM_2PM_1 Rauten sind.

Daraus folgt:

$$AM_3 \| M_2P \| CM_1 \text{ und } |AM_3| = |M_2P| = |CM_1|\,.$$

Da die Seiten AM_3 und CM_1 parallel und gleich lang sind, ist das Viereck AM_3M_1C ein Parallelogramm.

Dies heißt insbesondere auch, dass $|M_1M_3| = |AC|$ gilt.

Analog zeigt man, dass die Vierecke M_2M_3BC und M_1M_2AB Parallelogramme sind. Also gilt auch $|M_2M_3| = |BC|$ und $|M_1M_2| = |AB|$.

Damit sind die Seiten der Dreiecke $M_1M_2M_3$ und ABC paarweise gleich lang. Die beiden Dreiecke sind deshalb nach dem Kongruenzsatz sss kongruent.

2. Lösung

Die Vierecke M_2PM_1C und PM_3BM_1 sind Rauten mit gleichen Seitenlängen, da alle Seiten Radien der gegebenen Kreise sind. (siehe Abb. oben)

Aus der Eigenschaft der Rauten folgt beispielsweise

$$M_2P \| CM_1 \text{ und } PM_3 \| M_1B\text{, woraus dann } w(M_2PM_3) = w(CM_1B) \text{ folgt.}$$

Da die Seiten M_2P, PM_3, CM_1 und M_1B gleich lang sind, gilt nach dem Kongruenzsatz sws, dass die beiden Dreiecke M_2M_3P und CBM_1 kongruente (, gleichschenklige) Dreiecke sind. Deshalb sind die Basen M_2M_3 und CB gleich lang. Entsprechend zeigt man die paarweise Übereinstimmung der anderen

Seitenlängen der Dreiecke ABC und $M_1M_2M_3$. Daraus folgt dann nach sss die Kongruenz dieser beiden Dreiecke.

3. Lösung

Wegen des Umfangswinkelsatzes und den übereinstimmenden Radien der drei Kreise gilt

$$w(ACP) = w(PBA),\ w(BAP) = w(PCB),\ w(CBP) = w(PAC).$$

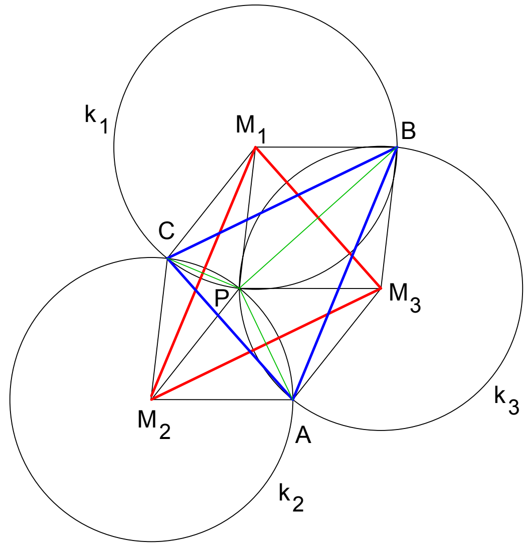
Da M_3M_1 senkrecht zu PB und M_3M_2 senkrecht zu PA ist, gilt

$$w(M_1M_3M_2) = 180° - w(APB) = w(BAP) + w(PBA) = w(ACB).\ (*)$$

Entsprechend schließt man

$$w(M_2M_1M_3) = 180° - w(BPC) = w(CBP) + w(PCB) = w(BAC),$$
$$w(M_3M_2M_1) = 180° - w(CPA) = w(ACP) + w(PAC) = w(CBA).$$

Demnach stimmen die Dreiecke ABC und $M_1M_2M_3$ in zwei ihrer Winkel überein und sind deshalb ähnlich.



Die Kongruenz der beiden Dreiecke wird nun durch die Eigenschaft nachgewiesen, dass die beiden Umkreise den gleichen Radius besitzen.

Da PA, PB und PC die Mittelsenkrechten von M_1M_3, M_1M_2 bzw. M_2M_3 sind, ist P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $M_1M_2M_3$. Dieser Umkreis hat also den Radius r.

Um nachzuweisen, dass der Umkreis des Dreiecks ABC den gleichen Radius besitzt, wird gezeigt, dass der Bildpunkt des Punktes C bei Spiegelung an der Geraden (AB) auf dem Kreis k_3 liegt. Nach der Umkehrung des Randwinkelsatzes und dem Satz über den Mittelpunktswinkel genügt dazu der Nachweis von

$$w(ACB) = \frac{1}{2} \cdot w(BM_3A).$$

Nach (*) gilt $\quad w(ACB) = w(M_1M_3M_2)$.

Da bei den Vierecken AM_3PM_2 und PM_3BM_1 alle Seiten die Länge r haben, sind diese Vierecke Rauten und die Diagonalen M_3M_2 bzw. M_3M_1 sind Winkelhalbierende.

Deshalb gilt

$$w(BM_3A) = w(BM_3P) + w(PM_3A) = 2 \cdot w(M_1M_3P) + 2 \cdot w(PM_3M_2) = 2 \cdot w(M_1M_3M_2).$$

Daraus folgt $\quad w(ACB) = \frac{1}{2} w(BM_3A)$.

Der Umkreis des Dreiecks ABC ist also das Spiegelbild des Kreises k_3 bei Spiegelung an der Geraden (AB), also hat auch der Umkreis von ABC den Radius r.

Zwei ähnliche Dreiecke mit gleichem Umkreisradius sind kongruent.

4. Lösung

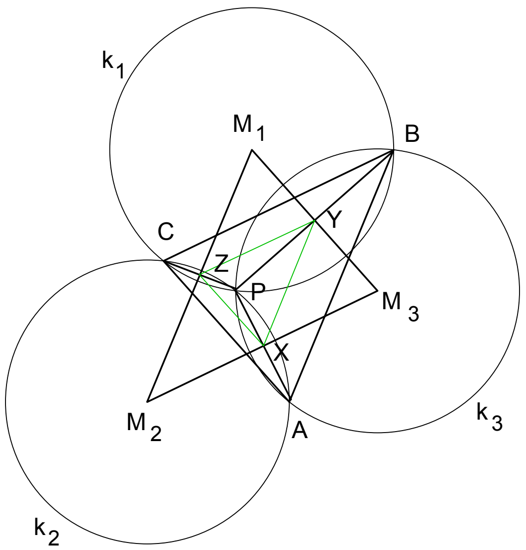
Mit den Benennungen der beiden Figuren auf der nächsten Seite und den Voraussetzungen aus der Aufgabenstellung folgt:

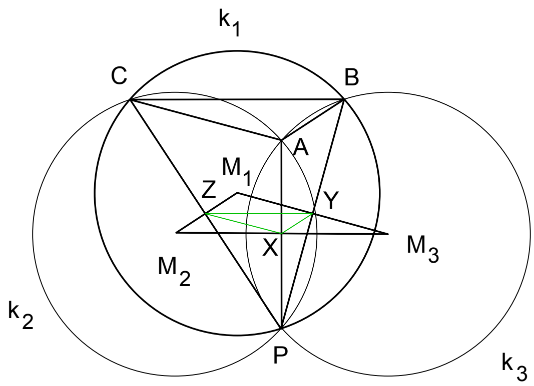
$|AM_2| = |AM_3| = |PM_2| = |PM_3| = r \;\Rightarrow\;$ AP ist Mittelsenkrechte zu M_2M_3 und umgekehrt.

$|BM_3| = |BM_1| = |PM_3| = |PM_1| = r \;\Rightarrow\;$ BP ist Mittelsenkrechte zu M_1M_3 und umgekehrt.

$|CM_1| = |CM_2| = |PM_1| = |PM_2| = r \;\Rightarrow\;$ CP ist Mittelsenkrechte zu M_1M_2 und umgekehrt.

Die Schnittpunkte X, Y und Z sind also die Mittelpunkte der Strecken M_1M_2, M_2M_3 und M_1M_3 bzw. der Strecken AP, BP und CP.





Das Dreieck XYZ ist das Mittendreieck des Dreiecks $M_1M_2M_3$.

Deshalb gilt

$$|XY| = \frac{1}{2}\cdot|M_1M_2|,\ |YZ| = \frac{1}{2}\cdot|M_2M_3| \text{ und } |XZ| = \frac{1}{2}\cdot|M_1M_3|. \qquad (1)$$

Entsprechend gilt für die Strecke XY im Dreieck PAB: $|XY| = \frac{1}{2}\cdot|AB|$. (2)

Mit Hilfe der Dreiecke PBC und PCA folgt $|YZ| = \frac{1}{2}\cdot|BC|$ und $|XZ| = \frac{1}{2}\cdot|AC|$. (3)

(Die Eigenschaften in den beiden letzten Zeilen folgen auch aus einer zentrischen Streckung mit Zentrum P und Streckfaktor $\frac{1}{2}$, welche das Dreieck ABC auf das Dreieck XYZ abbildet.)

Aus den Eigenschaften (1) bis (3) folgt: $|AB| = |M_1M_2|,\ |BC| = |M_2M_3|$ und $|AC| = |M_1M_3|$.

Die beiden Dreiecke ABC und $M_1M_2M_3$ sind deshalb nach dem Kongruenzsatz sss kongruent.

Aufgabe 4

Gesucht sind mindestens vier aufeinander folgende ganze Zahlen, so dass die Summe der drei größten Zahlen gleich der Summe der restlichen Zahlen ist.

Bestimme alle Möglichkeiten.

1. Lösung

Die Folgen haben die Form: $a; a+1; \ldots ; a+n$ mit $n \geq 3$.

Summe der 3 größten Glieder: $(a+(n-2))+(a+(n-1))+(a+n)=3a+3n-3$

Summe der restlichen Glieder: $a+(a+1)+\ldots+(a+(n-3))=(n-2)\cdot a+1+2+\ldots+(n-3)$

Für $3 \leq n \leq 5$ wird gesetzt: ‚Summe der restlichen Glieder‘ = ‚Summe der drei größten Glieder‘

$n=3$:	$a=3a+6 \Leftrightarrow -2a=6 \Leftrightarrow a=-3$	Zahlenfolge:	$-3, -2, -1, 0$
$n=4$:	$2a+1=3a+9 \Leftrightarrow -a=8 \Leftrightarrow a=-8$	Zahlenfolge:	$-8, -7, -6, -5, -4$
$n=5$:	$3a+3=3a+12 \Leftrightarrow 3=12$	falsche Aussage; keine Zahlenfolge möglich	

Für $n \geq 6$ (d.h. mindestens sieben Folgenglieder) gilt:

Summe der drei größten Glieder: $3a+3n-3$

Summe der nächsten drei Glieder: $(a+(n-5))+(a+(n-4))+(a+(n-3))=3a+3n-12$

Die Summe der drei größten Glieder ist um 9 größer als die Summe der nächsten drei Glieder.

Vor den letzten sechs Gliedern müssen die restlichen Glieder die Summe 9 ergeben.

Die Zahl 9 lässt sich auf die folgenden Arten in eine Summe von aufeinander folgenden Zahlen zerlegen:

9	***9***; 10; 11; 12; 13; 14; 15	oder	*–8; –7; ... 7; 8*; ***9***; 10; 11; ... ; 15
4 + 5	***4***; ***5***; 6; 7; 8; 9; 10; 11	oder	*–3; -2; -1; 0;1; 2; 3*; ***4***; ***5***; 6; 7; ... ; 11
2+3+4	***2***; ***3***; ***4***; 5; 6; 7; 8; 9; 10	oder	*–1; 0; 1*; ***2***; ***3***; ***4***; 5; 6; ... ; 10

Da es keine weiteren passenden Zerlegungen von 9 gibt, gibt es auch keine weiteren Folgen.

2. Lösung

Die drei größten Zahlen setzen wir n, $n+1$ und $n+2$. Dann sind die übrigen k Zahlen in absteigender Reihenfolge $n-1$ bis $n-k$ mit $k > 0$.

Die Summe der drei größten Zahlen ist $3n+3$, die der übrigen Zahlen dagegen

$$k\cdot n-(1+2+3+\ldots k)=k\cdot n-\frac{k\cdot(k+1)}{2}.$$

Die Bedingung der Aufgabe lautet damit

$$kn-\frac{k(k+1)}{2}=3n+3 \qquad (*)$$

$$n\cdot(k-3)=3+\frac{k\cdot(k+1)}{2}.$$

Für $k = 3$ ist die Bedingung nicht erfüllbar. Für alle anderen $k > 0$ kann man nach n auflösen und erhält

$$n=\frac{\frac{k(k+1)}{2}+3}{k-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2+k+6}{k-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k-3)\cdot(k+4)+18}{k-3}=\frac{1}{2}\cdot\left[(k+4)+\frac{18}{k-3}\right].$$

Für n erhalten wir dann einen ganzzahligen Wert, wenn der Term in der großen Klammer eine gerade, ganze Zahl ist. Der Term in der Klammer wird beim Einsetzen einer ganzen Zahl für k aber nur dann ganzzahlig, wenn k – 3 ein Teiler von 18 bzw. –18 ist.

Für k kommen also nur die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte in Frage. Die zugehörigen Werte von n erweisen sich alle als ganzzahlig.

k – 3	–18	–9	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6	9	18
k	entfällt, da k > 0 sein muss				1	2	4	5	6	9	12	21
n					–2	–6	13	9	8	8	9	13

Damit ergeben sich folgende acht Möglichkeiten, die Bedingung zu erfüllen:

$$-3 = (-2) + (-1) + 0$$

$$(-8) + (-7) = (-6) + (-5) + (-4)$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11$$

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8 + 9 + 10$$

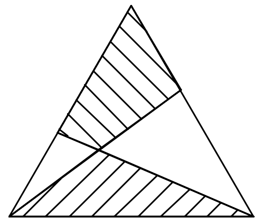
$$(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11$$

$$(-8) + (-7) + \ldots + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + \ldots + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

Aufgabe 5

Die beiden Strecken zerlegen das gleichseitige Dreieck so, dass die schraffierten Teile flächengleich sind.

Wie groß ist der Schnittwinkel zwischen diesen beiden Strecken?

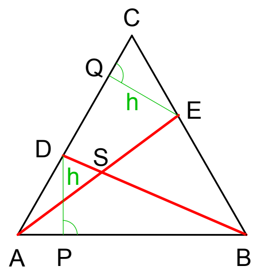


1. Lösung

Nehmen wir zur Dreiecksfläche ABS und zur Vierecksfläche CDSE jeweils noch die Fläche ASD hinzu, so entstehen die Dreiecke ABD und AEC. Diese beiden Dreiecke sind flächengleich, da nach Aufgabenstellung die beiden Ausgangsflächen ABS und CDSE flächengleich sind.

Wählen wir in den beiden Dreiecke ABD und AEC die Seiten AB bzw. AC als Grundseiten, so folgt aus der gleichen Länge dieser Strecken und dem übereinstimmenden Flächeninhalt auch, dass die zugehörigen Höhen übereinstimmen müssen.

Der Abstand des Punktes D von der Geraden (AB) und der Abstand des Punktes E von der Geraden (AC) sind deshalb gleich groß.



Die Dreiecke APD und QEC sind kongruent, da sie in allen drei Winkeln und der Länge h der dem 60°-Winkel gegenüberliegenden Seite übereinstimmen.

Daraus folgt $|AD| = |CE|$.

Die Dreiecke ABD und CAE sind nach dem Kongruenzsatz sws kongruent, da die Strecken AB und AC bzw. AD und CE gleich lang sind und jeweils einen 60°-Winkel einschließen.

Bezeichnen wir w(EAC) mit φ, so gelten wegen der Kongruenz der Dreiecke ABD und CAE, der Winkelsumme in den Teildreiecken und den gegebenen 60°-Winkeln die folgenden Beziehungen:

$$w(EAC) = w(DBA) = \varphi,$$

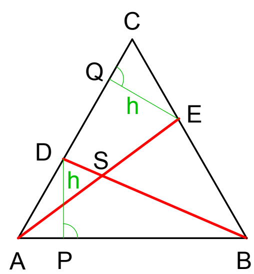
$$\begin{aligned} w(ADB) &= 180° - w(BAD) - w(DBA) \\ &= 180° - 60° - \varphi \\ &= 120° - \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(DSA) &= 180° - w(SAD) - w(ADS) \\ &= 180° - w(EAC) - w(ADB) \\ &= 180° - \varphi - (120° - \varphi) \\ &= 60°. \end{aligned}$$

Der Schnittwinkel der beiden Strecken ist ein 60°-Winkel.

2. Lösung

Mit den Bezeichnungen in der nebenstehenden Figur gilt für die Flächeninhalte:



$A_{ABS} = A_{CDSE}$, und wegen $A_{ABS} + A_{ASD} = A_{CDSE} + A_{ASD}$, gilt $A_{ABD} = A_{AEC}$.
Zwei Dreiecke mit gleicher Länge einer Seite und mit gleichem Flächeninhalt sind kongruent, wie in der ersten Lösung gezeigt wurde.

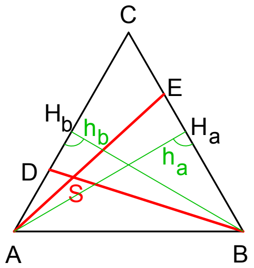
Also gilt insbesondere $|AD| = |CE|$.

Durch eine Drehung der Figur um das Symmetriezentrum Z des gleichseitigen Dreiecks ABC mit dem Drehmaß 120° wird A auf B, B auf C und C auf A abgebildet. Das Bild der Strecke BC ist die Strecke CA. Der Punkt E wird wegen $|AD| = |CE|$ auf D abgebildet.

Deshalb ist die Strecke BD das Bild von AE bei der Drehung um 120°. Der Schnittwinkel zwischen den beiden Strecken beträgt also 180° – 120° = 60°.

3. Lösung

Wie in der 1. bzw. 2. Lösung wird zunächst die Flächengleichheit der Dreiecke ABD und AEC bewiesen:



Wir betrachten die Strecken AD und CE als Grundseiten der Dreiecke ABD und AEC. Die dazugehörigen Höhen BH_b und AH_a sind gleichzeitig Höhen im gleichseitigen Dreieck ABC und daher gleich lang.

Da die Dreiecke gleichen Flächeninhalt und gleich lange Höhen besitzen, müssen sie auch gleich lange Grundseiten besitzen, d.h.: $|AD| = |CE|$.

Der restliche Beweis erfolgt wie in der 1. oder 2. Lösung.

Aufgabe 6

Gibt es unter den Zahlen 19, 199, 1999, 19999, ... unendlich viele, die keine Primzahlen sind?

1. Lösung

Durch Ausprobieren erhalten wir:

19	Primzahl,
199	Primzahl,
1999	Primzahl,
$19999 = 7 \cdot 2857$.	

Da jede neue Zahl durch Anhängen einer weiteren Ziffer 9 entsteht, wird nun nach einer Zahl der Form 999...9 gesucht, die ebenfalls durch 7 teilbar ist.

Zahl	ganzzahliges Ergebnis bei Division durch 7	Rest bei Division durch 7
9	1	2
99	14	1
999	142	5
9999	1428	3
99999	14285	4
999999	142857	0
9999999	1428571	2

Die Reste wiederholen sich mit der Periodenlänge 6. Wird an die Ziffernfolge 19999 ein Ziffernblock aus sechs Neunern angehängt, so ist die 11-stellige Zahl durch 7 teilbar, dann diese 11-stellige Zahl lässt sich schreiben als

$$19999999999 = 19999 \cdot 10^6 + 999999 .$$

Jeder Summand ist durch 7 teilbar, also auch die Summe.

Dieses Anhängen eines Ziffernblocks aus sechs Neunern können wir nun beliebig oft wiederholen. Jedes Mal entsteht eine durch 7 teilbare Zahl. Also gibt es unendlich viele Zahlen der Form 1999...99, die keine Primzahlen sind.

Variante:

Entsprechend der Suche nach Zahlen der Form 999..99, die durch 7 teilbar sind, können auch Zahlen bestimmt werden, die durch 19 teilbar sind. Dabei stellt man fest, dass sich die Reste der Zahlen 9, 99, 999, 9999, ... bei der Division durch 19 periodisch wiederholen. Zahlen aus 18, 36, 54, ... Ziffern 9 sind jeweils durch 19 teilbar. Zusammen mit der Teilbarkeit von 19 durch 19 ergibt sich daraus die Teilbarkeit der Zahlen 19.999.999.999.999.999.999, 19.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999 usw. durch 19. Damit gibt es unendlich viele Zahlen der gegebenen Form, die durch 19 teilbar und deshalb keine Primzahlen sind.

2. Lösung

Die erste Zahl in der angegebenen Folge 19, 199, 1999, 19999, ... , die keine Primzahl ist, heißt 19999, denn es gilt $19999 = 7 \cdot 2857$.

Dies führt zur Vermutung, dass es weitere Zahlen der Folge gibt, die ebenfalls den Teiler 7 haben. Wenn der Nachweis gelänge, dass unendlich viele Zahlen der Folge den Teiler 7 haben, dann wäre die Frage in der Aufgabenstellung positiv beantwortet.

Da alle Zahlen der Folge von der Form $2\cdot 10^n - 1,\ n \in \mathbb{N}$ sind, werden Zahlen dieser Bauart auf Teilbarkeit durch 7 überprüft:

$10^1 \equiv 3 \bmod 7$	$2\cdot 10^1 \equiv 6 \bmod 7$	$2\cdot 10^1 - 1 \equiv 5 \bmod 7$
$10^2 \equiv 2 \bmod 7$	$2\cdot 10^2 \equiv 4 \bmod 7$	$2\cdot 10^2 - 1 \equiv 3 \bmod 7$
$10^3 \equiv 6 \bmod 7$	$2\cdot 10^3 \equiv 5 \bmod 7$	$2\cdot 10^3 - 1 \equiv 4 \bmod 7$
$10^4 \equiv 4 \bmod 7$	$2\cdot 10^4 \equiv 1 \bmod 7$	$2\cdot 10^4 - 1 \equiv 0 \bmod 7$
$10^5 \equiv 5 \bmod 7$	$2\cdot 10^5 \equiv 3 \bmod 7$	$2\cdot 10^5 - 1 \equiv 2 \bmod 7$
$10^6 \equiv 1 \bmod 7$	$2\cdot 10^6 \equiv 2 \bmod 7$	$2\cdot 10^6 - 1 \equiv 1 \bmod 7$
$10^7 \equiv 3 \bmod 7$	$2\cdot 10^7 \equiv 6 \bmod 7$	$2\cdot 10^7 - 1 \equiv 5 \bmod 7$
$10^8 \equiv 2 \bmod 7$	$2\cdot 10^8 \equiv 4 \bmod 7$	$2\cdot 10^8 - 1 \equiv 3 \bmod 7$
$10^9 \equiv 6 \bmod 7$	$2\cdot 10^9 \equiv 5 \bmod 7$	$2\cdot 10^9 - 1 \equiv 4 \bmod 7$
$10^{10} \equiv 4 \bmod 7$	$2\cdot 10^{10} \equiv 1 \bmod 7$	$2\cdot 10^{10} - 1 \equiv 0 \bmod 7$

Die Reste von 10^n bei der Division durch 7 wiederholen sich periodisch mit der Periodenlänge 6. Daher gilt:

$$2\cdot 10^4 - 1 \equiv 0 \bmod 7, \qquad 2\cdot 10^{10} - 1 \equiv 0 \bmod 7, \qquad 2\cdot 10^{16} - 1 \equiv 0 \bmod 7, \ldots$$

In der Zahlenfolge sind also alle Zahlen der Form $2\cdot 10^n - 1$ mit $n = 4 + 6\cdot k,\ k \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar.

Da alle diese Zahlen größer als 7 sind, sind sie keine Primzahlen. In der Folge kommen daher unendlich viele Nichtprimzahlen vor.

3. Lösung

Bei Division durch 7 treten nur die Reste 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6 auf. Man betrachtet die Abfolge der Reste (fett), die bei der schriftlichen Division von 19, 199, 1999 und 19999 usw. durch 7 auftreten und beobachtet, was geschieht, wenn weitere Neuner an die Dividenden angehängt werden.

Ab dem ersten Auftreten eines Restes, der bereits vorher aufgetreten ist, wiederholt sich die Folge.

Man erkennt folgende Reihenfolge der Reste: 5, 3, 4, 0, 2, 1, 5, 3, 4, 0, 2, 1, ...

Mit anderen Worten: Die Folge der Reste ist periodisch mit der Periodenlänge sechs. Jeder sechste Dividend ab 19999 lässt bei Division durch 7 den Rest 0.

Jede sechste Zahl ab 19999 ist also durch 7 teilbar. Die Folge der Zahlen 19, 199, 1999, 19999, ... enthält deshalb unendlich viele Nichtprimzahlen.

```
19999999.. : 7 = 2857142...
14
 59
 56
  39
  35
   49
   49
    09
     7
     29
     28
      19
      14
       59
```