1996

Runde 1

Aufgabe 1

Ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 cm und 9 cm wird in kleinere Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen, in Zentimeter gemessen, zerlegt.

Bestimme eine Zerlegung mit möglichst vielen Rechtecken, von denen keine zwei deckungsgleich sind.

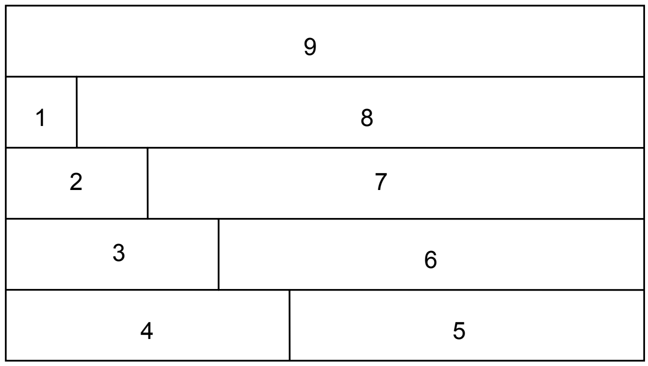
Lösung

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 45 cm^2. Die Zahl 45 soll in eine Summe von möglichst vielen Summanden zerlegt werden. (Alle Angabe von Seitenlängen und Flächeninhalten beziehen sich auf die Einheiten cm bzw. cm^2)

Bilden wir die Summe

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9,$$

so erhalten wir gerade den Wert 45. Das Bild rechts zeigt, dass das große Rechteck auch tatsächlich in neun nicht deckungsgleiche Rechtecke mit diesen Flächeninhalten und ganzzahligen Seitenlängen zerlegt werden kann.

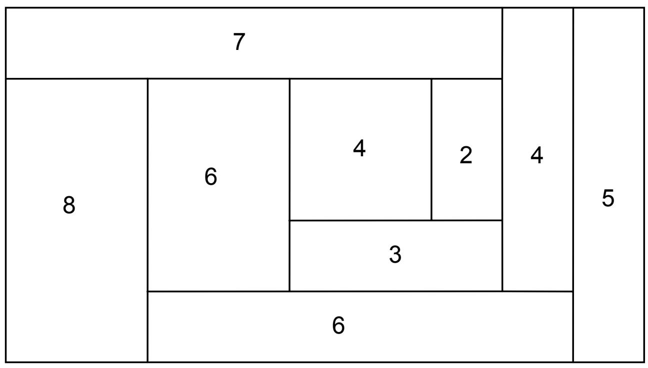


Die Flächeninhalte 4 und 6 dürfen aber beispielsweise zweimal auftreten, da diese Zahlen verschiedene Produktzerlegungen $4 = 1 \cdot 4$ und $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 1 \cdot 6$ und $6 = 2 \cdot 3$ besitzen. Es gibt deshalb jeweils zwei nicht deckungsgleiche Rechtecke mit den Flächeninhalten 4 und 6. Die Flächeninhalte 1, 2, 3, 5, 7 können aber nur einmal vorkommen.

Bilden wir nun unter dieser Voraussetzung die Summe mit möglichst kleinen Summanden, so erhalten wir:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 = 38,$$

$$1+2+3+4+4+5+6+6+7+8 = 46.$$



Die Summe

$$2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 = 45$$

ist eine weitere Darstellung der Zahl 45 mit der geforderten Eigenschaft. Eine passende Zerlegung des großen Rechtecks in die neun kleineren Rechtecke zeigt das zweite Bild.

Eine Vergrößerung der Summandenzahl ist nicht möglich. Jeder weitere zulässige Summand würde dazu führen, dass mindestens zwei andere aus der Summe entfernt werden müssten.

Aufgabe 2

Zwei Primzahlen, die beide größer sind als 5 und sich um 2 unterscheiden, werden addiert. Das Ergebnis wird in Primfaktoren zerlegt.

Weise nach, dass diese Zerlegung mindestens vier Faktoren enthält, wobei nicht alle verschieden sein müssen.

1. Lösung

Die beiden Primzahlen sollen p und p + 2 heißen: Nach Voraussetzung gilt p > 5. Damit sind die beiden Primzahlen ungerade. Für ihre Summe s gilt nun:

$$s = p + (p + 2),$$
$$s = 2 \cdot (p + 1).$$

Die Summe s enthält also den Primfaktor 2.

Da p ungerade ist, ist p + 1 gerade. Demnach enthält der zweite Faktor von s ebenfalls den Primfaktor 2.

Von den drei aufeinander folgenden Zahlen p, p + 1 und p + 2 ist genau eine durch 3 teilbar.
Da p und p + 2 nach Voraussetzung Primzahlen größer als 5 sind, können beide Zahlen nicht durch 3 teilbar sein. Deshalb muss p + 1 durch 3 teilbar sein. Somit ist ein dritter Primfaktor von s gefunden.

Es gilt: $s = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot t$

Wegen p > 5 ist s größer als 12, folglich ist t größer als 1.

Ist t selbst eine Primzahl, so enthält die Primfaktorzerlegung von s genau vier Faktoren.

Ist t keine Primzahl, so enthält t mindestens zwei weitere Primfaktoren. Die Primfaktorzerlegung von s enthält in diesem Fall sogar mindestens fünf Faktoren.

2. Lösung

Es seien p und q die beiden Primzahlen; außerdem gelte q = p + 2.

Dann gilt: $p + q = 2 \cdot p + 2 = 2 \cdot (p + 1)$

Nach Voraussetzung ist p > 5 und somit p + 1 gerade und größer als 6.

Es gilt also: $p + 1 = 2 \cdot n \quad \text{mit} \quad n > 3$ (*)

$$p + q = 2 \cdot 2 \cdot n$$

Ist n keine Primzahl, so ist die Behauptung bewiesen, denn dann lässt sich n in ein Produkt mit mindestens zwei Faktoren größer als 1 zerlegen. Es muss nun noch gezeigt werden, dass n keine Primzahl sein kann.

Annahme: n sei eine Primzahl

Beweis durch Widerspruch:

Von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist immer genau eine durch 3 teilbar.

Nach Voraussetzung sind die Zahlen p und p + 2 Primzahlen größer als 5. Deshalb muss p + 1 durch 3 teilbar sein.

Nach (*) gilt: $p + 1 = 2 \cdot n$

Aus der Teilbarkeit von p + 1 durch 3 folgt, dass $2 \cdot n$ durch 3 teilbar ist. Also muss n durch 3 teilbar sein. Wegen (*) ist n aber größer als 3. Deshalb lässt sich n in der Form $n = 3 \cdot m$ mit m > 1 darstellen.

Damit erhalten wir die Darstellung $p + q = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m$ mit m > 1 und damit eine Darstellung der Summe als Produkt mit mindestens vier Faktoren.

Aufgabe 3

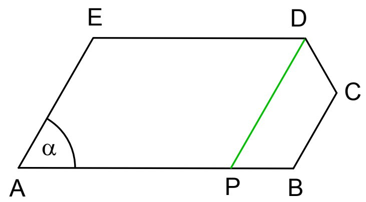
In einem Fünfeck ABCDE ist der Winkel α halb so groß wie jeder der vier anderen Winkel.

Zeige: Addiert man die Längen der α einschließenden Seiten, so erhält man mehr als den halben Umfang des Fünfecks.

Gemeinsamer Lösungsteil

Für die Winkelsumme in unserem Fünfeck gilt: $\alpha + 2\alpha + 2\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 540°$.
Daraus erhalten wir $\alpha = 60°$ und für die anderen vier Winkel jeweils $120°$.

1. Lösung



Wegen der 60° bzw. 120°-Winkel sind die Seiten AE und BC, sowie ED und AB parallel. Die Parallele zu AE durch den Punkt D schneidet AB in P.

Wegen w(BPD) = w(PDC) = 60° und DP || BC ist das Viereck PBCD ein achsensymmetrisches Trapez mit $|BC| < |PD|$ und $|DC| = |PB|$.

Nach Konstruktion ist das Viereck APDE ein Parallelogramm, da die gegenüberliegenden Seiten paarweise parallel sind.

Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang.

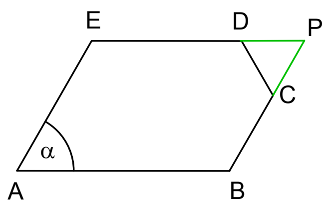
Es gilt also: $|AP| = |ED|$, $|AE| = |PD|$ und $|AP| + |AE| = |PD| + |DE|$.

Mit $|PB| = |DC|$, $|AB| = |AP| + |PB|$ und $|PD| > |BC|$ folgt:

$$|AB| + |AE| = |AP| + |PB| + |PD| = |ED| + |DC| + |PD| > |ED| + |DC| + |CB|.$$

Damit sind die beiden Seiten AB und AE zusammen länger als die Summe der anderen drei Seitenlängen. Damit ist $|AB| + |AE|$ größer als der halbe Umfang.

2. Lösung



Zunächst verlängern wird die Seiten BC und ED bis zum Schnittpunkt P. Das Dreieck CPD ist gleichseitig, denn die Winkel $\measuredangle PCD$ und $\measuredangle CDP$ sind jeweils Nebenwinkel eines 120°-Winkels.

Daraus folgt w(PCD) = w(CDP) = 180° – 120° = 60°. Das Dreieck CPD ist also gleichseitig.

Das Viereck ABPE ist ein Parallelogramm, denn die gegenüberliegenden Winkelpaare sind gleich groß.

Deshalb gilt: $|AB| = |EP|$, $|AE| = |BP|$ und $|AB| + |AE| = |EP| + |BP|$.

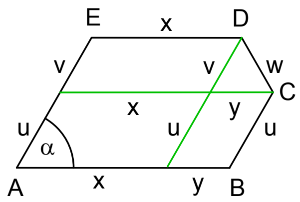
Zusammen mit $|CP| = |DP| = |CD|$ folgt:

$$|AE| + |AB| = |BP| + |EP| = |BC| + |CP| + |ED| + |DP| = |BC| + 2\cdot|CD| + |ED| > |BC| + |CD| + |DE|.$$

Damit ist die Summe der beiden am Winkel $\measuredangle BAE$ anliegenden Seiten größer als die drei anderen Seitenlängen zusammen und damit auch größer als der halbe Umfang.

3. Lösung

Das Fünfeck ABCDE wird durch die Parallele zu AB durch den Punkt C und die Parallele zu AE durch D ergänzt. Wegen dieser Parallelität sind alle Innenwinkel der Teilfiguren 60° oder 120°-Winkel.



Das Fünfeck wird durch die beiden Parallelen in drei Parallelogramme und ein Dreieck zerlegt. Da die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms gleich lang sind, gelten die eingetragenen Seitenlängen.

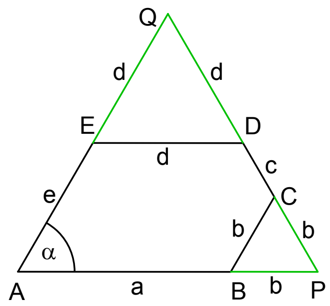
(Es gilt sogar $v = w = y$, was aber für den Beweis nicht benötigt wird.)

Aus diesen Überlegungen und der Dreiecksungleichung $v + y > w$ folgt:

$|AB| + |AE| = x + y + u + v \;\; > u \; + w + x = |BC| + |CD| + |DE|$.

4. Lösung

Verlängern wir die Seiten AB und DC über B bzw. C hinaus bis zum Schnittpunkt P und die Seiten CD und AE über D bzw. E hinaus bis zum Schnittpunkt Q, so entsteht das Dreieck APQ.



Die Winkel $\measuredangle PBC$, $\measuredangle BCP$, $\measuredangle QDE$ und $\measuredangle DEQ$ sind Nebenwinkel der vier Innenwinkel des Fünfecks ABCDE mit der Winkelgröße 120°.

Diese vier Winkel sind deshalb 60°-Winkel. Wegen der Winkelsumme von 180° in den beiden Ergänzungsdreiecken BPC und DQE sind auch die beiden Winkel $\measuredangle CPB$ und $\measuredangle EQD$ jeweils 60°-Winkel.

Daraus folgt nun:

Die Dreiecke BPC, DQE und APQ sind gleichseitige Dreiecke.
Im Dreieck BQC gilt $|BP| = |PC| = |CB| = b$.
Im Dreieck DQE gilt $|DQ| = |QE| = |ED| = d$.

Für die Seitenlängen im Dreieck APQ gilt $|AP| = |PQ| = |QA|$,

also $a + b = b + c + d$ und $e + d = b + c + d$ und damit auch $a = c + d$ und $e = b + c$.

Für die Summe der beiden an anliegenden Seitenlängen erhalten wir:

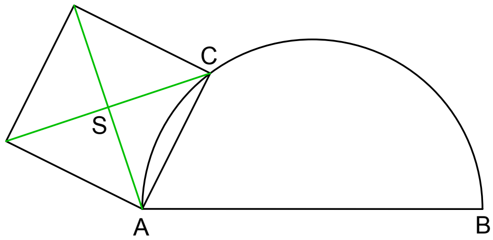
$|AB| + |AE| = a + e = c + d + b + c = b + 2c + d > b + c + d$.

Damit sind die beiden an α anliegenden Seiten zusammen länger als die drei übrigen Seiten.

Aufgabe 4

Der Punkt C liegt auf dem Halbkreis über der Strecke AB. Der Diagonalenschnittpunkt des Quadrats über AC heißt S.

Auf welcher Bahn bewegt sich S, wenn C auf dem Halbkreis wandert?



Vorüberlegungen

Zeichnet man die Figur für verschiedene Lagen des Punktes C, so scheinen die Punkte S auf einem Kreisbogen zu liegen. Nimmt man für die Lage von C die Randlagen C = A und C = B an, so fallt S im ersten Fall mit A zusammen, denn das Quadrat über der Strecke AC schrumpft zu einem Punkt. Im zweiten Fall entsteht ein Quadrat mit der Seitenlänge |AB|. Die Punkte A, B und S bilden ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Der Punkt S liegt in diesem Sonderfall auf dem Thaleskreis über der Strecke AB und gleichzeitig auf der Mittelsenkrechten von AB. Der Schnittpunkt von Mittelsenkrechte und Thaleskreis wird mit P bezeichnet. Der Kreisbogen scheint ein Halbkreis über der Strecke AP zu sein.

Es soll nun folgende ***Behauptung*** bewiesen werden:

Der Punkt S bewegt sich auf einem Halbkreis über der Strecke AP, wobei P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke AB mit dem Thaleskreis über der Strecke AB ist.

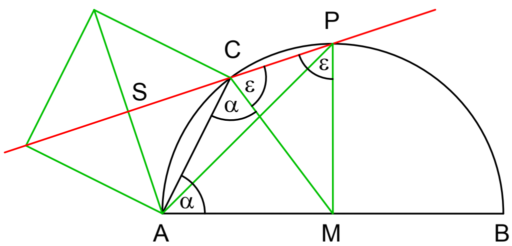
Lösungsidee

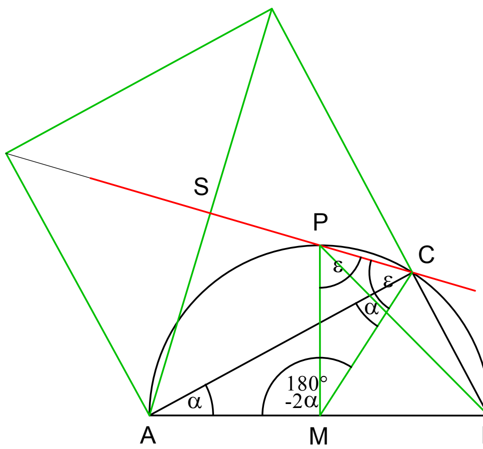
Ein wichtiger Zwischenschritt ist der Nachweis, dass die Punkte S, C und P stets auf einer Geraden liegen.

Wenn diese Eigenschaft nachgewiesen wurde, dann ist das Dreieck APS rechtwinklig, denn es gilt dann w(ASP) = w(ASC) = 90°. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt der Punkt S dann auf dem Halbkreis über der Strecke AP. Diese Strecke verändert ihre Lage nicht, wenn C sich auf dem Halbkreis bewegt.

Die Behauptung, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen, ist sicher dann erfüllt, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig ist, denn dann sind die Punkte C und P identisch. Für die anderen Fälle folgen nun verschiedene Beweisvarianten.

1. Lösung





Fall I: w(SPM) ≤ 90°

Wir betrachten das Fünfeck AMPCS. In diesem Fünfeck gilt für die Winkelsumme:

$$45° + \alpha + 90° + \varepsilon + \varepsilon + \alpha + 45° + 90° = 540° \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot(\alpha+\varepsilon) = 270° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+\varepsilon = 135°.$$

Damit gilt für $\measuredangle SCP$: $w(SCP) = 45° + \alpha + \varepsilon = 180°$.

Die Punkte P, C und S liegen auf einer Geraden.

Fall II: $w(SPM) > 90°$

Das Viereck AMPS hat bei M und S jeweils einen rechten Winkel; daraus folgt:

$w(SPM) = 180° - (45° + \alpha) = 135° - \alpha$, also $\alpha = 135° - w(SPM)$.

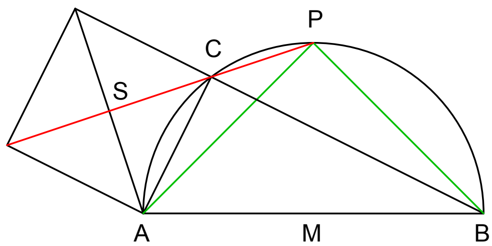
Im Fünfeck AMCPS gilt für die Winkelsumme

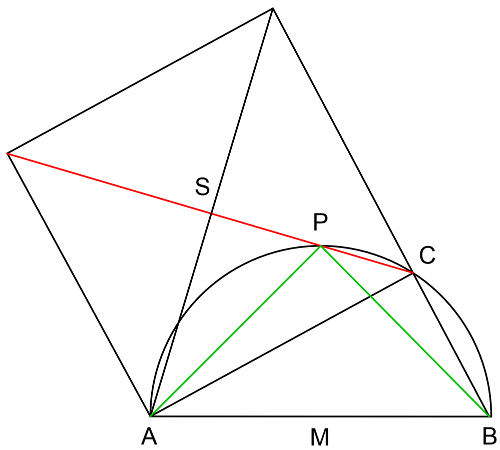
$45° + \alpha + 180^o - 2\alpha + \varepsilon + \varepsilon + w(SPM) + 90^o = 540° \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha + 2\varepsilon + w(SPM) = 225°$.

Ersetzen wir α durch $135° - w(SPM)$, so erhalten wir $2\varepsilon + 2 \cdot w(SMP) = 360°$.

Die Punkte S, P und C bilden also einen gestreckten Winkel und liegen auf einer Geraden.

2. Lösung





Fall I C liegt auf dem Kreisbogen AP.

Für den Winkel $\measuredangle SCP$ gilt: $w(SCP) = w(SCA) + w(ACB) + w(BCP)$

$w(SCA) = 45°$, da die Diagonale und die Seite eines Quadrats einen 45°-Winkel bilden.
$w(ACB) = 90°$, das Dreieck ABC ist nach dem Satz von Thales rechtwinklig.
$w(BCP) = w(BAP)$, Satz vom gleichen Umfangswinkel über der Sehne BP.
$w(BAP) = 45°$, Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck.

Aus diesen Eigenschaften folgt: $w(SCP) = 45° + 90° + 45° = 180°$.

Die Punkte S, C und P liegen auf einer Geraden.

Fall II: C liegt auf dem Kreisbogen PB.

$w(PBA) = 45°$, Basiswinkel im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ABP.
$w(PCA) = w(PBA)$, Umfangswinkel über der Sehne AP.

Der Winkel $\measuredangle PCA$ ist ein 45°-Winkel, deshalb liegt der Punkt P auf der Diagonalen des Quadrats über der Seite AC. Da S der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrates ist, liegen die Punkte C, P und S auf einer Geraden.

3. Lösung

Fall I C liegt auf dem Bogen AP.

Das Dreieck ACS ist nach Voraussetzung gleichschenklig-rechtwinklig: w(SCA) = 45°.

Das Dreieck AMC ist gleichschenklig mit $|MA| = |MC| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$: w(ACM) = w(MAC) = α.

Nach dem Winkelsummensatz gilt im Dreieck AMC: w(CMA) = 180° – 2α.

Da die Strecken AB und MP orthogonal zueinander sind, gilt: w(PMC) = 2α – 90°.

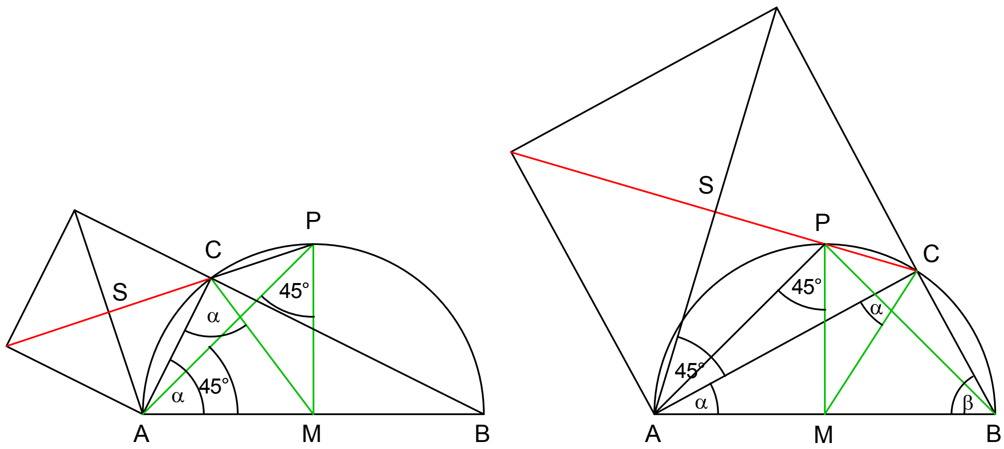
Das Dreieck MPC ist gleichschenklig mit |MP| = |MC| = |AB| , für die Winkel folgt daraus

$$w(MCP) = w(CPM) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(180° - (2\alpha - 90°)\right),$$

$$w(MCP) = 135° - \alpha.$$

Für den Winkel ∡SCP erhalten wir daraus: w(SCP) = 45° + α + 135° – α = 180°.

Die Punkte S, C und P liegen auf einer Geraden.



Fall II: C liegt auf dem Bogen PB.

Das Dreieck ACS ist nach Voraussetzung gleichschenklig-rechtwinklig: w(SCA) = 45°.

Das Dreieck AMC ist gleichschenklig mit $|MA| = |MC| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$: w(ACM) = w(MAC) = α.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck AMC gilt: w(CMA) = 180° – 2α.

Da die Strecken AB und MP orthogonal sind, folgt daraus: w(CMP) = 90° – 2α.

Das Dreieck MCP ist gleichschenklig mit $|MP| = |MC| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$:

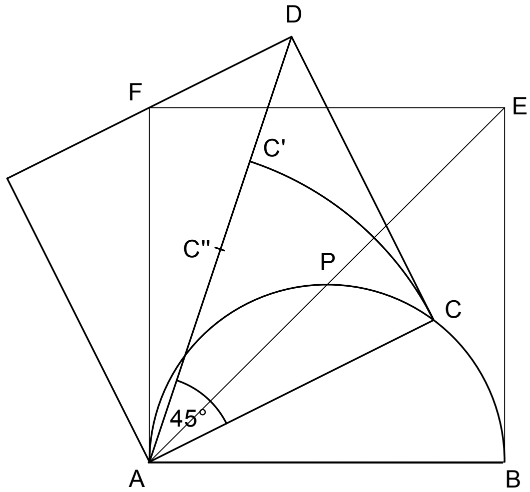
$$w(PCM) = w(MPC) = \tfrac{1}{2}\left(180° - (90° - 2\alpha)\right),$$

$$w(PCM) = \alpha + 45°.$$

Für den Winkel ∡PCA erhalten wir daraus: w(PCA) = w(PCM) – w(ACM) = α + 45° – α = 45°.

Da die Winkel ∡SCA und ∡PCA gleich groß sind und C auf dem Bogen zwischen B und P liegt, liegen die Punkte C, P und S auf einer Geraden.

__4. Lösung__



Idee: Der Punkt C wird durch die Hintereinanderausführung einer Drehung um A zunächst auf einen Punkt C' und einer anschließenden Streckung mit Zentrum A und Streckfaktor $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ auf einen Punkt C" abgebildet.

Jede Drehung und jede zentrische Streckung bilden einen Kreis wieder auf einen Kreis und einen Kreisbogen wieder auf einen Kreisbogen ab. Wenn der Punkt C den Halbkreis über der Strecke AB durchläuft, durchlaufen die Punkte C und C" ebenfalls Halbkreise.

***Behauptung**:* Der Punkt C" fällt mit dem in der Aufgabenstellung genannten Punkt S zusammen.

***Beweis**:*

Durch die Drehung um A mit Drehwinkel 45° liegt C auf der Diagonalen AD des Quadrats über der Seite AC.

Durch die zentrische Streckung mit Zentrum A bleibt der Bildpunkt von C', also C", auf der Geraden (AD) und damit auf der Diagonalen.

Es ist noch zu zeigen, dass C" der Mittelpunkt von AD ist.

Wegen des Streckfaktors $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ gilt $|AC''| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot |AC'| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot |AC|$. Für die Länge der Diagonalen des Quadrats über AC gilt nach dem Satz von Pythagoras $|AD| = |AC| \cdot \sqrt{2}$. Der Punkt C" ist also tatsächlich der Mittelpunkt der Diagonalen AD.

Bei der Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen ist A als Drehzentrum und als Zentrum der zentrischen Streckung ein Fixpunkt. Der Punkt B fällt bei dieser Verkettung auf einen Punkt, der auf der Diagonalen AE des Quadrats über der Seite AB liegt. Wegen des Streckfaktors $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ ist der Bildpunkt B" nach der Ausführung beider Abbildungen der Diagonalenschnittpunkt des Quadrats über der Seite AB und damit der dritte Eckpunkt eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks über der Seite AB. Dieser dritte Punkt P ist also der Mittelpunkt des Halbkreisbogens über AB.

Zusammenfassung:

Die Punkte S liegen auf einem Halbkreis über der Strecke AP.

Aufgabe 5

Die Zahl 1996 liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen, nämlich 1936 und 2025. Sie unterscheidet sich von der einen um 60 und von der anderen um 29. Der Term $1996 - 60 \cdot 29$ ergibt eine Quadratzahl.

Für welche anderen natürlichen Zahlen ergibt der entsprechend gebildete Term ebenfalls eine Quadratzahl?

Lösung

Behauptung:

Diese Eigenschaft gilt für jede natürliche Zahl n, die selbst keine Quadratzahl ist.

Beweis:

Die natürliche Zahl n liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen k^2 und $(k + 1)$,

wenn $k^2 < n < (k + 1)^2$ gilt.

Es ist nun nachzuweisen, dass der nach der angegebenen Regel gebildete Term

$$n - \left[\left(n - k^2\right) \cdot \left((k+1)^2 - n\right)\right]$$

für diese Zahlen n eine Quadratzahl darstellt.

1. Lösung

Durch algebraische Umformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} n - \left[\left(n - k^2\right) \cdot \left((k+1)^2 - n\right)\right] &= n - \left[\left(n - k^2\right) \cdot \left(k^2 + 2k + 1 - n\right)\right] \\ &= n - \left[k^2 n + 2kn + n - n^2 - k^4 - 2k^3 - k^2 + k^2 n\right] \\ &= -2k^2 n - 2kn + n^2 + k^4 + 2k^3 + k^2 \\ &= k^2 \cdot \left(k^2 + 2k + 1\right) - 2kn(k+1) + n^2 \\ &= \left[k \cdot (k+1) - n\right]^2 . \end{aligned}$$

Der Term stellt also für alle natürlichen Zahl n eine Quadratzahl dar. (Ist $n = k \cdot (k+1)$, so stellt der Term die Zahl 0 dar. Wegen $0^2 = 0$, ist auch dies eine Quadratzahl.)

2. Lösung

Ersetzen wir $n - k^2$ durch m, d.h. $n = k^2 + m$, und bilden nun die Differenz $(k + 1)^2 - n$, so erhalten wir $k^2 + 2k + 1 - n$. Mit $n - k^2 = m$ können wir diese Differenz auch in der Form $2k + 1 - m$ darstellen.

Es bleibt nun zu zeigen, dass $n - m \cdot (2k + 1 - m)$, also $k^2 + m - m \cdot (2k + 1 - m)$ eine Quadratzahl darstellt.

$$\begin{aligned} k^2 + m - m \cdot (2k + 1 - m) &= k^2 + m - 2km - m + m^2 \\ &= k^2 - 2km + m^2 \\ &= (k - m)^2 . \end{aligned}$$

Der Term $(k - m)^2$ stellt für alle natürlichen Zahlen k und $m = n - k^2$ eine Quadratzahl dar.

Aufgabe 6

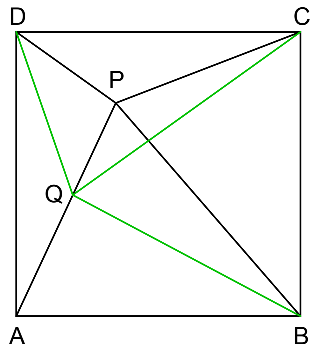
Die Städte A, B, C und D sind Ecken eines Quadrats mit 100 km Seitenlänge. An einem Turnier nehmen drei Mannschaften aus A und je eine aus B, C und D teil.

An welchem Punkt auf dem Rand oder innerhalb des Quadrats muss das Turnier stattfinden, wenn die Fahrtkosten je Mannschaft und Kilometer 2 DM betragen und die gesamten Fahrtkosten möglichst klein sein sollen?

Vorüberlegungen

Die Höhe der Fahrtkosten pro Mannschaft und Kilometer sind für die Bestimmung des Turnierortes T nicht von Bedeutung. Entscheidend ist die Summe der gefahrenen Kilometer. Dabei ist die Entfernung des Punktes A vom Turnierort T dreifach zu zählen, da aus A drei Mannschaften teilnehmen. Bei den Lösungen wird deshalb jeweils der Punkt bestimmt, für den die Summe der Streckenlängen minimal wird.

1. Lösung



Für ein beliebigen Punkt P im Innern oder auf dem Rand des Quadrates beträgt die Gesamtfahrstrecke $3 \cdot |PA| + |PB| + |PC| + |PD|$.

Für jeden auf der Strecke AP liegenden Punkt Q erhalten wir eine geringere Gesamtlänge, denn nach der Dreiecksungleichung gilt:

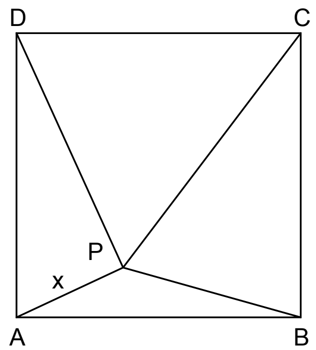
$|QD| \leq |QP| + |PD|$, $|QC| \leq |QP + |PC|$ und $|QB| \leq |QP| + |PB|$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn P auf einer Verbindungsstrecke von Q mit der Ecke des Quadrates liegt. Sind P und Q verschiedene Punkte, so gilt mindestens eines der Ungleichheitszeichen.

Für die Gesamtstreckenlänge erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned} 3 \cdot |AP| + |PB| + |PC| + |PD| &= 3 \cdot (|AQ| + |QP|) + |PB| + |PC| + |PD| \\ &= 3 \cdot |AQ| + |QP| + |PB| + |QP| + |PC| + |QP| + |PD| \\ &> 3 \cdot |AQ| + |QB| + |QC| + |QD|. \end{aligned}$$

Für Q = A erhalten wir den Punkt, für den die Gesamtstreckenlänge minimal ist und die Fahrtkosten am kleinsten sind.

2. Lösung



Wenn das Turnier in der Stadt A stattfindet, so beträgt die Gesamtfahrstrecke $|AB| + |AC| + |AD| = 100 + 100 \cdot \sqrt{2} + 100$, da bei einem Quadrat mit der Seitenlänge a die Länge der Diagonalen $a \cdot \sqrt{2}$ ist.

Es wird nun gezeigt, dass alle anderen Punkte auf dem Rand oder im Innern des Quadrats eine größere Gesamtlänge ergeben.

Ist x die Entfernung des Punktes P von A, so folgt wegen der Dreiecksungleichung

$x + |PB| \geq |AB| = 100$, $x + |PC|\ |AC| = 100 \cdot \sqrt{2}$ und $x + |PD| \geq |AD| = 100$.

Als Abschätzung für die Gesamtstreckenlänge erhalten wir

$3 \cdot |PA| + |PB| + |PC| + |PD| \geq 3x + 100 - x + 100 \cdot \sqrt{2} - x + 100 - x = 200 + 100 \cdot \sqrt{2}$.

Die Gleichheitszeichen in einer der Ungleichungen gilt nur dann, wenn P auf der betreffenden Quadratseite bzw. auf der Diagonalen liegt. Das Gleichheitszeichen gilt nur dann in allen drei Ungleichungen, wenn der Punkt P mit dem Punkt A zusammenfällt.

Für $P \neq A$ gilt mindestens in einer der drei Abschätzungen des Ungleichzeichen und damit

$3 \cdot |AP| + |PB| + |PC| + |PD| > 200 + 100 \cdot \sqrt{2}$.

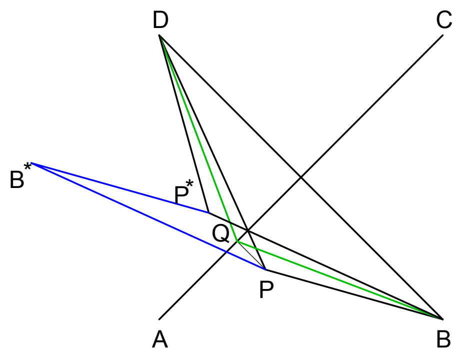
3. Lösung

Wir wählen den Punkt P beliebig auf dem Rand oder im Innern des Quadrats. Die Parallele zur Diagonalen BD durch P schneidet die Diagonale AC im Punkt Q. Die gezeichnete Parallele ist orthogonal zur Diagonalen AC, da die beiden Diagonalen AC und BD zueinander orthogonal sind. Da im Quadrat die Diagonale AC die Mittelsenkrechte der Diagonalen BD ist, gilt für den Punkt Q die Eigenschaft $|BQ| = |DQ|$. Wenn P auf der Diagonalen AC liegt, so fallen die Punkte P und Q zusammen.

Zunächst wird gezeigt, dass die Gesamtlänge der Verbindungsstrecken für den Punkt Q ($Q \neq P$) kleiner ist als die Gesamtlänge der Verbindungsstrecken von P zu den vier Eckpunkten. Der Turnierort muss also auf der Diagonalen AC liegen. Der Nachweis erfolgt in zwei Schritten.

1. Ist $P \neq Q$, dann ist $|AP| > |AQ|$ und $|CP| > |CQ|$, denn in den rechtwinkligen Dreiecken APQ und PCQ sind AP und BP die längsten Seiten. Ist $P = Q$, dann gilt $|AP| = |AQ|$ und $|CP| = |CQ|$.

2. Es wird nun gezeigt, dass $|BQ| + |DQ| \leq |BP| + |DP|$ ist. Liegt P (und damit auch Q) auf der Diagonalen BD, so gilt die Gleichheit, da dann alle vier Punkte auf einer Geraden liegen.



Nachweis von $|BQ| + |QD| \leq |BP| + |PD|$, falls $P \notin BD$:

Zunächst wird der Punkt P an der Diagonalen AC gespiegelt. Der Bildpunkt sei P*.

Wegen der Symmetrie gilt:

$|BP| = |DP^*|$ und $|DP| = |BP^*|$.

Die Parallele zu BP durch P* und die Parallele zu BP* durch P schneiden sich in einem Punkt, der als B* bezeichnet wird. Die Punkte BP*B*P bilden ein Parallelogramm, in dem nach Konstruktion der Punkt Q der Mittelpunkt der Diagonalen PP* ist. Der Punkt Q liegt also auch auf der Diagonalen BB*. Nun ist aber die Summe der beiden verschiedenen Seitenlängen eines Parallelogramms nach der Dreiecksungleichung größer als die Länge der Diagonalen.

Es gilt also: $|BQ| + |QD| = |BQ| + |BQ| = |BQ| + |B^*Q| = |BB^*| < |BP| + |PB^*| = |BP| + |PD|$.

Für einen Punkt Q ($Q \neq A$) auf der Diagonalen AC gilt nach der Dreiecksungleichung:

$|AB| < |AQ| + |QB|$, $|AD| < |AQ| + |QD|$ und $|AC| = |AQ| + |QC|$.

Durch Addition der drei Beziehungen erhalten wir $|AB| + |AC| + |AD| < 3\cdot|AQ| + |BQ| + |CQ| + |DQ|$.
Das Turnier muss also in A stattfinden.