1996

Runde 2

Aufgabe 1

Zeige: Wenn die Summe von 1996 Quadratzahlen durch 8 teilbar ist, dann sind mindestens vier dieser Quadratzahlen gerade.

Vorbemerkung

Eine Quadratzahl ist genau dann gerade, wenn die Basis gerade ist. Sie ist genau dann ungerade, wenn die Basis ungerade ist.

1. Lösung

Zunächst betrachten wir die Reste der Quadratzahlen modulo 8. Dabei stellen wir fest:

$0^2 \equiv 4^2 \equiv 8^2 \equiv ... \equiv (4\cdot n)^2 \equiv 0 \bmod 8$, denn $(4\cdot n)^2 = 16\cdot n^2 = 8\cdot(2\cdot n^2)$,

$1^2 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv ... \equiv (2\cdot n + 1)^2 \equiv 1 \bmod 8$, denn $(2\cdot n+ 1)^2 = 4\cdot n^2 + 4\cdot n + 1 = 4\cdot n\cdot(n + 1) + 1$.

Einer der beiden Faktoren n bzw. n + 1 ist gerade, damit ist $4n\cdot(n + 1)$ durch 8 teilbar.

$2^2 \equiv 6^2 \equiv 10^2 \equiv \ldots \equiv (4\cdot n + 2)2 \equiv 4 \bmod 8$, denn $(4n + 2)^2 = 16n^2 + 16n + 4 = 8\cdot(2n^2 + 2n) + 4$.

Jede ungerade Quadratzahl ergibt bei Division durch 8 den Rest 1. Die Summe von u ungeraden Quadratzahlen ist deshalb kongruent u mod 8. Die Summe von beliebig vielen geraden Quadratzahlen ergibt bei Division durch 8 den Rest 0 oder 4.

In der Summe S von 1996 Quadratzahlen seien nun g gerade und u ungerade.

Für S gilt: $S \equiv u \bmod 8$ oder $S \equiv u + 4 \bmod 8$.

Da S nach Voraussetzung durch 8 teilbar ist, gilt

$u \equiv 0 \bmod 8$ oder $u + 4 \equiv 0 \bmod 8$.

Die Anzahl der ungeraden Zahlen lässt sich also in der Form $u = 4\cdot n$ oder $u = 8\cdot n - 4$, $n \in N$ darstellen. Die Summe S enthält demnach 1996, 1992, 1988, ... ungerade Quadratzahlen.

Nehmen wir an, dass die Summe aus 1996 ungeraden Quadratzahlen besteht, so gilt $S \equiv 1996 \equiv 4 \bmod 8$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Es gibt also höchstens 1992 ungerade und damit mindestens 4 gerade Summanden in der Summe S.

2. Lösung

In der folgenden Lösung werden der Reihe nach die Fälle ausgeschlossen, dass keine, genau eine, zwei oder drei der Quadratzahlen gerade sind.

Nach Aufgabenstellung gilt $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_{1996}^2 = 8 \cdot n$, wobei alle Zahlen a_i und n natürliche Zahlen sind.

Annahme 1: Alle a_i sind ungerade. Mit $a_i = 2m_i + 1$ lässt sich die Summe dann in folgender Form darstellen:

$$(2m_i+1)^2+(2m_2+1)^2+\ldots+(2m_{1996}+1)^2=8\cdot n$$

$$4m_1^2+4m_1+1+4m_2^2+4m_2+1+...+4m_{1996}^2+4m_{1996}+1=8\cdot n$$

$$4\cdot\left(m_1^2+m_1+m_2^2+m_2+...+m_{1996}^2+m_{1996}\right)+1996=8\cdot n$$

$$4\cdot\left(m_1\cdot(m_1+1)+m_2\cdot(m_2+1)+...+m_{1996}\cdot(m_{1996}+1)+499\right)=8\cdot n$$

$$m_1\cdot(m_1+1)+m_2\cdot(m_2+1)+...+m_{1996}\cdot(m_{1996}+1)+499=2\cdot n.$$

Die Summanden der linken Seite sind mit Ausnahme von 499 alle gerade, da entweder die natürliche Zahl m_i oder ihr Nachfolger $m_i + 1$ gerade ist. Die Summe auf der linken Seite ist also ungerade, das Produkt auf der rechten Seite aber eine gerade Zahl. Damit ist nachgewiesen, dass nicht alle 1996 Quadratzahlen ungerade sein können.

Annahme 2: Unter den 1996 Quadratzahlen gibt es genau eine gerade. Die Summe aus 1995 ungeraden und einer geraden Zahl ist ungerade. Die Summe aus den 1996 Quadratzahlen ist deshalb nicht durch 8 teilbar.

Annahme 3: Es gibt zwei gerade Quadratzahlen. Die Zahlen werden so benannt, dass a_1 und a_2 die geraden Zahlen und die restlichen ungerade Zahlen sind. Entsprechend den beiden vorhergehenden Fällen erhalten wir:

$$4\cdot\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_3+...+m_{1996}^2+m_{1996}\right)+1994=8\cdot n$$

$$4\cdot\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_3+...+m_{1996}^2+m_{1996}\right)+1992+2=8\cdot n$$

$$4\cdot\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_3+...+m_{1996}^2+m_{1996}+498\right)+2=8\cdot n.$$

Die Summe auf der linken Seite ist zwar durch 2 aber nicht durch 4 teilbar. Da $8\cdot n$ durch 4 teilbar ist, ist die Gleichung auch in diesem Falle nicht für natürliche Zahlen erfüllbar.

Annahme 4: Es gibt drei gerade Quadratzahlen. Die Summe aus den 1993 ungeraden Quadratzahlen und den drei geraden Quadratzahlen ist ungerade und kann deshalb nicht durch 8 teilbar sein.

Aus den vier Fallunterscheidungen folgt, dass es mindestens vier gerade Quadratzahlen geben muss, wenn die Summe von 1996 Quadratzahlen durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 2

Zwei Kreise k_1 und k_2, deren Mittelpunkte den Abstand 5 cm haben, schneiden sich in A und B. Eine Gerade g schneidet den Kreis k_1 außer in A noch in X und den Kreis k_2 außer in A noch in Y.

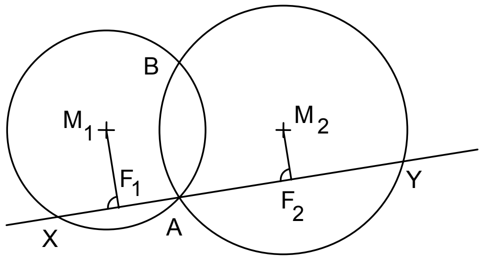
Wie lang kann die Strecke XY höchstens sein?

1. Lösung

Die Mittelpunkte der beiden Kreise werden mit M_1 und M_2 bezeichnet. Die Orthogonalen durch diese beiden Mittelpunkte schneiden die Gerade (XY) in den Punkten F_1 und F_2. Diese beiden Orthogonalen sind also zueinander parallel. Ihr Abstand beträgt $|F_1F_2|$. Jede andere Strecke, deren Endpunkte auf den beiden Orthogonalen liegen, ist also mindestens solang wie $|F_1F_2|$; insbesondere gilt $|M_1M_2| \geq |F_1F_2|$.

Die Geraden (M_1F_1) bzw. (M_2F_2) sind jeweils Symmetrieachse des Kreises k_1 bzw. k_2. Deshalb ist F_1 der Mittelpunkt der Strecke AX und F_2 der Mittelpunkt der Strecke AY. Für die weiteren Überlegungen sind zwei Fälle zu unterscheiden, die durch die beiden folgenden Bilder gegeben sind. (Die Benennungen der beiden Kreise seien so gewählt, dass $r_2 \geq r_1$ gilt.

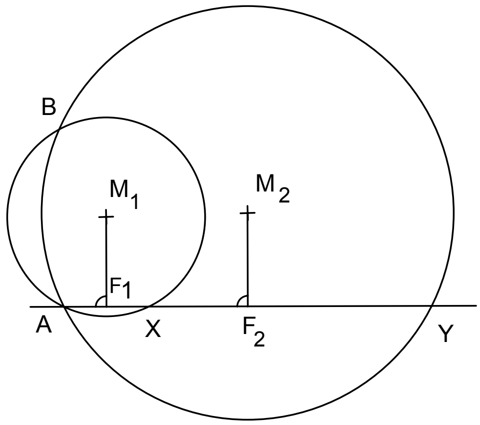
Der Punkt A liegt zwischen den Punkten X und Y.



Für die Länge der Strecke XY gilt:

$$\begin{aligned} |XY| &= |XA| + |AY| \\ &= 2\cdot|F_1A| + 2\cdot|AF_2| \\ &= 2\cdot(|F_1A| + |AF_2|) \\ &= 2\cdot|F_1F_2| \\ &\leq 2\cdot|M_1M_2|. \end{aligned}$$

Der Punkt X liegt zwischen A und Y.

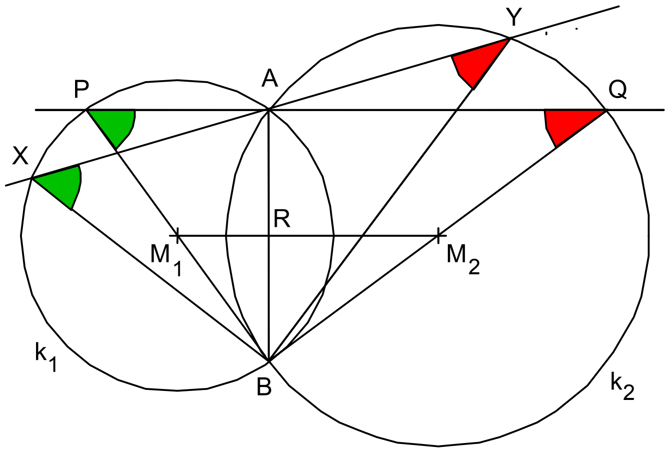


Für die Länge der Strecke XY gilt:

$$\begin{aligned} |XY| &= |AY| - |AX| \\ &= 2\cdot|AF_2| - 2\cdot|AF_1| \\ &= 2\cdot(|AF_2| - |AF_1|) \\ &= 2\cdot|F_2F_1| \\ &\leq 2\cdot|M_1M_2|. \end{aligned}$$

Wenn die Gerade (XY) parallel zur Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte ist, dann sind die Strecken F_1F_2 und M_1M_2 gleich lang. Für diese Lage hat die Strecke XY die Länge 10 cm. Sind die Geraden nicht parallel, so ist die Länge der Strecke XY kleiner als 10 cm.

2. Lösung



Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in den Punkten A und B. Der Schnittpunkt der Strecke AB mit der Geraden (M_1M_2) wird mit R bezeichnet. Die Gerade (BM_1) bzw. (BM_2) schneidet den Kreis k1 bzw. k_2 im Punkt P bzw. Q. Die Punkte M1, R und M_2 sind die Mittelpunkte der Strecken BP, BA und BQ. Es gibt deshalb eine zentrische Streckung mit Zentrum B und Streckfaktor 2, durch die die Strecke M_1M_2 auf die Strecke PQ abgebildet wird. Die Strecke PQ ist deshalb parallel zu M_1M_2 und doppelt so lang wie diese.

Es wird nun gezeigt, dass die beiden Kreise aus jeder anderen Gerade durch A eine kürzere Strecke XY ausschneiden. Die Strecke kann also höchstens doppelt so lang wie der Abstand der beiden Kreismittelpunkte sein.

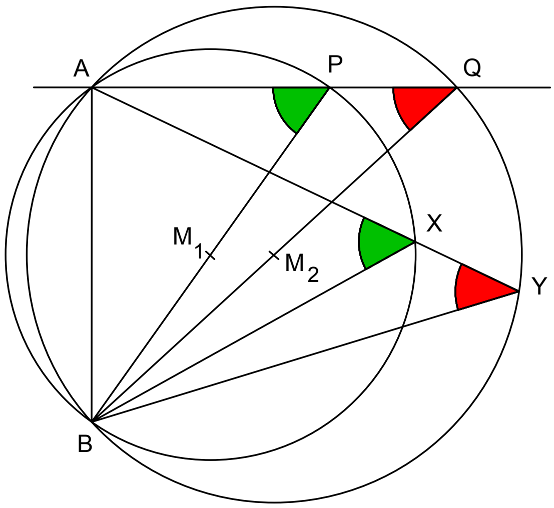
Nach dem Randwinkelsatz gilt

w(BXY) = w(BPQ) und w(XYB) = w(PQB).

Die beiden Dreiecke BQP und BYX stimmen also paarweise in zwei Winkelgrößen überein und sind deshalb ähnlich.

Da in ähnlichen Dreiecken die Verhältnisse der Seitenlängen konstant sind, ist die Länge der Strecke XY dann am größten, wenn die Länge der Seite BX (bzw. BY) am größten ist. Da diese Seite nach Aufgabenstellung eine Sehne des Kreises k_1 ist, ist ihre Länge genau dann maximal, wenn die Seite BX ein Durchmesser ist, wenn also X mit P zusammenfällt. Nach dem oben gezeigten ist dann die Länge der Seite XY gleich der Länge von PQ und damit 10 cm.

Im nebenstehenden Bild liegt A nicht zwischen den Punkten X und Y.



Nach dem Randwinkelsatz gilt wieder

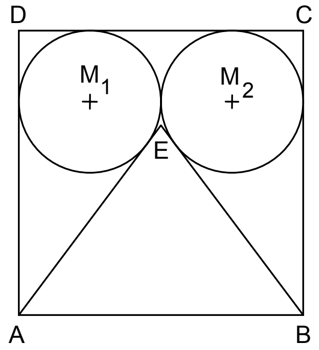
w(XYB) = w(PQB) und w(AXB) = w(APB).

Damit sind auch die Nebenwinkel $\measuredangle BPQ$ und $\measuredangle BXY$ gleich groß. In den beiden Dreiecken BQP und BYX stimmen also zwei Winkelpaare in ihrem Maß überein. Die beiden Dreiecke sind ähnlich. Die weitere Argumentation stimmt mit dem ersten Teil dieser Lösung überein.

Anmerkung:

In beiden Lösungen wurde der Fall nicht gesondert untersucht, bei dem A auf der orthogonalen zu M_1M_2 durch M_1 liegt. In diesem Fall ist die gerade (PQ) die Tangente an den Kreis k_1. Die Punkte A und P fallen zusammen. Die oben nachgewiesenen Eigenschaften gelten auch in diesem Sonderfall.

Aufgabe 3



Die beiden Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 haben den Radius r. Sie berühren sich gegenseitig und jeweils zwei Seiten des Quadrats ABCD. Die Geraden (AE) und (BE) sind Kreistangenten.

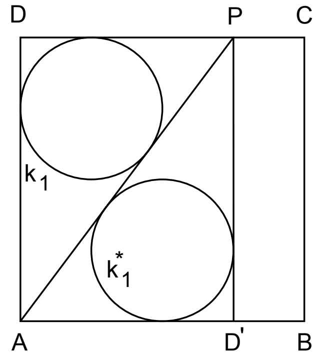
Ist der Radius des Inkreises von Dreieck ABE kleiner, gleich oder größer als r?

Die Antwort ist zu begründen.

Behauptung:

Der Radius des Inkreises von Dreieck ABE stimmt mit dem Radius der beiden gegebenen Kreise überein.

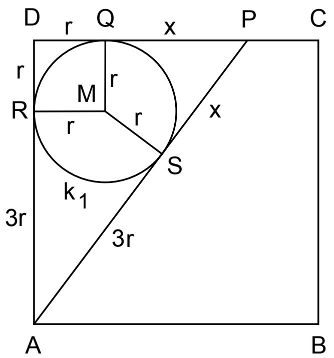
1. Lösung



Von A aus wird die Tangente an den Kreis k_1 gelegt. Diese Tangente schneidet die Quadratseite CD in P. Spiegelt man das Dreieck APD mit seinem Inkreis am Mittelpunkt der Strecke AP, so entsteht der Bildkreis k_1^*.

Es wird nun gezeigt, dass dieser Bildkreis der Inkreis des Dreieckes ABE aus der Aufgabenstellung ist. Dazu muss gezeigt werden, dass die Tangente von B an den Kreis k_2, d.h. die Seite BE den Kreis k_1^* berührt.

Dazu genügt es zu zeigen, dass der Mittelpunkt des Kreises k_1^* auf der Mittelsenkrechten der Quadratseite AB liegt. Dann geht nämlich bei der Spiegelung an dieser Mittelsenkrechten der Kreis k_1^* in sich selbst über. Die gemeinsame Tangente von A an die Kreise k_1 und k_1^* geht in eine gemeinsame Tangente an den Bildkreis von k_1 bei dieser Spiegelung, also k_2, und an k_1^* über. Auf der Tangente an k_2 liegt nach Aufgabenstellung der Punkt E.



Die Tangentenabschnitte von A, P und D an den Kreis k_1 sind paarweise gleich lang. Außerdem ist die Quadratseite nach Aufgabenstellung viermal so lang wie der Kreisradius. Es gelten deshalb die in der Zeichnung angegebenen Längen. Die Vierecke ASMR und PQMS sind rechtwinklige Drachen.

Zur Berechnung der Streckenlänge x berechnen wir den Flächeninhalt des Dreiecks APD auf zwei verschiedene Weisen.

Zum einen gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot (r + x)$, d.h. $A = 2r^2 + 2r \cdot x$.

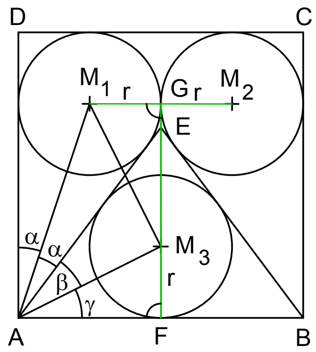
Andererseits lässt sich der Flächeninhalt auch als Flächensumme der Teilfiguren darstellen.

$$A = r^2 + \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot r + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \text{, d.h. } A = 4r^2 + r \cdot x$$

Aus dem Vergleich der beiden Darstellungen erhalten wir $2r^2 + 2rx = 4r^2 + rx \Leftrightarrow rx = 2r^2 \Leftrightarrow x = 2r$.

Der Abstand der beiden parallelen Geraden (AD) und (D*P) beträgt 3r. Der Mittelpunkt des Kreises k_1^* hat von (D*P) den Abstand r und deshalb von (AD) den Abstand 2r. Damit ist gezeigt, dass dieser Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten von AB liegt.

2. Lösung



Wegen der Symmetrie des Quadrates und der vorgegebenen Lage der beiden Kreise k_1 und k_2 ist das Dreieck ABE gleichschenklig mit der Basis AB. Die Symmetrieachse h der Ausgangsfigur geht durch E und ist die Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle AEB$.

Auf der Symmetrieachse h wird ein Punkt M_3 so festgelegt, dass sein Abstand von der Seite AB mit dem Radius der beiden gegebenen Kreise übereinstimmt. Es wird nun nachgewiesen, dass der Kreis um M_3 mit Radius r der Inkreis des Dreiecks ABE ist. Dazu muss nachgewiesen werden, dass M_3 auf den Winkelhalbierenden dieses Dreiecks liegt. Nach Konstruktion liegt M_3 auf der Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle AEB$. Es genügt also der Nachweis, dass eine weitere Winkelhalbierende durch M_3 geht.

Da M_1 der Mittelpunkt des Kreises k_1 ist, liegt M_1 auf der Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle EAD$.

Es gilt deshalb: $w(EAM_1) = w(M_1AD) = \alpha$. (1)

Die Dreiecke AFM_3 und GM_1M_3 sind nach Konstruktion rechtwinklig und haben jeweils die Kathetenlängen r und 2r; sie sind nach dem Kongruenzsatz sws kongruent. Die Seiten M_1M_3 und M_3A sind also gleich lang. Außerdem ergänzen sich die Winkel $\measuredangle AM_3F$ und $\measuredangle GM_3M_1$ zu 90°. Somit ist das Dreieck AM_3M_1 gleichschenklig rechtwinklig.

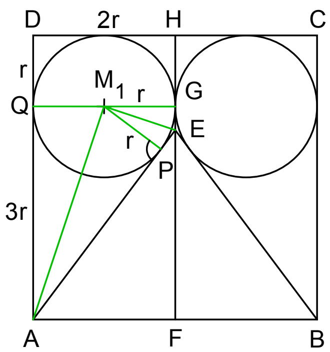
Daraus folgt: $w(M_3AM_1) = 45°$. (2)

Für die Winkel $\measuredangle M_3AE$ und $\measuredangle BAM_3$ folgt aus (1) und (2) und der Benennung in der Figur:

$w(M_3AM_1) = \alpha + \beta = 45°$ und $2\alpha + \beta + \gamma = 90°$, also $\alpha + \gamma = 45°$.

Aus den letzten beiden Zeilen folgt, dass β und γ gleich sind. Damit ist gezeigt, dass M_3 auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\measuredangle BAE$ liegt. Da nach Festlegung von M_3 der Kreis mit Radius r die Seite AB im Punkt F berührt, hat der Inkreis des Dreiecks ABE den Radius r.

3. Lösung



Wir ergänzen die Figur durch die Mittelparallele FH von AD und BC. Sie ist die gemeinsame Tangente der beiden Kreise im Punkt G. Die Orthogonale zu (FH) durch G geht durch den Kreismittelpunkt M_1 und schneidet die Quadratseite in Q.

Der Kreis um M_1 berührt die Strecke AE im Punkt P.

Da die Geraden (AQ), (AP) und (GE) Tangenten an den Kreis sind, sind die Vierecke AEM_1Q und M_1PEG rechtwinklige Drachen. Die Strecken AM_1 und EM_1 sind die Symmetrieachsen dieser Drachen und damit die Winkelhalbierenden der Winkel bei M_1.

Da der Winkel $\measuredangle QM_1G$ ein gestreckter Winkel ist, bilden die beiden Winkelhalbierenden M_1A und M_1E bei M_1 einen rechten Winkel.

Es den geometrischen Eigenschaften der Figur folgt: $|AP| = |AQ| = 3r$ und $|EP| = |EG|$.

Nach dem Höhensatz gilt im rechtwinkligen Dreieck AEM_1 $|AP| \cdot |PE| = r^2$,

nach den oben angegebenen Beziehungen also : $|EP| = |EG| = \frac{1}{3} \cdot r$.

Das gleichschenklige Dreieck ABE hat also die Höhe $|FE| = |FG| - |EG| = 3r - \frac{1}{3}r = \frac{8}{3}r$

und die Schenkellänge $|AE| = |AP| + |PE| = 3r + \frac{1}{3}r = \frac{10}{3}r$.

Der Umfang des Dreiecks ABE ist damit $U = 2 \cdot \frac{10}{3} r + 4r = \frac{32}{3} r$

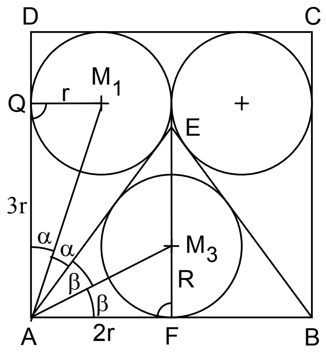
und sein Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot \frac{8}{3} r = \frac{16}{3} r^2$.

Zwischen dem Umfang, dem Flächeninhalt und dem Inkreisradius ρ eines Dreiecks besteht die Beziehung $A = \frac{1}{2} \cdot U \cdot \rho$

Durch Einsetzen erhalten wir $\rho = r$.

Der Radius ρ des Inkreises von ABE stimmt also mit dem Radius der beiden gegebenen Kreise überein.

4. Lösung (Kurzfassung)



Die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABE schneiden sich im Punkt M_3.

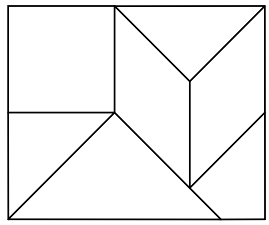
In den rechtwinkligen Dreiecken AM_1Q und AFM_3 gilt $\tan\alpha = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$ bzw. $\tan\beta = \frac{R}{2r}$. Außerdem ist $2\alpha + 2\beta = 90°$, d.h. $\alpha + \beta = 45°$. Nach den Additionssätzen für die Tangensfunktion gilt:

$$\tan\beta = \tan(45° - \alpha) = \frac{\tan 45° - \tan\alpha}{1 + \tan 45° \cdot \tan\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{R}{2r} = \frac{1}{2},$$

also $R = r$.

Aufgabe 4

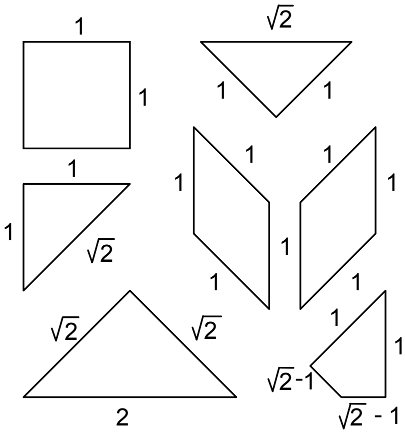
Das abgebildete Rechteck ist aus sieben Teilen zusammengesetzt: Dreiecke, Rauten, Drachen, Quadrat. Alle auftretenden Winkel betragen 45° oder ein Vielfaches davon.



Weise nach, dass man diese sieben Teile nicht zu einem Quadrat zusammensetzten kann.

Lösung

Nach Aufgabenstellung sind alle auftretenden Winkelmaße 45° oder ein Vielfaches davon. Daraus folgt, dass alle drei Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig sind. Wählen wir die Seitenlänge des Quadrats als Längeneinheit, so ergeben sich die in der nebenstehenden Abbildung angegebenen Seitenlängen. Die Maße für die beiden Rauten ergeben sich unmittelbar. Die Seitenlängen der drei Dreiecke folgen aus der Anwendung des Satzes von Pythagoras. Die kurze Seitenlänge des Drachens ist die Differenz aus der Kathetenlänge des großen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks und der Seitenlänge der Raute. Als Seitenlängen der Quadrate treten also in der gewählten Längeneinheit nur die Maßzahlen $\sqrt{2}-1$, 1, $\sqrt{2}$ und 2 auf.



Für den Flächeninhalt A des gegebenen Rechteckes in der zugehörigen Flächeneinheit gilt $A = 2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Für die Seitenlänge a des flächengleichen Quadrates gilt $a = \sqrt{2+2\sqrt{2}}$.

Es wird nun gezeigt, dass die Streckenlänge a nicht mit Hilfe der oben genannten Maßzahlen der Teilfiguren dargestellt werden kann.

1. Nachweis

Wenn die sieben Teile lückenlos und überschneidungsfrei zu einem flächengleichen Quadrat gelegt werden könnten, müsste die Seitenlänge a als Kombination der oben angegebenen Seitenlängen der einzelnen Teile, also in der Form $n + m\cdot\sqrt{2}$, $m \in N_0$, darstellbar sein.

Wegen $a = \sqrt{2+2\sqrt{2}} > \sqrt{2+2} = 2$ und $a = \sqrt{2+2\sqrt{2}} < \sqrt{1+2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = 1+\sqrt{2}$ gilt

$$2 < a < 1+\sqrt{2}\ .$$

Eine Darstellung in der gewünschten Form ist also nicht möglich. Die sieben Teile können nicht zu einem flächengleichen Quadrat gelegt werden.

2. Nachweis

Wenn wir annehmen, dass die Quadratseite $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ sich mit Hilfe der Maßzahlen $\sqrt{2}-1$, 1, $\sqrt{2}$ und 2 darstellen lässt, dann muss es ganze Zahlen n und m so geben, dass $\sqrt{2+2\sqrt{2}} = n + m\cdot\sqrt{2}$ gilt.

Durch Quadrieren erhalten wir $2+2\sqrt{2} = n^2 + 2m^2 + 2nm\sqrt{2}$.

Ein Vergleich der rationalen und der irrationalen Teile auf beiden Seiten der Gleichung führt zu den Bedingungen $2 = n^2 + 2m^2$ und $2 = 2nm$.

Für ganze Zahlen ist die zweite Bedingung nur für $n = m = 1$ oder $n = m = -1$ erfüllt.

Beide Möglichkeiten führen aber beim Einsetzen in die erste Bedingung zu einem Widerspruch.

Somit gibt es keine ganzen Zahlen n und m, die die Bedingung $\sqrt{2+2\sqrt{2}} = n + m\cdot\sqrt{2}$ erfüllen.