1997

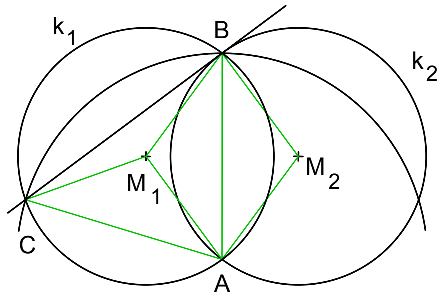
Runde 2

Aufgabe 1

Zwei Kreise k_1 und k_2 mit gleichem Radius schneiden sich in den Punkten A und B. Der Kreis um A durch B schneidet k_1 zum zweiten Mal in einem Punkt C.

Zeige, dass die Gerade (BC) Tangente an den Kreis k_2 ist.

1. Lösung



Das Viereck AM_2BM_1 ist eine Raute, da alle vier Seiten die Länge r besitzen. Die Diagonale AB der Raute ist die Winkelhalbierende der Winkel $\measuredangle\, M_1BM_2$ und $\measuredangle\, M_2AM_1$. Sie teilt die Raute in zwei kongruente, gleichschenklige Dreiecke.

Im Dreieck CAB stimmen die Seitenlängen $|AC|$ und $|AB|$ überein, da der Punkt C nach Konstruktion auf dem Kreis um A mit Radius $|AB|$ liegt. Das Dreieck BCA ist also gleichschenklig mit der Basis CB.

Die Dreiecke CAM_1 und ABM_1 sind kongruente, gleichschenklige Dreiecke, denn es gilt nach Aufgabenstellung $|M_1C| = |M_1A| = |M_1B|$ und $|AB| = |AC|$.

Für die Winkel in den Teildreiecken gelten wegen der Gleichschenkligkeit, der Kongruenz bzw. der Winkelsumme in den Teilfiguren folgende Beziehungen:

$w(BAM_1) = w(M_1BA) = w(ABM_2) = w(M_2AB) = \varphi$,

$w(AM_1B) = w(BM_2A) = 180° - 2\varphi$,

$w(ACB) = w(CBA) = \alpha$.

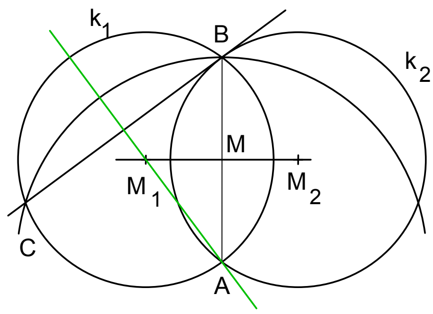
Nach dem Satz über den Mittelpunktswinkel gilt außerdem $\alpha = \frac{1}{2} w(AM_1B) = 90° - \varphi$.

Für den Winkel $\measuredangle\, CBM_2$ folgt daraus:

$w(CBM_2) = w(CBA) + w(ABM_2) = \alpha + \varphi = 90° - \varphi + \varphi = 90°$.

Die Gerade (CB) ist also orthogonal zu (BM_2) und damit Tangente an den Kreis k_2 im Punkt B.

2. Lösung



Die Strecke BC ist die gemeinsame Sehne der beiden Kreise k_1 und des Kreises um A durch die Punkte B und C. Die Mittelsenkrechte dieser Sehne geht durch beide Kreismittelpunkte M_1 und A.

Die Geraden (BC) und (AM_1) sind also orthogonal zueinander.

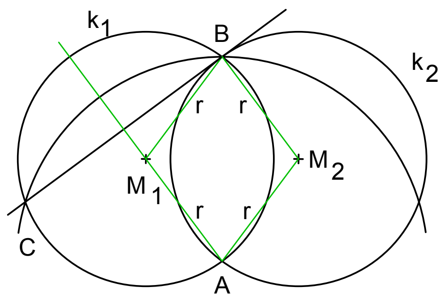
Wegen der Symmetrie der Figur aus den drei Kreisen zur Geraden (AB) sind die Geraden (AB) und (M_1M_2) zueinander orthogonal. Der Schnittpunkt M halbiert die Strecken AB und M_1M_2.

Durch eine Punktspiegelung an M wird der Punkt A auf B und der Punkt B auf A abgebildet. Außerdem wird M_1 auf M_2 abgebildet und umgekehrt.

Das Bild der Geraden (AM_1) ist demnach die Gerade (BM_2). Da bei einer Punktspiegelung eine Gerade und ihre Bildgerade parallel zueinander sind, folgt daraus wegen der Orthogonalität von (BC) und (AM_1), dass auch die Gerade (BM_2) orthogonal zur Geraden (BC) ist.

Die Gerade (BC) ist also Tangente an den Kreis um M_1 im Kreispunkt B.

3. Lösung



Das Viereck AM_2BM_1 ist eine Raute, da alle vier Seiten die Länge r besitzen. Insbesondere sind die gegenüberliegenden Seiten parallel.

Da B und C nach Aufgabenstellung auf dem Kreis um M_1 und dem Kreis um A liegen, geht die Mittelsenkrechte der Kreissehne BC sowohl durch den Punkt M_1 als auch durch den Punkt A. Die Gerade (AM_1) ist also die Mittelsenkrechte der Strecke BC und ist deshalb orthogonal zu (BC).

Die zur Geraden (AM_1) parallele Gerade (M_2B) ist deshalb ebenfalls orthogonal zu (BC). Die Gerade (BC) ist also Tangente an den Kreis um M_1 im Kreispunkt B.

Aufgabe 2

Zwei natürliche Zahlen a und b (a, b > 0) haben die gleiche Anzahl von Stellen.

Zeige: $10a^2 + 10b^2 < 101a \cdot b$

1. Lösung

Ohne Einschränkung des Beweises können wir $a \le b$ voraussetzen. Da a und b nach Aufgabenstellung die gleiche Anzahl von Stellen besitzen, gilt $b < 10 \cdot a$, d.h. $\frac{b}{a} < 10$. Die natürliche Zahl b kann also in der Form $b = a + x$ mit $x < 9 \cdot a$ dargestellt werden.

Durch Termumformung und Abschätzung erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
10a^2 + 10b^2 &= 10a^2 + 10 \cdot (a + x)^2 \\
&= 10a^2 + 10 \cdot \left(a^2 + 2ax + x^2\right) \\
&= 10a^2 + 10a^2 + 20ax + 10x^2 \\
&= 10a^2 + 10a^2 + x^2 + 20ax + 9x^2 \\
&< 10a^2 + 10a^2 + 81a^2 + 20ax + 81ax \\
&= 101a^2 + 101ax \\
&= 101a(a + x) \\
&= 101ab\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist $10a^2 + 10b^2 < 101ab$ nachgewiesen.

2. Lösung

Da a und b nach Voraussetzung die gleiche Anzahl von Stellen besitzen, gilt $\frac{1}{10} < \frac{a}{b} < 10$.

Diese Voraussetzung lässt sich auch in der Form $a < 10b$ und $b < 10a$ darstellen.

Die Behauptung $10a^2 + 10b^2 < 101ab$ ist nachgewiesen, wenn $10a^2 + 10b^2 - 101ab < 0$ gezeigt werden kann.

$$
\begin{aligned}
10a^2 + 10b^2 - 101ab &= 10a^2 - ab + 10b^2 - 100ab \\
&= a \cdot (10a - b) + 10b \cdot (b - 10a) \\
&= a \cdot (10a - b) - 10b \cdot (10a - b) \\
&= (a - 10b) \cdot (10a - b)
\end{aligned}
$$

Der erste Faktor ist negativ, der zweite positiv. Das Produkt ist also negativ.

Zusammenfassend gilt also: $10a^2 + 10b^2 - 101ab < 0$.

3. Lösung

Da nach Voraussetzung die natürlichen Zahlen a und b die gleiche Anzahl von Stellen haben, gilt $a < 10b$ und $b < 10a$ und damit $\frac{a}{b} < 10$ und $\frac{a}{b} > \frac{1}{10}$, d.h. $\frac{1}{10} < \frac{a}{b} < 10$.

Es wird nun nachgewiesen, dass unter dieser Voraussetzung die Ungleichung $10a^2 + 10b^2 < 101a \cdot b$ sicher erfüllt ist.

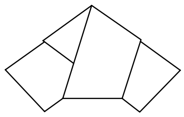
Durch die Umformung zu $10a^2 - 101ab + 10b^2 < 0$ und die Division durch b^2 $\left(b^2 > 0\right)$ erhalten wir $10\frac{a^2}{b^2} - 101\frac{a}{b} + 10 < 0$. Durch die Substitution $\frac{a}{b} = x$ entsteht daraus $10x^2 - 101x + 10 < 0$.

Die linke Seite der Ungleichung kann als Funktionsterm einer quadratischen Funktion interpretiert werden. Ihr Schaubild ist eine nach oben geöffnete und gestreckte Parabel. Die Lösungsmenge der Ungleichung besteht aus allen reellen Zahlen x, für die die Punkte auf der Parabel unterhalb der x-Achse liegen.

Bestimmung der Nullstellen der Funktion.

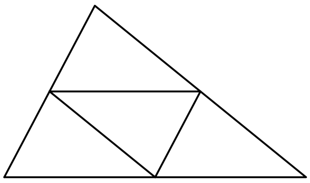
$$10x^2 - 101x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{101 + \sqrt{10201 - 400}}{20} \vee x = \frac{101 - 99}{20} \Leftrightarrow x = 10 \vee x = \frac{1}{10}$$

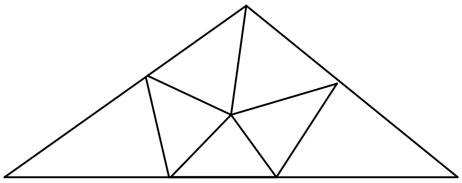
Die Parabel verläuft unterhalb der x-Achse für $\frac{1}{10} < x < 10$. Diese Bedingung entspricht der oben genannten Voraussetzung.

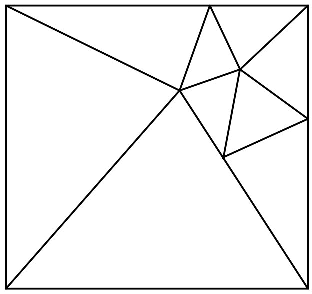


Aufgabe 3

Vielecke können in spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden. So ist beispielsweise bekannt, dass sich jedes spitzwinklige Dreieck in vier und jedes nichtspitzwinklige Dreieck in sieben spitzwinklige Dreiecke zerlegen lässt (Bild links und Mitte).







Ein Quadrat lässt sich in neun spitzwinklige Dreiecke zerlegen (Abbildung rechts).

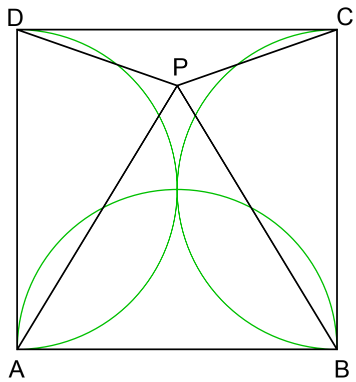
Begründe, dass es für alle natürlichen Zahlen $n \geq 8$ eine Zerlegung des Quadrats in n spitzwinklige Dreiecke gibt.

1. Lösung

Da sich nach den Informationen der Aufgabenstellung jedes spitzwinklige Dreieck in vier spitzwinklige Dreiecke zerlegen lässt, kann die Anzahl der spitzwinkligen Dreiecke bei einer gegebenen Zerlegung durch die Zerlegung eines vorhandenen spitzwinkligen Dreiecks um drei erhöht werden.

Aus der angegebenen Zerlegung des Quadrats in neun spitzwinklige Dreiecke lassen sich deshalb Zerlegungen in 12, 15, 18, ... spitzwinklige Dreiecke erzeugen.

Es bleibt nachzuweisen, dass es Zerlegungen eines Quadrates in 8 und in 10 spitzwinklige Dreiecke gibt.

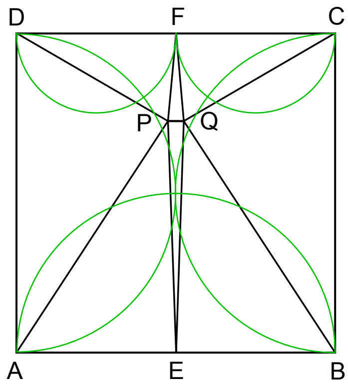


Aus diesen lassen sich dann Zerlegungen in 11, 14, 17, ... bzw. 13, 16, 19, ... spitzwinklige Dreiecke erzeugen.

Im nebenstehenden Bild sind über drei Quadratseiten die Thaleshalbkreise nach innen gezeichnet. Wählen wir den Punkt P im Innern des Quadrates, aber außerhalb dieser drei Halbkreise, so sind die Dreiecke ABP, BCP und DAP bei P spitzwinklig. Da die Winkelgröße der anderen Winkel in diesen drei Dreiecke nach Konstruktion kleiner als 90° ist, sind die drei Dreiecke spitzwinklig.

Das Dreieck CDP ist bei P stumpfwinklig. Nach den Informationen in der Aufgabenstellung lässt sich das Dreieck CDP in sieben spitzwinklige Dreiecke zerlegen, wodurch das Quadrat in insgesamt zehn spitzwinklige Dreiecke zerlegt ist.

Eine Zerlegung des Quadrats in acht spitzwinklige Dreiecke zeigt das nebenstehende Bild.



Die Punkte E und F sind die Mittelpunkte der Quadratseiten AB und CD. Außerdem sind die Thaleshalbkreise über AB, BC, CF, FD und DA nach innen gezeichnet. Im Innern des Quadrats gibt es ein Gebiet, das zu keinem dieser Halbkreise gehört.

Bei der Wahl der Punkte P und Q wurden folgende Eigenschaften berücksichtigt:

beide Punkte liegen außerhalb der fünf Thaleshalbkreise,

der Punkt P wird bei Spiegelung an der Geraden (EF) auf Q abgebildet und umgekehrt,

der Abstand des Punkte P von der Geraden (EF) wird so gewählt, dass er kleiner ist als der Abstand von den Quadratseiten AB und CD.

Verbinden wir P mit A, E, F und D, sowie Q mit E, B, C und F, so wird das Quadrat in acht Dreiecke zerlegt.

Behauptung:

Diese acht Dreiecke sind alle spitzwinklig.

Begründung:

Da die Punkte P und Q außerhalb aller Thaleskreise liegen, sind die Dreiecke APD, FDP, BCQ und CFQ spitzwinklig.

In den Dreiecken AEP und EBQ sind die Winkelmaße bei E deshalb kleiner als 90°, weil die Punkte P bzw. Q in der linken bzw. rechten Hälfte des Quadrats liegen.

Die Dreiecke PQF und QPE sind nach Wahl der Punkte P und Q gleichschenklig. Da nach der getroffenen Wahl der Lage von P der Kreis mit dem Durchmesser PQ weder die Quadratseite AB noch die Quadratseite CD schneidet, sind in den Dreiecken PQF und QPE die Winkel bei F und E kleiner als 90°. Die Größe der Basiswinkel in den gleichschenkligen Dreiecken PQF und QPE ist ebenfalls kleiner als 90°, da diese Eigenschaft in allen gleichschenkligen Dreiecken gilt.

Damit ist nachgewiesen, dass alle acht Dreiecke spitzwinklig sind.

Zusammenfassung:

Aus der Existenz von Zerlegungen des Quadrates in 8, 9 oder 10 spitzwinklige Dreiecke und der Möglichkeit, ein spitzwinkliges Dreieck in 4 spitzwinklige Dreiecke zu zerlegen und damit die Anzahl der spitzwinkligen Dreiecke einer gegebenen Zerlegung um 3 zu erhöhen, folgt die Existenz von Zerlegungen in

8, 11, 14, 17, ...

9, 12, 15, 18, ...

10, 13, 16, 19, ...

spitzwinklige Dreiecke und damit eine Zerlegung in n spitzwinklige Dreiecke für $n \geq 8$.

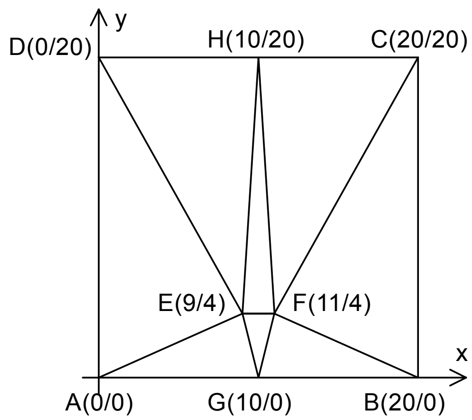
2. Lösung

Nach der Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras ist ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c $(a \leq b \leq c)$ genau dann spitzwinklig, wenn $a^2 + b^2 > c^2$ gilt.

Die Spitzwinkligkeit eines Dreiecks lässt sich also auch durch den Vergleich der Quadrate der Seitenlängen dieses Dreiecks bestätigen.

Das Quadrat lässt sich stets so in das erste Feld eines Koordinatensystems legen, dass ein Eckpunkt mit dem Ursprung übereinstimmt und zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegen.

Die Längeneinheit auf den beiden Koordinatenachsen kann man so wählen, dass die Eckpunkte des Quadrats die Koordinaten A(0/0), B(20/0), C(20/20) und D(0/20) haben.



Wählt man zusätzlich die Punkte E(9/4) und F(11/4), G(10/0) und H(10/20), so kann man unmittelbar oder nach dem Satz von Pythagoras die Streckenlängen bestimmen.

$$|AD| = |BC| = 20;\ |AG| = |GB| = |CH| = |HD| = 10;\ |EF| = 2;\ |AE| = |FB| = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}\ ;$$

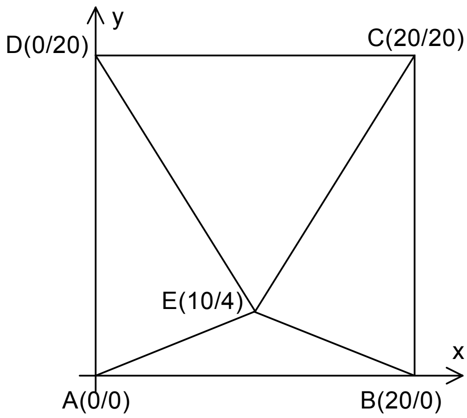
$$|GE| = |GF| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}\ ;\ |ED| = |FC| = \sqrt{81+256} = \sqrt{337}\ ;\ |EH| = |FH| = \sqrt{1+256} = \sqrt{257}\ .$$

Wegen

$97 + 337 > 20^2$	sind die Dreiecke AED und BCF spitzwinklig;.
$97 + 17 > 10^2$	sind die Dreiecke AGE und GBF spitzwinklig;
$10^2 + 257 > 337$	sind die Dreiecke EHD und FCH spitzwinklig;
$2^2 + 17 > 17$	ist das Dreieck FEG spitzwinklig;
$2^2 + 257 > 257$	ist das Dreieck EFH spitzwinklig;

Das Quadrat ist also in acht spitzwinklige Dreiecke zerlegt.

Auf gleiche Weise wie oben lässt sich für das nebenstehende Bild zeigen, dass die Dreiecke AED, CDE und BCE spitzwinklig sind.



Das Dreieck ABE ist stumpfwinklig. Nach der Aufgabenstellung lässt sich das Dreieck ABE in sieben spitzwinklige Dreiecke zerlegen, so dass aus der angegebenen Zerlegung eine Zerlegung des Quadrats in zehn spitzwinklige Dreiecke wird.

Zusammen mit der Information aus der Aufgabenstellung, dass es eine Zerlegung des Quadrats in neun spitzwinklige Dreiecke gibt, existieren somit Zerlegungen des Quadrats in acht, neun und zehn spitzwinklige Dreiecke.

Außerdem kann man nach Aufgabenstellung jedes spitzwinklige Dreieck in 4 spitzwinklige Dreiecke zerlegen, wodurch die Gesamtzahl der spitzwinkligen Dreiecke um 3 erhöht wird.

Aus der Zerlegung	in 8 spitzwinklige Dreiecke	entstehen 11, 14, 17, ... ;
	aus der in 9	entstehen 12, 15, 18, ...
	aus der in 10	entstehen 13, 16, 19, ... spitzwinklige Dreiecke.

Damit ist gezeigt, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 8$ eine Zerlegung in n spitzwinklige Dreiecke existiert.

Aufgabe 4

Beweise: Eine natürliche Zahl n $(n > 1)$ ist genau dann keine Primzahl, wenn es vier natürliche Zahlen a, b, c, d > 0 gibt, so dass $n = a + b + c + d$ mit $a \cdot b = c \cdot d$ gilt.

1. Lösung

Voraussetzung: $n = a + b + c + d$ *und* $a \cdot b = c \cdot d$.

Es ist zu zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen n keine Primzahl ist.

Aus $n = a + b + c + d \wedge ab = cd$ folgt durch Multiplikation mit der von Null verschiedenen Zahl a:

$$a \cdot n = a^2 + ab + ac + ad = a^2 + cd + ac + ad = a \cdot (a + c) + d \cdot (a + c) = (a + d) \cdot (a + c).$$

Wenn n eine Primzahl wäre, dann müsste n mindestens einen der beiden Faktoren $(a + d)$ oder $(a + c)$ teilen. In diesem Falle müsste also mindestens eine der beiden Ungleichungen $n \le a + d$ oder $n \le a + c$ gelten. Dies ist ein Widerspruch zu $n = a + b + c + d$ und a, b, c, d > 0.

Voraussetzung: n ist keine Primzahl

Es ist zu zeigen, dass es vier natürliche Zahlen a, b, c und d gibt mit $n = a + b + c + d$ und $a \cdot b = c \cdot d$.

Da n keine Primzahl ist, gibt es natürliche Zahlen x und y (x, y > 1) mit $n = x \cdot y$.

$$n = x \cdot y \quad \Rightarrow \quad n = (x - 1) + (y - 1) + (x - 1) \cdot (y - 1) + 1$$

Setzen wir $a = x - 1$, $b = y - 1$, $c = (x - 1) \cdot (y - 1)$ und d = 1, so ist direkt erkennbar, dass die Bedingungen $n = a + b + c + d$, a, b, c, d > 0 und $a \cdot b = c \cdot d$ erfüllt sind.

2. Lösung

1. Teil des Beweises

Voraussetzung: $n = a + b + c + d$ *und* $a \cdot b = c \cdot d$.

Es ist zu zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen n keine Primzahl ist.

Es sei $p = a \cdot b$; dann ist $b = \frac{p}{a}$ und $d = \frac{p}{c}$.

Nach Voraussetzung gilt dann:

$$\begin{aligned}
n &= a + \frac{p}{a} + c + \frac{p}{c} \\
&= a + c + \frac{ap + cp}{ac} \\
&= a + c + (a + c) \cdot \frac{p}{ac} \\
&= (a + c) \cdot \left(1 + \frac{p}{ac}\right) \\
&= (a + c) \cdot \left(1 + \frac{ab}{ac}\right) \\
&= (a + c) \cdot \left(1 + \frac{b}{c}\right) \\
&= (a + c) \cdot \left(1 + \frac{b'}{c'}\right) \qquad \text{mit einem vollständig gekürzten Bruch } \frac{b'}{c'}; \\
&= (a + c) \cdot \frac{b' + c'}{c'}.
\end{aligned}$$

Da b' und c' teilerfremd sind und das Produkt in der letzten Zeile die natürliche Zahl n ergibt, muss c' ein Teiler des Faktors (a + c) sein. Die Zahl n hat folglich die Teiler $\frac{a+c}{c'}$ und b' + c'. Beide Teiler sind von 1 verschieden, da c' ein Teiler von c ist und a, b, b' und c' größer als 0 sind.

2. Teil des Beweises

Voraussetzung: n ist keine Primzahl

Es ist zu zeigen, dass es vier natürliche Zahlen a, b, c und d gibt mit $n = a + b + c + d$ und $a \cdot b = c \cdot d$.

Der Nachweis erfolgt durch eine Fallunterscheidung.

1. Fall n ist gerade.

Da n keine Primzahl ist, gilt $n \geq 4$. Damit ist $\frac{n}{2} \geq 2$. Es gibt zwei natürliche Zahlen a und b größer als 0 mit $a + b = \frac{n}{2}$. Setzt man nun c = a und d = b, so ist $a + b + c + d = n$ und $a \cdot b = c \cdot d$.

2. Fall n ist ungerade.

Da n keine Primzahl ist, gibt es ungerade, natürliche Zahlen e und f mit $n = e \cdot f$ und $e, f > 1$.

Es gibt deshalb natürliche Zahlen g und h $(g, h \geq 1)$ mit $e = 2g + 1$ und $f = 2h + 1$.

Die natürliche Zahl n lässt sich deshalb in der Form

$$n = (2g + 1) \cdot (2h + 1) = 4gh + 2g + 2h + 1$$

darstellen.

Setzen wir a = 4g·h, b = 1, c = 2g und d = 2h, so sind die beiden Bedingungen

$$a + b + c + d = n \quad \text{und} \quad a \cdot b = c \cdot d$$

erfüllt.

Variante für die Beweisrichtung:

Ist n keine Primzahl, dann gibt es natürliche Zahlen a, b, c und d mit n = a + b + c + d und a · b = c · d.

Wenn die natürliche Zahl n keine Primzahl ist, dann lässt sich n als Produkt $x \cdot y$ mit $x, y \geq 2$ schreiben. Es gibt deshalb natürliche Zahlen x_1, x_2, y_1 und y_2 mit $x_1 + x_2 = x$ und $y_1 + y_2 = y$.

Die Zahl n lässt sich also in der folgenden Form darstellen

$$n = x \cdot y = (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

Setzen wir $x_1 y_1 = a$, $x_2 y_2 = b$, $x_1 y_2 = c$ und $x_2 y_1 = d$, so sind a, b, c und d natürliche Zahlen größer als 0 und das Produkt von a und b ist gleich dem Produkt von c und d.