1997

Runde 1

Aufgabe 1

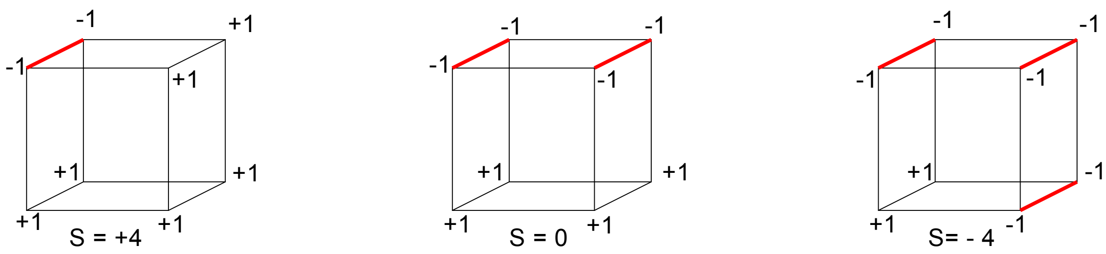
An jeder Kante eines Drahtwürfels wird ein Zettel mit einer der Zahlen +1 oder –1 angebracht. Danach werden für jede der acht Ecken die Zahlen an den drei Kanten multipliziert, die zu dieser Ecke gehören. Die acht Produkte werden addiert.

Begründe: Die Summe der acht Produkte kann nur fünf Werte annehmen.

1. Lösung

Zu jedem Eckpunkt gehören drei Kanten. Das Produkt der drei Zahlen, die an diesen Kanten stehen, ist entweder +1 oder –1. Sind alle Zahlen an den 12 Kanten +1, so sind die acht Produkte jeweils +1 und die Summe der acht Produkte ist +8. Sind alle Zahlen an den 12 Kanten –1, dann sind die acht Produkte jeweils –1 und die Summe der acht Produkte ist –8. Eine größere Summe als +8 und eine kleinere Summe als –8 ist nicht möglich.

Gehen wir von einer beliebigen Belegung der 12 Kanten aus. Die Summe der acht Produkte sei S. Wenn wir nun die Belegung an einer Kante verändern, d.h. anstelle von +1 nun –1, oder anstelle von –1 nun +1 verwenden, so ändert sich nur das Vorzeichen der beiden Produkte an den beiden zugehörigen Eckpunkten. Dabei können drei verschiedene Fälle auftreten:



Produkte vorher	Produkte nachher	Änderung der Summe S
beide +1	beide –1	– 4
einmal +1, einmal –1	einmal –1, einmal +1	0
beide –1	beide +1	+ 4

Gehen wir beispielsweise von einer der beiden oben genannten Belegungen aus und berücksichtigen, dass der Wert der Summe der acht Produkte mindestens –8 und höchstens +8 ist und die Änderung der Summe bei der Veränderung eines Vorzeichens laut Tabelle +4, 0 oder – 4 sein kann, so sind theoretisch die fünf Summenwerte + 8, + 4, 0, – 4 und – 8 möglich. Für die Summen + 8 und – 8 ist oben bereits eine Beschriftung des Würfels genannt. Die folgenden drei Beispiele zeigen, dass auch die drei anderen Werte tatsächlich möglich sind. An den dick markierten Kanten steht jeweils die Zahl –1 an den anderen die Zahl +1.

2. Lösung

Beim Probieren mit verschiedenen Belegungen der Kanten mit den Zahlen +1 und –1 wurde festgestellt, dass die Anzahl der Produkte –1 an den Ecken stets gerade ist. Diese Eigenschaft soll nun bewiesen werden.

Wir bezeichnen die zwölf Zahlen an den Kanten mit $k_1, k_2, ... k_{12}$ und die acht Produkte an den Ecken mit $e_1, e_2, ... e_8$. Das Produkt $e_1 \cdot e_2 \cdot ... \cdot e_8$ aller Eckenzahlen lässt sich auch in der Form $k_1^2 \cdot k_2^2 \cdot ... \cdot k_{12}^2$ darstellen, da jede Kantenzahl bei genau zwei Ecken berücksichtigt wird. Da die Kantenzahlen nur die Werte +1 und –1 haben, sind ihre Quadrate immer +1. Das Produkt aller Eckenzahlen hat also unabhängig von der Wahl der Kantenzahlen immer den Wert +1. Dies bedeutet, dass die Anzahl der negativen Zahlen unter den Faktoren $e_1, e_2, ... e_8$ immer gerade, also 0, 2, 4, 6 oder 8 sein muss.

Die Summe der Eckenzahlen kann also nur die in der folgenden Tabelle angegebenen fünf Werte annehmen.

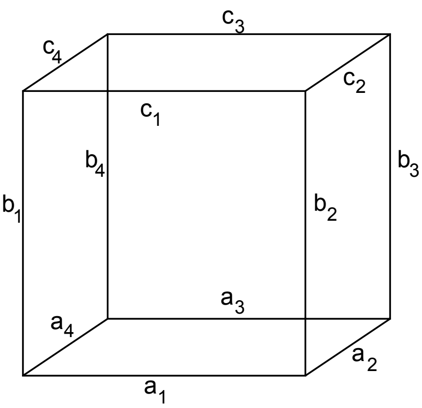
Anzahl der negativen Eckenzahlen	Summe der Eckenzahlen
0	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8
2	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + (–1) + (–1) = 4
4	1 + 1 + 1 + 1+ (–1) + (–1) + (–1) + (–1) = 0
6	1 + 1 + (–1) + (–1) + (–1) + (–1) + (–1) + (–1) = – 4
8	(–1) + (–1) + (–1) + (–1) + (–1) + (–1) + (–1) + (–1) = – 8

3. Lösung

Die Bezeichnung der Zahlen an den Kanten des Drahtwürfels ist im nebenstehenden Bild angegeben. Die acht Produkte lauten:

$a_1a_2b_2$, $a_2a_3b_3$, $a_3a_4b_4$, $a_4a_1b_1$,

$c_1c_2b_2$, $c_2c_3b_3$, $c_3c_4b_4$, $c_4c_1b_1$.



Alle Produkte sind +1 oder –1. Die Summe S der acht Produkte ist also mindestens – 8 und höchstens +8.

Es gilt:

$$S = a_1a_2b_2 + c_1c_2b_2 + a_2a_3b_3 + c_2c_3b_3 + a_3a_4b_4 + c_3c_4b_4 + a_4a_1b_1 + c_4c_1b_1$$
$$= a_1(a_2b_2 + a_4b_1) + a_3(a_2b_3 + a_4b_4) + c_1(c_2b_2 + c_4b_1) + c_3(c_2b_3 + c_4b_4).$$

Es folgt nun eine Fallunterscheidung für die Vorzeichen der Zahlen b_i.

1. Fall Alle vier Zahlen b_i haben das gleiche Vorzeichen.

Für $b_i = +1$ gilt dann $S = a_1(a_2 + a_4) + a_3(a_2 + a_4) + c_1(c_2 + c_4) + c_3(c_2 + c_4)$ bzw.

$$S = -\left[a_1(a_2 + a_4) + a_3(a_2 + a_4) + c_1(c_2 + c_4) + c_3(c_2 + c_4)\right] \text{ für } b_i = -1.$$

Beide Darstellungen lassen sich zu $S = \pm\left[(a_1 + a_3)(a_2 + a_4) + (c_1 + c_3)(c_2 + c_4)\right]$ umformen.

Jeder der Faktoren kann + 2, 0 oder – 2 sein. Jedes der beiden Produkte kann den Wert + 4, 0 oder – 4 annehmen. Der Summe S kann also + 8, + 4, 0, – 4 oder – 8 sein. Die folgende Tabelle zeigt ein Beispiel für jeden der fünf Werte.

a_1	a_2	a_3	a_4	b_i	c_1	c_2	c_3	c_4	S
+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 8
+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	+ 4
+ 1	+ 1	–1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	0
+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 4
+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 8

2. Fall Drei der Zahlen b_i, z.B. b_1, b_2 und b_3 haben das gleiche Vorzeichen, für b_4 gilt

$b_4 = -b_3$.

Die Summe kann dann in der Form $S = \pm\left[a_1(a_2+a_4)+a_3(a_2+a_4)+c_1(c_2-c_4)+c_3(c_2-c_4)\right]$ geschrieben werden.

Haben a_2 und a_4 gleiches Vorzeichen, so ist die Summe + 2 oder – 2 und die Differenz 0, im anderen Fall ist es umgekehrt. Gleiches gilt für c_2 und c_4. Die Summe kann also die Werte + 4, 0 oder – 4 annehmen. Für alle drei Werte sind in der Tabelle bereits geeignete Belegungen angegeben.

3. Fall Jeweils zwei der Zahlen b_i sind + 1 und zwei – 1.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Sind die gegenüberliegenden Zahlen b_i gleich, so gilt $b_1 = b_3$ und

$b_2 = b_4 = -b_1$: $\quad S = \pm\left[a_1(a_2-a_4)+a_3(a_2-a_4)+c_1(c_2-c_4)+c_3(c_2-c_4)\right]$

$$= \pm\left[(a_1+a_3)(a_2-a_4)+(c_1+c_3)(c_2-c_4)\right].$$

Haben zwei Zahlen an der gleichen Würfelseite das gleiche Vorzeichen, beispielsweise $b_1 = b_2$ und $b_3 = b_4 = -b_1$, so folgt: $S = \pm\left[a_1(a_2+a_4)-a_3(a_2+a_4)+c_1(c_2+c_4)-c_3(c_2+c_4)\right]$

$$= \pm\left[(a_1-a_3)(a_2+a_4)+(c_1-c_3)(c_2+c_4)\right].$$

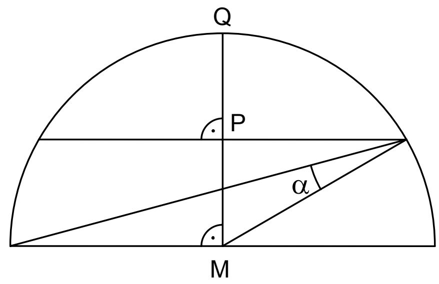
In beiden Fällen ist jeder Klammerterm + 2, 0 oder – 2. Die beiden Produkte also jeweils + 4, 0 oder – 4 und die Summe + 8, + 4, 0, – 4 oder – 8.

Zusammenfassung: Die Summe der acht Produkte kann nur die Werte + 8, + 4, 0, – 4 oder – 8 annehmen.

Aufgabe 2

In der Figur ist M der Mittelpunkt des Halbkreises und P der Mittelpunkt der Strecke MQ.

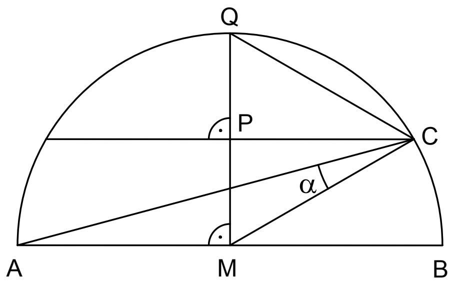
Bestimme α.



1. Lösung

Mit den Benennungen der nebenstehenden Figur und der Aufgabenstellung gilt |MA| = |MB| = |MC| = |MQ| = r und

$|MP| = \frac{r}{2}$.



Verbinden wir C mit Q, so ist die Strecke PC die Mittelsenkrechte im Dreieck MCQ, da nach Aufgabenstellung P der Mittelpunkt der Strecke MQ und PC orthogonal zu MQ ist.

Das Dreieck MCQ ist also gleichschenklig mit |MC| = |QC|.

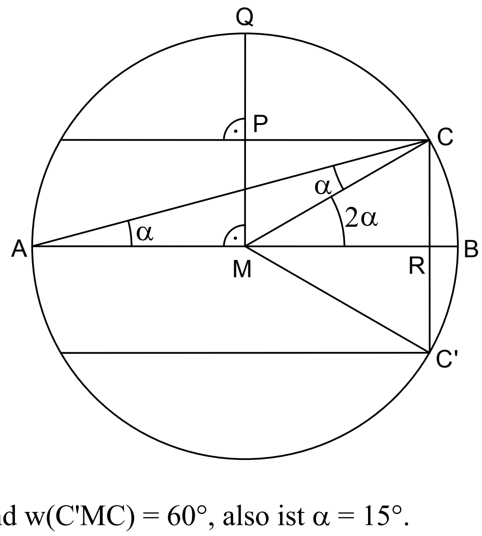
Da außerdem |MQ| = |MC| gilt, ist das Dreieck sogar gleichseitig.

Es gilt also w(CMP) = w(CMQ) = 60° und w(PCM) = 30°.

Das Dreieck AMC ist gleichschenklig mit |MA| = |MC|, deshalb gilt w(MAC) = w(ACM) = α. Da die Winkel $\measuredangle$ PCA und $\measuredangle$ MAC Wechselwinkel an den parallelen Geraden (AB) und (PC) sind, sind diese Winkel gleich groß und es gilt w(PCM) = w(PCA) + w(ACM) = 2α. Zusammen mit w(PCM) = 30° folgt dann α = 15°.

2. Lösung

Der Punkt C wird an der Geraden (AB) gespiegelt. Der Schnittpunkt der Strecke CC' mit der Strecke AB sei R.



Da AB ein Durchmesser des Kreises ist, liegt der Bildpunkt C auf dem Kreis um M. Es gilt also |MC| = |MC'|. Die Strecke CC' ist orthogonal zu AB und wird vom Schnittpunkt R halbiert. Da CC' und MQ beide zu AB orthogonal sind, sind sie parallel zueinander. Es gilt deshalb |RC| = |MP| und damit |CC'| = 2 · |RC| = 2 · |MP| = r.

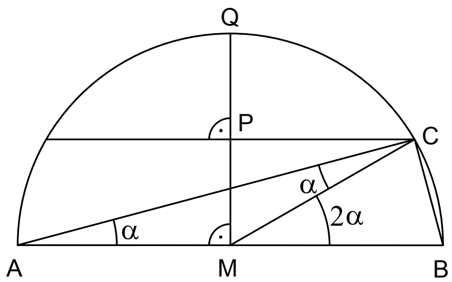
Das Dreieck MC'C ist also gleichseitig und BM ist die Mittelsenkrechte von CC'.

Der Winkel $\measuredangle$BMC hat als Außenwinkel des Dreiecks AMC die Größe 2α.

Im gleichseitigen Dreieck MC'C gilt also: w(C'MC) = 4α und w(C'MC) = 60°, also ist α = 15°.

3. Lösung

Das Dreieck MCQ ist gleichseitig; außerdem ist das Dreieck AMC gleichschenklig. (Nachweise z.B. wie in der ersten Lösung)



In der nebenstehenden Figur gilt also

w(CMQ) = 60°,

w(BMC) = 90° – 60° = 30°,

w(BMC) = 180° – w(CMA) = 180° – (180° – α – α) = 2α.

Aus den beiden letzten Zeilen folgt 2α = 30°, also α = 15°.

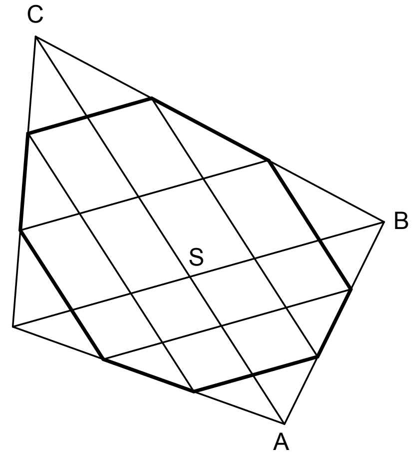
Aufgabe 3

In einem Viereck, bei dem alle Winkel kleiner als 180° sind, werden die vier Seiten in je drei gleich lange Stücke geteilt. Die acht Teilungspunkte bilden ein Achteck.

Welchen Anteil vom Flächeninhalt des Vierecks nimmt der Flächeninhalt des Achtecks ein?

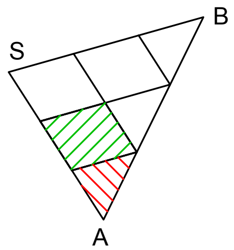
1. Lösung

Die Verbindungsstrecken der Teilpunkte benachbarter Seiten sind nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes parallel zu einer der beiden Diagonalen des Vierecks. Das Viereck ABCD wird durch diese Parallelen in 12 Dreiecke und 12 Parallelogramme zerlegt.



Betrachten wir nun das Dreieck ABS mit den Teilfiguren.

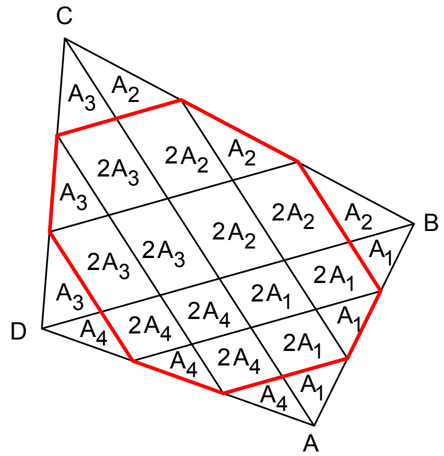
Die beiden Parallelen zu AS haben den gleichen Abstand, da die Strecke AB durch die Teilpunkte nach Aufgabenstellung in drei gleich lange Strecken zerlegt wird. Entsprechendes gilt für die Parallelen zu BS. Nach dem ersten Strahlensatz zerlegen diese Parallelen deshalb auch die Dreieckseiten AS und BS jeweils in drei gleich lange Strecken.



Die drei Parallelogramme sind zueinander kongruent; gleiches gilt für die drei Teildreiecke. Verwenden wir die Teilstrecke auf AS als Grundseite und den Abstand der nächsten zu AS parallelen Strecken als Höhe, so haben das schraffierte Dreieck und das schraffierte Parallelogramm gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist deshalb doppelt so groß wie der des Dreiecks.

Die gleichen Überlegungen gelten auch für die Teildreiecke BCS, CDS und DAS.

Wird der Flächeninhalt eines Teildreieckes in den Dreiecken ABS, BCS, CDS und DAS mit A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 bezeichnet, so erhalten wir für die Flächeninhalte der gesamten Figur die nebenstehende Aufteilung.



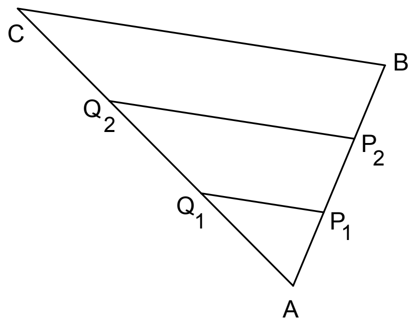
Dies bedeutet:

$$A_{\text{Viereck}} = 9 \cdot (A_1 + A_2 + A_3 + A_4),$$

$$A_{\text{Achteck}} = 7 \cdot (A_1 + A_2 + A_3 + A_4).$$

Der Flächeninhalt des Achtecks ist also $\frac{7}{9}$ des Flächeninhalts des Vierecks.

2. Lösung



Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes sind die Verbindungsstrecken Q_1P_1 und Q_2P_2 parallel zur Diagonalen BD des Vierecks ABCD.

Das Dreieck ABD kann als Bild des Dreiecks AP_1Q_1 bei einer zentrischen Streckung mit Zentrum A und Streckfaktor 3 aufgefasst werden. Bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckfaktor k wird der Inhalt von Flächen um den Faktor k^2 verändert. Deshalb ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABD neunmal so groß wie der Inhalt des Dreiecks AP_1Q_1.

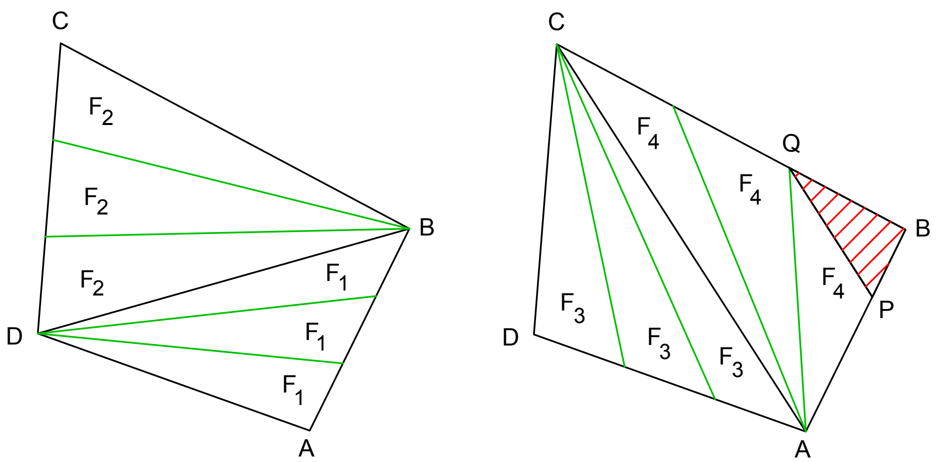
Entsprechendes gilt auch in den Teildreiecken ABC, BCD und CDA. Für den Flächeninhalt des Achtecks folgt daraus:

$$\begin{aligned} A_{\text{Achteck}} &= A_{ABCD} - \frac{1}{9}A_{DAB} - \frac{1}{9}A_{ABC} - \frac{1}{9}A_{BCD} - \frac{1}{9}A_{CDA} \\ &= A_{ABCD} - \frac{1}{9}\left(A_{DAB} + A_{ABC}\right) - \frac{1}{9}\left(A_{BCD} + A_{CDA}\right) \\ &= A_{ABCD} - \frac{1}{9}A_{ABCD} - \frac{1}{9}A_{ABCD} \\ &= \frac{7}{9}A_{ABCD}. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Achtecks ist also $\frac{7}{9}$ des Flächeninhalts des Vierecks ABCD.

3. Lösung

Die Seiten des Vierecks ABCD sind entsprechend der Aufgabenstellung jeweils in drei gleich lange Teilstrecken zerlegt. Das Viereck kann auf zwei verschiedene Weisen durch seine Diagonalen in zwei Teildreiecke zerlegt werden. (Siehe Abb.)



Verbindet man die Teilungspunkte der Vierecksseiten wie angegeben mit einem der gegenüberliegenden Eckpunkte des Vierecks, so entstehen Dreiecke, von denen jeweils drei über gleich lange Grundseiten und identische Höhe verfügen. Deshalb sind die mit der gleichen Benennung versehenen Dreiecke inhaltsgleich. Betrachtet man nun das schraffierte Dreieck PBQ in der rechten Figur, so ist dessen Inhalt nur ein Drittel des Flächeninhaltes von Dreieck ABQ, da die Höhe in den beiden Dreiecken über den Grundseiten AB bzw. PB übereinstimmt und PB nur ein Drittel der Länge von AB besitzt.

Entsprechende Überlegungen gelten für die übrigen drei kleinen Teildreiecke an den Eckpunkten A, C und D, die vom Viereck ABCD entfernt werden müssen, um das gewünschte Achteck zu erhalten.

Flächeninhalt des Vierecks ABCD: $A_4 = \frac{1}{2}\left[3\cdot\left(F_1 + F_2 + F_3 + F_4\right)\right]$

Flächeninhalt des Achtecks: $A_8 = A_4 - \frac{1}{3}\left(F_1 + F_2 + F_3 + F_4\right) = \frac{7}{6}\left(F_1 + F_2 + F_3 + F_4\right)$

Für das Verhältnis der beiden Flächeninhalte gilt: $\frac{A_8}{A_4} = \frac{7}{6} : \frac{3}{2} = \frac{7}{6}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{9}$.

Aufgabe 4

Starte mit einer natürlichen Zahl, verdopple sie und addiere 1. Verdopple anschließend diese neue Zahl um addiere wieder 1. Setze dieses Verfahren fort.

Wie viele Quadratzahlen kann eine solche Zahlenfolge enthalten?

Vorüberlegungen

Durch Probieren mit kleinen Startzahlen erhalten wir Zahlenfolgen, die im berechneten Bereich keine, eine oder zwei Quadratzahlen enthalten.

1, 3, 7, 15, 31, ...
2, 5, 11, 23, 47, ...
3, 7, 15, 31, 63, ...
4, **9**, 19, 39, 79, ...
5, 11, 23,47, 95, ...

Da auch die Berechnung von weiteren Folgegliedern bei anderen Startzahlen a nie zu mehr als 2 Quadratzahlen führt, drängt sich die folgende Vermutung auf:

Eine Zahlenfolge mit dem angegebenen Bildungsgesetz kann höchstens zwei Quadratzahlen enthalten.

1. Lösung

Durch die Bildungsvorschrift ist vorgegeben, dass höchstens die Startzahl gerade ist. Die zweite und alle folgenden Zahlen sind ungerade.

Es wird nun gezeigt, dass jede Quadratzahl in dieser Folge eine gerade Zahl als Vorgängerin hat, falls sie nicht selbst die Startzahl ist.

Es sei nun n eine natürliche Zahl in dieser Folge; die nächste Zahl ist 2n + 1 und diese Zahl sei das Quadrat einer natürlichen Zahl q.

$$2n+1=q^2 \Leftrightarrow 2n=q^2-1 \Leftrightarrow 2n=(q-1)\cdot(q+1)$$

Da 2n für jede natürliche Zahl eine gerade Zahl ist, ist das Produkt $(q-1)\cdot(q+1)$ gerade. Nun sind für jede natürliche Zahl q die Zahlen q – 1 und q + 1 entweder beide gerade oder beide ungerade. Das das Produkt gerade ist, muss die erste Möglichkeit vorliegen. Damit ist das Produkt $(q-1)\cdot(q+1)$ sogar durch 4 teilbar. Da nun 2n ein Vielfaches von 4 ist, muss n eine gerade Zahl sein. Jeder Quadratzahl in dieser Folge geht also eine gerade Zahl voraus. Da aber nach dem Bildungsgesetz höchstens die Startzahl gerade sein kann, kann also höchstens die Startzahl selbst oder die zweite Zahl der Folge eine Quadratzahl sein.

Da oben bereits Folgen ohne eine Quadratzahl, mit genau einer bzw. mit genau zwei Quadratzahlen angegeben sind, gilt zusammenfassend:

Es gibt Zahlenfolgen der angegebenen Art mit keiner, genau einer oder genau zwei Quadratzahlen.

2. Lösung

Bestimmung eines Terms zur Beschreibung der Folge

Die Startzahl z_1 einer solchen Zahlenfolge sei a mit $a \in \mathbb{N}$. Entsprechend der angegebenen Vorschrift entstehen nacheinander die Folgeglieder

$$z_1 = a$$
$$z_2 = 2a + 1$$
$$z_3 = 4a + 3$$
$$z_4 = 8a + 7$$
$$z_5 = 16a + 15.$$

Aus dieser Auflistung lässt sich erkennen, dass der Faktor vor der Startzahl a eine Zweierpotenz ist und der Summand um 1 kleiner ist, als dieser Faktor.

Das Folgeglied z_n lässt sich durch $2^{n-1} \cdot a + 2^{n-1} - 1$ darstellen.

Diese Eigenschaft "vererbt" sich von Folgeglied zu Folgeglied und gilt deshalb für alle weiteren.

Begründung

Nach dem Wortlaut der Aufgabenstellung gilt:

$$z_{n+1} = 2 \cdot z_n + 1 = 2 \cdot \left(2^{n-1} \cdot a + 2^{n-1} - 1\right) + 1 = 2^n \cdot a + 2^n - 2 + 1 = 2^n \cdot a + 2^n - 1.$$

Aus der Darstellung des Folgeglieds z_n ergibt sich also die entsprechende Darstellung für das nächste Folgeglied z_{n+1}.

Nachweis, dass höchstens die ersten beiden Folgeglieder Quadratzahlen sein können

1. Nachweis

Zum Nachweis wird untersucht, welche Eigenschaft der Term $2^{n-1} \cdot a + 2^{n-1} - 1$ haben muss, um eine Quadratzahl zu sein.

Es sei

$$2^{n-1} \cdot a + 2^{n-1} - 1 = u^2$$
$$2^{n-1} \cdot a + 2^{n-1} - 2 = u^2 - 1$$
$$2 \cdot \left(2^{n-2} \cdot a + 2^{n-2} - 1\right) = (u+1) \cdot (u-1).$$

Die linke Seite ist eine gerade ganze Zahl. Deshalb muss auch das Produkt $(u+1) \cdot (u-1)$ eine gerade Zahl sein. Da aber (u + 1) und (u – 1) entweder beide gerade oder beide ungerade sind, kann das Produkt nur dann gerade sein, wenn beide Faktoren gerade sind. Das Produkt $(u+1) \cdot (u-1)$ ist dann sogar durch 4 teilbar.

Da die rechte Seite durch 4 teilbar ist, muss auch der Klammerterm $2^{n-2} \cdot a + 2^{n-2} - 1$ auf der linken Seite gerade sein. Ist n > 2, dann sind die ersten beiden Summanden jeweils gerade und der gesamte Term also ungerade.

Der Term $2^{n-1} \cdot a + 2^{n-1} - 1$ kann also höchstens dann durch 4 teilbar und eventuell eine Quadratzahl sein, wenn $n \leq 2$ ist.

Daraus folgt aber, dass Quadratzahlen in einer solche Zahlenfolge höchstens als erstes oder als zweites Folgeglied auftreten können. Eine solche Zahlenfolge kann also höchstens zwei Quadratzahlen enthalten.

2. Nachweis

Das n-te Glied der Zahlenfolge lässt sich mit Hilfe des Terms $2^{n-1} \cdot a + 2^{n-1} - 1$ berechnen. Ab dem zweiten Folgeglied sind alle Zahlen ungerade.

Für eine ungerade Quadratzahl gilt:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k \cdot (k+1) + 1 .$$

Da entweder k oder k + 1 gerade ist, gilt $(2k+1)^2 \equiv 1 \bmod 8$.

Wenn nun das n-te Glied der Folge $2^{n-1} \cdot a + 2^{n-1} - 1$ eine ungerade Quadratzahl sein soll, dann muss $2^{n-1} \cdot a + 2^{n-1} - 1 \equiv 1 \bmod 8$, also $2^{n-1} \cdot (a+1) \equiv 2 \bmod 8$ gelten. Dies ist aber nur möglich, wenn der Exponent der Zweierpotenz höchstens 1 ist, denn sonst enthält das Produkt $2^{n-1} \cdot (a+1)$ unabhängig von a den Primfaktor 2 mindestens zweimal. Bei der Division durch 8 kann dann nicht der Rest 2 entstehen. Dies bedeutet, dass für n > 2 die Gleichung nicht erfüllt sein kann. Demnach können höchstens die ersten beiden Folgeglieder Quadratzahlen sein. Die Anzahl der Quadratzahlen in der Folge kann also 0, 1 oder 2 sein.

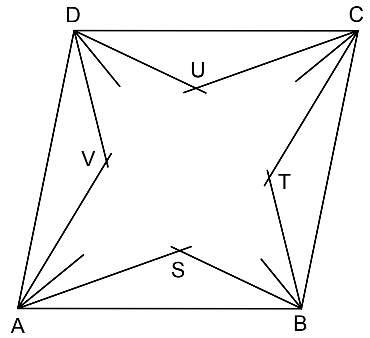
Zusammenfassung:

Da allenfalls die ersten beiden Zahlen einer solchen Folge Quadratzahlen sein können, genügt es, die ersten beiden Zahlen zu betrachten.

Wie die Beispiele in den Vorüberlegungen zeigen, gibt es Folgen

ohne Quadratzahl:	2, 5, 11, 23,....
mit genau einer Quadratzahl:	1, 3, 7, 15,...
mit genau zwei Quadratzahlen:	4, 9, 19, 39,...

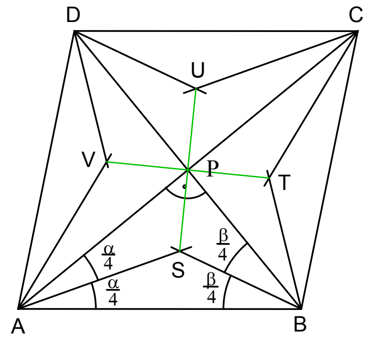
Aufgabe 5



In einer Raute ABCD sind die Winkelvierteilenden der Innenwinkel eingezeichnet. Diese schneiden sich, wie in der Abbildung gezeigt, in den Punkten S, T, U und V.

Von welcher Art ist das Viereck STUV?

1. Lösung



In jeder Raute stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren sich gegenseitig. Daher sind die Dreiecke ABP, BCP, CDP und DAP rechtwinklig und nach dem Kongruenzsatz sws zueinander kongruent.

Nach Voraussetzung sind AS und BS zwei Winkelhalbierende im Dreieck ABP. S ist damit der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABP. Entsprechend sind die Punkte T, U bzw. V die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden in den Dreiecken BCP, CDP bzw. DAP.

Die Geraden (SP), (TP), (UP) und (VP) halbieren die rechten Winkel der Teildreiecke bei P. Die Punkte S, P und U, sowie die Punkte T, P und V liegen jeweils auf einer Geraden, denn die Winkel $\measuredangle$ SPU und $\measuredangle$ TPV sind jeweils gestreckte Winkel.

$$\begin{aligned} w(SPU) &= w(SPB) + w(BPC) + w(CPU) \\ &= 45° + 90° + 45° = 180° \\ w(TPV) &= w(TPC) + w(CPD) + w(DPV) \\ &= 45° + 90° + 45° = 180° \end{aligned}$$

Außerdem sind die Geraden (SU) und (TV) orthogonal zueinander, denn es gilt

$$w(SPT) = w(SPB) + w(BPT) = 45° + 45° = 90°.$$

Die Strecken SP, TP, UP und VP sind entsprechend liegende Strecken in den kongruenten Dreiecken ABP usw. , sie sind daher gleich lang. Damit gilt aber auch $|SU| = |TV|$.

Damit ist gezeigt, dass sich die Diagonalen im Viereck STUV gleich lang sind, sich gegenseitig halbieren und zueinander orthogonal sind. Das Viereck STUV ist also ein Quadrat.

2. Lösung

Die Raute ABCD ist achsensymmetrisch zu ihren beiden Diagonalen. Auf Grund dieser Symmetrieeigenschaft sind die Strecken ST, TU, UV und VS orthogonal zu einer der beiden Diagonalen und werden von dieser halbiert. Außerdem sind die Teildreiecke ABP, BCP, CDP und DAP kongruente, rechtwinklige Dreiecke.

Der Punkt S ist Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck ABP, da die Gerade (AS) nach Aufgabenstellung den Winkel $\measuredangle$BAP und die Gerade (BS) den Winkel $\measuredangle$PBA halbiert.

Entsprechendes gilt auch für die Punkte T, U und V in den drei anderen Teildreiecken.

Diese vier Punkte sind also die Inkreismittelpunkte von vier kongruenten Dreiecken. Die Inkreisradien der kongruenten Dreiecke sind gleich groß.

Die Seiten des Vierecks STUV setzen sich jeweils aus zwei Teilstrecken zusammen, deren Länge mit dem Inkreisradius übereinstimmt. Alle vier Seiten sind also gleich lang. Außerdem sind die Seiten orthogonal zu den zueinander orthogonalen Diagonalen der Raute ABCD. Die Seiten des Vierecks STUV sind deshalb ebenfalls zueinander orthogonal. Ein Viereck mit zueinander orthogonalen, gleich langen Seiten ist ein Quadrat.

Aufgabe 6

Gegeben ist eine natürliche Zahl n > 0 und das Dreieck ABC mit A(0/0), B(2n/0) und C(n/n).

Wie viele Punkte mit den Koordinaten $\left(\frac{x}{n}/\frac{y}{n}\right)$ (x, y natürliche Zahlen) liegen innerhalb des Dreiecks ABC?

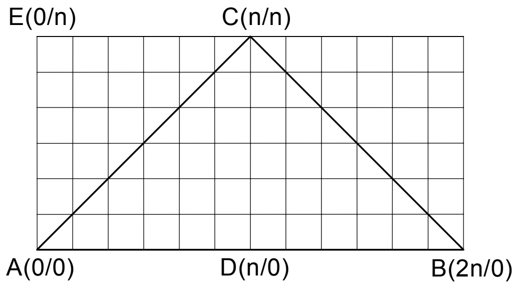
1. Lösung

Die Punkte mit den Koordinaten $\left(\frac{x}{n}/\frac{y}{n}\right)$, welche innerhalb des Dreiecks ABC liegen, werden kurz als zulässige Punkte (zP) bezeichnet.

Behauptung:

Die Anzahl der zP im Innern des Dreiecks ABC ist so groß wie die Anzahl der zP im Innern des Quadrats ADCE.

Begründung:



Die Anzahl der zP im Innern des Dreiecks CDB und die Anzahl der zP im Innern des Dreiecks CEA stimmen überein, da die zP des Dreiecks CDB durch Spiegelung an der Geraden (DC) und anschließende Spiegelung an der Geraden (AC) auf innere Punkte des Dreiecks CEA mit entsprechender Koordinatendarstellung abgebildet werden.

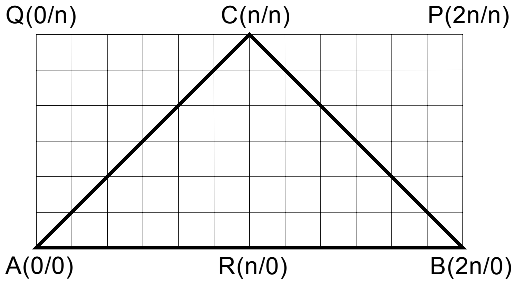
Es bleibt nachzuweisen, dass die Anzahl der zP auf der Strecke AC mit der Anzahl der zP auf der Strecke DC übereinstimmt. Die Punkte der Strecke AC mit der Koordinatendarstellung $\left(\frac{x}{n}/\frac{y}{n}\right)$ sind zP im Quadrat ADCE aber keine zP im Dreieck ABC. Für die entsprechenden Punkte der Stecke DC ist es genau umgekehrt. Stimmen diese beiden Anzahlen überein, so wird die Gesamtzahl der zP durch die Umwandlung des Dreiecks ABC in das Quadrat ADCE nicht verändert.

Da die Gerade AC die Steigung 1 besitzt, liegen auf der Strecke AC die zP $\left(\frac{i}{n}/\frac{i}{n}\right)$ mit $0 < i < n^2$, also $n^2 - 1$ Punkte. Alle zP auf der Strecke DC haben die Koordinatendarstellung $\left(n/\frac{i}{n}\right)$ mit $0 < i < n^2$, also ebenfalls $n^2 - 1$ Punkte. Damit ist gezeigt, dass die Anzahl der zP im Dreieck ABC und im Quadrat ADCE übereinstimmen.

Im Quadrat sind die zP aber leicht zu bestimmen. Sie sind in $n^2 - 1$ Zeilen und in $n^2 - 1$ Spalten angeordnet. Es gibt also insgesamt $\left(n^2 - 1\right)^2$ zulässige Punkte.

2. Lösung

Wir betrachten zunächst das Rechteck ABPQ. Für die Punkte mit der Koordinatendarstellung $\left(\frac{x}{n}/\frac{y}{n}\right)$ im Innern dieses Rechtecks gilt $0 < x < 2n^2$ und $0 < y < n^2$ mit natürlichen Zahlen x und y. Es gibt also $n^2 - 1$ Reihen mit jeweils $2n^2 - 1$ zP.



Dies sind insgesamt $\left(n^2-1\right)\cdot\left(2n^2-1\right)$, also $2n^4 - 3n^2 + 1$ Punkte.

Diese Anzahl setzt sich zusammen aus der gesuchten Anzahl A der zP im Dreieck ABC, den inneren Punkten mit der entsprechenden Koordinatendarstellung im Innern der Strecken AC und BC, sowie den inneren Punkten in den Teildreiecken ACQ und BPC.

Mit Ausnahme der zP auf der Strecke RC können nun die zP im Dreieck ABC durch die Spiegelung an der Geraden (AC) bzw. (BC) genau einem inneren Punkt im Dreieck ACQ bzw. BPC zugeordnet werden und umgekehrt.

Die Anzahl der inneren Punkte auf den Strecken AC, BC und RC beträgt jeweils $n^2 - 1$. Der Nachweis kann für AC und RC wie bei der ersten Lösung und für BC durch Symmetriebetrachtungen geführt werden.

Die oben beschriebene Anzahl der zP im Rechteck ABPQ kann damit auch in der Form

$$2(A-(n^2-1)) + 3 - (n^2-1)$$

dargestellt werden. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 2A - n^2 - 1 &= 2n^4 - 3n^2 + 1 \\ 2A &= 2n^4 - 4n^2 + 2 \\ A &= n^4 - 2n^2 + 1 \\ A &= \left(n^2-1\right)^2. \end{aligned}$$

3. Lösung

Durch Streckung der Achsen des Koordinatensystems mit dem Faktor n entsteht aus jedem Punkt P mit der Koordinatendarstellung $\left(\frac{x}{n}/\frac{y}{n}\right)$ der Punkt P' (x/y), wobei x und y natürliche Zahlen sind.

Die Eckpunkte des neuen Dreiecks sind dann A'(0/0), $B'\left(2n^2/0\right)$ und $C'\left(n^2/n^2\right)$. Es sind nun alle in diesem Dreieck enthaltenen Gitterpunkte zu zählen. Dazu betrachten wir die Gitterpunkte auf den zur y-Achse parallelen Linien für den x-Bereich von 0 bis n^2, die über der x-Achse und unter der Winkelhalbierenden liegen.

Ihre Anzahl beträgt: $0 + 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n^2 - 1$.

Da das Dreieck A'B'C symmetrisch ist zur Parallelen zur y-Achse durch den Punkt C, ergeben sich insgesamt $2\cdot\left(1+2+3+...+n^2-1\right)-\left(n^2-1\right)$ Gitterpunkte im Dreieck, wobei die doppelt gezählten Punkte auf der Symmetrieachse wieder einmal subtrahiert wurden. Mit der Summenformel für die natürlichen Zahlen und durch Zusammenfassen ergibt sich:

$$2\cdot\left(1+2+3+...+\left(n^2-1\right)\right)-\left(n^2-1\right)=2\cdot\frac{\left(n^2-1\right)\cdot n^2}{2}-\left(n^2-1\right)=\left(n^2-1\right)\cdot n^2-\left(n^2-1\right)=\left(n^2-1\right)^2.$$