# 1995

***Runde 2***

### *Aufgabe 1*

Eine natürliche Zahl heißt viererzyklisch, wenn bei der Multiplikation mit 4 die Ziffern um eine Stelle nach rechts verschoben werden und die Einerziffer an die führende Stelle rückt.

Beispiel: 179487 ist viererzyklisch, da 179487 · 4 = 717948 gilt.

Zeige: Wenn eine Zahl viererzyklisch ist, dann ist ihre Stellenzahl ein Vielfaches von 6.

### *1. Lösung*

Es sei z eine viererzyklische Zahl. Wegen der vorgeschriebenen Verschiebung der Ziffern bei der Multiplikation von z mit 4 um eine Stelle nach rechts, sind durch die Einerziffer von z alle weiteren Ziffern festgelegt. Die Zehnerziffer ergibt sich durch die Multiplikation der Einerziffer mit 4, die Hunderterziffer durch Multiplikation der Zehnerziffer mit 4 plus eines eventuell von der Multiplikation der Einerziffer mit 4 vorhandenen Übertrages, usw. , ...

Als Einerziffer von z kommen nur die Ziffern von 1 bis 9 in Frage. Die Einerziffer Null scheidet aus, da sonst nach der Definition von *viererzyklisch* das Produkt z · 4 eine Stelle weniger hätte als z, was nicht möglich ist. In der folgenden Tabelle sind die Überträge jeweils klein vor die entsprechende Position geschrieben.

*Stellenwerte*

| $10^6$ | $10^5$ | $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ${}_{1}\,0$ | ${}_{2}\,2$ | ${}_{2}\,5$ | ${}_{1}\,6$ | 4 | 1 |
| 2 | ${}_{2}\,0$ | 5 | ${}_{1}\,1$ | ${}_{3}\,2$ | 8 | 2 |
| 3 | ${}_{3}\,0$ | ${}_{2}\,7$ | ${}_{3}\,6$ | 9 | ${}_{1}\,2$ | 3 |
| 4 | 1 | ${}_{1}\,0$ | ${}_{2}\,2$ | ${}_{2}\,5$ | ${}_{1}\,6$ | 4 |
| 5 | ${}_{1}\,1$ | ${}_{3}\,2$ | 8 | 2 | ${}_{2}\,0$ | 5 |
| 6 | ${}_{2}\,1$ | ${}_{1}\,5$ | ${}_{3}\,3$ | ${}_{1}\,8$ | ${}_{2}\,4$ | 6 |
| 7 | ${}_{3}\,1$ | ${}_{3}\,7$ | ${}_{1}\,9$ | ${}_{3}\,4$ | ${}_{2}\,8$ | 7 |
| 8 | 2 | ${}_{2}\,0$ | 5 | ${}_{1}\,1$ | ${}_{3}\,2$ | 8 |
| 9 | ${}_{1}\,2$ | 3 | ${}_{3}\,0$ | ${}_{2}\,7$ | ${}_{3}\,6$ | 9 |

Beim Stellenwert $10^6$ tritt jeweils zum ersten Mal wieder die Einerziffer ohne Übertrag auf. Die ersten drei konstruierten Zahlen sind keine viererzyklischen Zahlen, da die Null als führende Ziffer nicht möglich ist. Somit sind die kleinsten viererzyklischen Zahlen die folgenden sechsstelligen Zahlen:

102564 128205 153846 179487 205128 230769

Das Vierfache der jeweiligen Zahl z ergibt sich dadurch, dass jede Ziffer in der vorgegebenen Art um eine Stelle verschoben wird und die Einerziffer an die führende Stelle rückt. Da der Vorgang in allen möglichen Fällen periodisch mit der Länge 6 ist, haben viererzyklische Zahlen eine durch 6 teilbare Stellenanzahl.

***2. Lösung***

Es sei $z = \overline{abc....uv}$ eine natürliche Zahl mit n Stellen und den Ziffern a, b, c, ..., u, v . Außerdem sei z viererzyklisch, d.h. $4 \cdot z = \overline{vabc....u}$ mit b, c, ..., u, $\in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, a, v $\in \{1, 2, ..., 9\}$ . Mit diesen Benennungen gilt $40 \cdot z - z = \overline{vabc....u0} - \overline{abc...uv} = 10^n \cdot v - v$ . Durch Zusammenfassen erhalten wir daraus $39 \cdot z = v \cdot \left(10^n - 1\right)$ bzw. $3 \cdot 13 \cdot z = v \cdot \left(10^n - 1\right)$. Da 13 kein Teiler von v sein kann, muss 13 ein Teiler von $10^n - 1$ sein.

Mit dem Taschenrechner kann nun leicht nachgeprüft werden, dass $10^n - 1$ erstmals für n = 6 durch 13 teilbar ist.

Es wird nun gezeigt, dass $10^n - 1$ genau dann durch 13 teilbar ist, wenn n ein Vielfaches von 6 ist.

*1. Teil: n ist ein Vielfaches von 6, d.h. n = 6 · q.*

Der Term $10^{6 \cdot q} - 1$ lässt sich auf folgende Weise als Produkt darstellen:

$$10^{6 \cdot q} - 1 = \left(10^6 - 1\right) \cdot \left(10^{6 \cdot (q-1)} + 10^{6 \cdot (q-2)} + 10^{6 \cdot (q-3)} + ... + 10^6 + 1\right).$$

Aus dieser Darstellung folgt, dass die Zahl 13 für alle natürlichen Zahlen q ein Teiler von $10^{6 \cdot q} - 1$ ist.

*2. Teil: Es sei 13 ein Teiler von* $10^n - 1$.

Mit n = 6 · q + r mit 0 ≤ r < 6 folgt:
$$10^n - 1 = 10^{6 \cdot q + r} - 1 = \left(10^{6 \cdot q} - 1\right) \cdot 10^r + \left(10^r - 1\right).$$

Nach 1) ist $10^{6 \cdot q - 1} - 1$ für alle natürlichen Zahl q durch 13 teilbar. Nach Voraussetzung ist auch $10^n - 1$ durch 13 teilbar. Daraus folgt, dass auch $10^r - 1$ durch 13 teilbar ist. Wegen 0 ≤ r < 6 ist dies jedoch nur für r = 0 der Fall.

Interpretation: Wenn eine Zahl z viererzyklisch ist, dann ist ihre Stellenzahl ein Vielfaches von 6.

***Aufgabe 2***

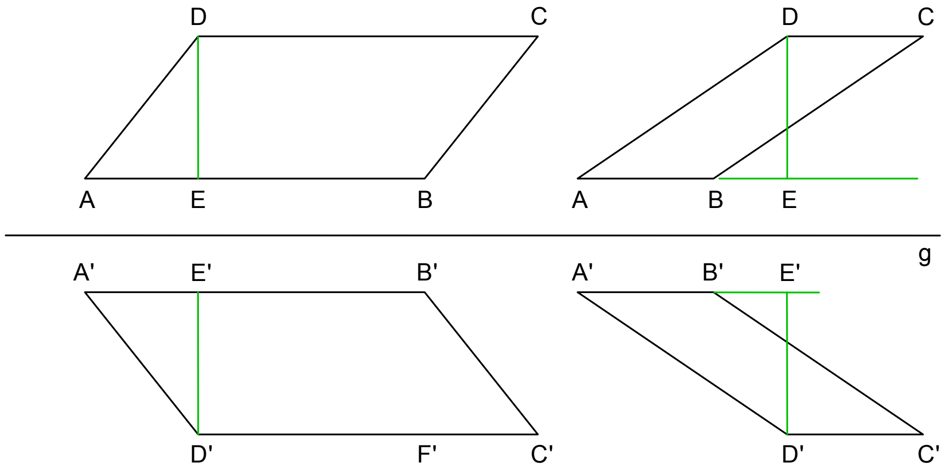
Ein Parallelogramm wird an einer Parallelen zu einer seiner Seiten gespiegelt.

Zeige: Das Spiegelbild kann auch dadurch hergestellt werden, dass das Parallelogramm zerschnitten wird und die Teile geeignet parallel verschoben werden.

***Vorbemerkung***

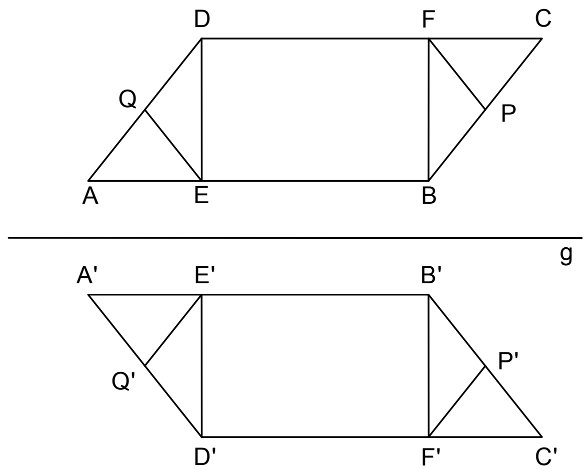
Wenn das Parallelogramm ein Rechteck ist, so kann das ursprüngliche Rechteck auch ohne Zerschneiden auf sein Spiegelbild verschoben werden, unabhängig davon, ob die Spiegelungsachse parallel zu kürzeren oder zur längeren Seite des Rechteckes ist. Dieser Sonderfall wird deshalb bei den folgenden Lösungen nicht ausdrücklich behandelt.

Die folgenden Nachweise werden jeweils dafür erbracht, dass die Spiegelungsachse parallel zur Seite AB ist. Der andere Fall kann durch Umbenennung der Eckpunkte auf diesen zurückgeführt werden.
Für die Zerlegung ist entscheidend, ob der Lotfußpunkt E des Eckpunktes D auf der Strecke AB liegt oder nicht.




Für die Art der Zerlegung ist die absolute Lage der Spiegelungsachse g ohne Bedeutung, solange die Spiegelungsachse zur gleichen Parallelogrammseite parallel ist. Ist g' zu g parallel und eine geeignete Zerlegung des Parallelogramms für die Spiegelungsachse g gefunden, so können diese Einzelteile durch eine weitere Parallelverschiebung auf das Bild bzgl. g' verschoben werden.

***1. Fall*** $E \in AB$




Die Punkte P und Q (und damit auch ihre Bildpunkte P' und Q') sind die Mittelpunkte der Seiten BC und AD.

Die Punkte E und F sind die Lotfußpunkte der Eckpunkte D und B auf die gegenüberliegende Seite. Nach Konstruktion sind die Dreiecke AED und BCF rechtwinklig. Die Punkte Q und P sind die Mittelpunkte der Thaleskreise über den Seiten AD und BC.

Deshalb gilt:

$$|QA| = |QE| = |QD| = |PB| = |PC| = |PF| .$$

Die Dreiecke AEQ und CFP sind gleichschenklig mit den Basen AE bzw. CF. Da außerdem in jedem Parallelogramm w(BAD) = w(DCB) gilt, sind die Dreiecke AEQ und CFP zueinander kongruent. Nimmt man die Bilddreiecke hinzu, so sind die vier Dreiecke AEQ, CFP, F'C'P' und A'Q'E' kongruent.

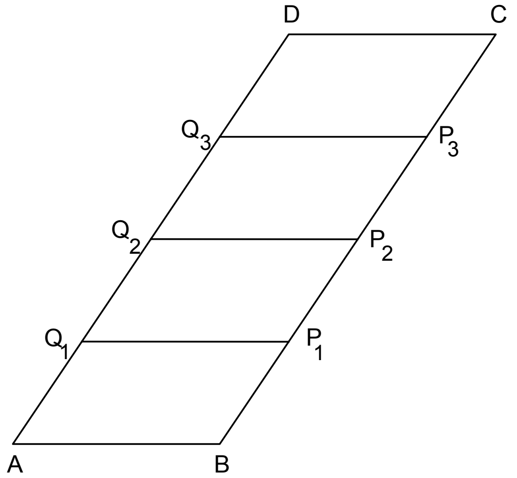
Auf Grund der Spiegelung an g gilt (AB) || (CD) || g || (A ' B ') || (C ' D ').

Das Dreieck AEQ kann parallel auf das Dreieck F'C'P' verschoben werden. Entsprechend kann das Dreieck FPC auf A'Q'E' verschoben werden. Das Sechseck EBPFDQ ist auf Grund der Konstruktion achsensymmetrisch zur Mittelparallelen PQ und außerdem kongruent zum Sechseck D'F'P'B'E'Q'. Das Sechseck EBPFDQ kann deshalb parallel auf das Sechseck D'F'P'B'E'Q' verschoben werden.

***2. Fall*** $E \notin AB$

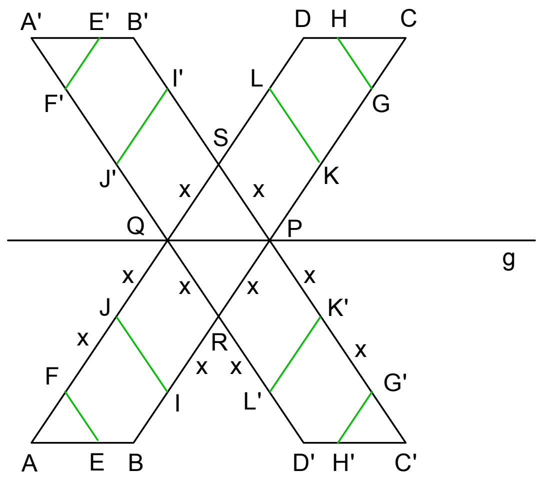
*1. Variante*

Die Seiten BC und AD werden durch die Punkte $P_i$ und $Q_i$ so in gleich lange Abschnitte zerlegt, dass die Lotfußpunkte von $Q_i$ (bzw. $P_i$) jeweils im Innern der Strecken AB, $Q_1P_1$, $Q_2P_2$ usw. liegen. Eine solche Teilung der Strecken AD und BC ist immer möglich. Es entstehen kleinere Parallelogramme. Auf jedes von ihnen kann das Verfahren des ersten Falles angewandt werden.



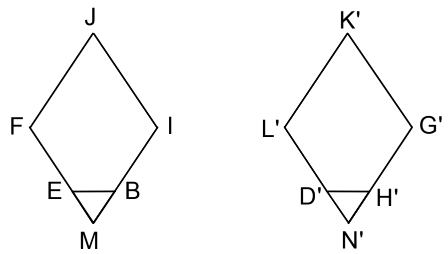

*2. Variante*

Das Parallelogramm ABCD wird an der Mittelparallelen (PQ) gespiegelt. Die Schnittfläche der beiden Parallelogramme ist ein Viereck. Da die einander gegenüberliegenden Seiten als Teile der Parallelogrammseiten von ABCD bzw. A'B'C'D' zueinander parallel sind, ist die Schnittfläche PSQR ein Parallelogramm. Da außerdem die benachbarten Seiten QR und QS bzw. PR und PS wegen der Achsensymmetrie gleich lang sind, ist das Parallelogramm sogar eine Raute. Die Teile der Gesamtfläche, die außerhalb der Raute PSQR liegen, werden nun von dieser mittleren Raute aus so weit wie möglich in kongruente Rauten zerlegt. Jede dieser Raute des Urbildes kann auf eine Raute des Bildes verschoben werden.




Es bleiben vier Restflächen übrig, die jeweils aus einem Dreieck und eventuell einem Fünfeck zusammengesetzt sind. Die Kongruenz der Teildreiecke AEF und H'C'G' folgt aus den übereinstimmenden Längen der Teilstrecken AQ, QA', C'P und PC sowie den Seitenlängen x der eingezeichneten Rauten. Außerdem sind die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke AEF und H'C'G' wegen der Parallelität der Seiten gleich groß. Da nach Konstruktion die Punkte A, E, H' und C' auf einer Geraden liegen, kann das Dreieck AEF durch eine Parallelverschiebung längs dieser Geraden auf das kongruente Dreieck H'C'G' abgebildet werden.

Zum Nachweis der Kongruenz der beiden Fünfecke EBIJF und D'H'G'K'L' betrachten wir eine Detailzeichnung dieser Fünfecke, in der die Seiten FE und IB sowie L'D' und G'H' bis zu den Schnittpunkten M und N' verlängert wurden.




Durch das Verlängern der Seiten entsteht jeweils eine Raute mit der Seitenlänge x. Die Strecken EB und D'H' sind gleich lang, da von den gleich langen Seiten AB und D'C' die gleich langen Teilstrecken AE bzw. H'C' entfernt wurden. Da die Punkte A, B, D' und H' auf einer Geraden liegen und nach Konstruktion die Seiten FE und L'D' bzw. IB und G'H' parallel sind, sind die Dreiecke EMB und D'N'H' nach wsw kongruent. Durch eine Parallelverschiebung

in Richtung der Geraden (EH') wird die Raute MIJF auf die Raute N'G'K'L' und das Dreieck EMB auf das Dreieck N'H'D' abgebildet. Die Fünfecke FEBIJ und L'D'H'G'K' gehen dabei ebenfalls ineinander über. Die entsprechenden Argumentationen gelten für die oberhalb g liegenden Teilfiguren.

Damit ist gezeigt, dass jede Teilfläche des Parallelogramms ABCD durch geeignete Verschiebungen auf eine Teilfläche des Parallelogramms A'B'C'D' abgebildet wird.

***Aufgabe 3***

Gegeben sind ein Quadrat ABCD und ein Kreis K durch C und D mit dem Durchmesser CD. Auf K wandert ein Punkt X und auf der Strecke AB ein Punkt Y. Der Mittelpunkt der Strecke XY heißt M.

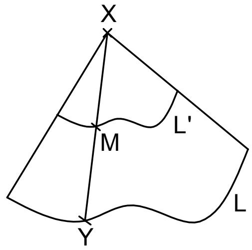
Beschreibe die Menge aller möglichen Mittelpunkte M.

Begründe, weshalb jeder Mittelpunkt M in der beschriebenen Menge liegt. Entscheide und begründe, ob jeder Punkt der beschriebenen Menge bei geeigneter Wahl von X und Y auch als Mittelpunkt M vorkommt.

***Lösung***

*Vorbemerkung*

Gegeben sind zwei Punkte X und Y sowie eine Linie L mit Y $\in$ L. Halten wir X fest und lassen Y die Linie L durchlaufen, so liegt der Mittelpunkt M der Strecke XY auf einer Linie L', die durch eine zentrische Streckung mit Zentrum X und Streckfaktor $\frac{1}{2}$ aus L entsteht.

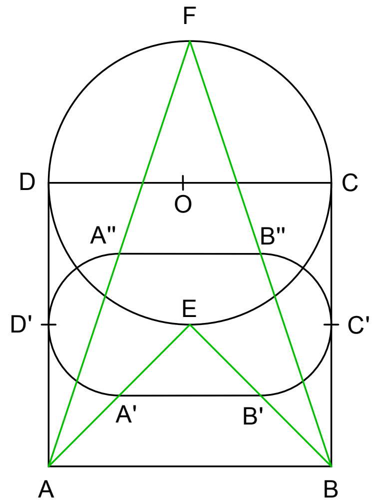



*Behauptung:*

Die gesuchte Punktmenge G besteht aus dem Rand und dem Innern der Figur, die von der Linie A'B'C'B"A"D' begrenzt wird. A'B' und B"A" sind Seiten eines Quadrates, die Linien B'CB" und A"D'A' sind Halbkreise über den Strecken B'B" und A'A".

*Benennungen*

Der Punkt E ist der Mittelpunkt des Quadrats und zugleich ein Punkt auf dem Kreis k. Der Punkt F ist der zweite Endpunkt des Kreisdurchmessers mit E als Eckpunkt. Die Seitenlänge des Quadrates sei a.




*Erzeugung der Randpunkt der gesuchten Punktmenge*

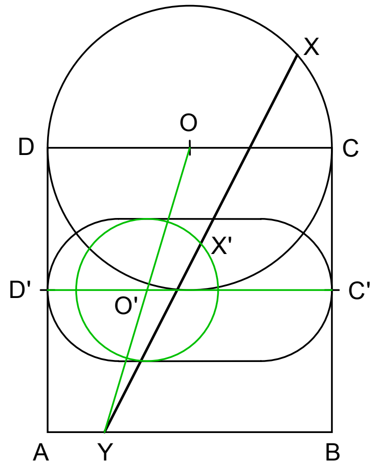
Wird X als E gewählt und bewegt sich der Punkt Y bei festgehaltenem X auf der Strecke AB, so durchläuft der Mittelpunkt der Strecke XY die Parallele A'B' zu AB. Auf Grund der zentrischen Streckung mit Zentrum X = E und Streckfaktor $\frac{1}{2}$ ist A'B' halb so lang wie AB. A'B' und AB sind parallel zueinander. Entsprechend entsteht die Randlinie A"B", wenn wir X als den Punkt F wählen. Auch A"B" ist parallel zu AB und halb so lang. Da auf Grund der Konstruktion die Punkte E und F auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegen, bilden die Eckpunkte A'B'B"A" ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}$a. Damit entspricht die Seitenlänge des kleinen Quadrates dem Radius des Kreises K.

Wählen wir Y als B und lassen den Punkt X den Halbkreis ECF durchlaufen, so entsteht als Ortslinie der Mittelpunkte von XY ein Halbkreis über den Bildpunkten von E und F bei der zentrischen Streckung mit Zentrum B, also ein Halbkreis über der Strecke B'B".

Wählen wir Y als B und lassen den Punkt X den Halbkreis FDE durchlaufen, so erhalten wir den Halbkreis A"D'A' als Bild der zentrischen Streckung.

*Lage der Mittelpunkte von XY bei beliebiger Lage von X auf K und Y auf AB.*

Sind X auf K und Y auf AB beliebig gewählt, so wird Y mit dem Kreismittelpunkt O von K verbunden. Bei der zentrischen Streckung mit Zentrum Y und Streckfaktor $\frac{1}{2}$ wird O auf einen Punkt O' abgebildet. Dieser Punkt liegt auf der Mittelparallelen C'D' von AB und CD. Der Kreis K wird auf einen Kreis k' um O' abgebildet. Kein Punkt des Kreises k' liegt außerhalb der oben beschriebenen Randlinie. Damit liegt auch der Bildpunkt von X auf dem Rand oder im Innern des beschriebenen Gebietes.




*Nachweis, dass jeder innere Punkt von G als Bildpunkt vorkommt.*

Ist P ein beliebiger Punkt im Innern des Gebietes G, so wird die Gerade (AB) an P gespiegelt. Die Bildgerade g' ist parallel zu (AB). Da jeder Punkt im Innern von G einen Abstand von der Geraden (AB) besitzt, der größer als $\frac{1}{4}a$ aber kleiner ist als $\frac{3}{4}a$, so ist der Abstand der beiden parallelen Geraden (AB) und g' größer als $\frac{1}{2}a$ aber kleiner als 1,5a. Die Gerade g' schneidet deshalb den Kreis K in zwei Punkten S und S'. Von den beiden Schnittpunkten wird derjenige als Punkt X gewählt, der auf der gleichen Seite der Mittelsenkrechten von AB liegt wie der Punkt P. Liegt P auf der Mittelsenkrechten von AB, so kann ist die Auswahl beliebig. Verbinden wir X mit P und verlängern bis zum Schnittpunkt mit der Geraden (AB), so liegt dieser Schnittpunkt Y im Innern der Strecke AB.

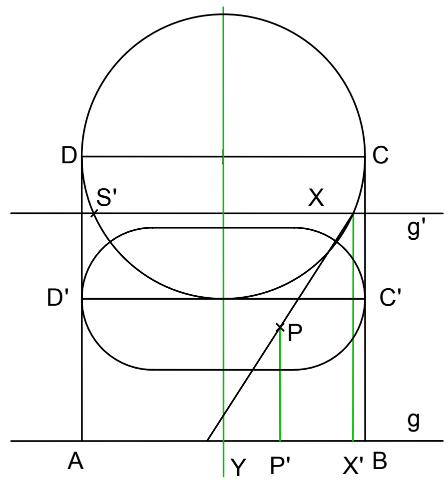
*Begründung:*

Sind P' und X' die Lotfußpunkte von P und X auf die Gerade AB, so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass P' und X' zwischen Y und B liegen.

Die Strecken YP' und P'X' haben nach dem ersten Strahlensatz die gleiche Länge, da P auf Grund der Konstruktion von X und Y der Mittelpunkt von XY ist und die Strecken PP' und XX' nach Konstruktion parallel zueinander sind.

Die Länge der Strecke P'X' ist höchstens so groß wie $\frac{1}{2}$ a.

Da die Strecke AP' aber mindestens so lang ist wie $\frac{1}{2}$ a, liegt Y auf der Strecke AP'.



***Aufgabe 4***

Für jede natürliche Zahl n wird die Summe $s_n$ auf folgende Weise gebildet:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \ldots + \frac{2n-1}{2n}.$$

Gibt es ein n so, dass $s_n$ eine natürliche Zahl ist?

***Lösung***

Es gibt keine natürliche Zahl n, für die $s_n$ eine natürliche Zahl wird.

***1. Begründung***

Für n = 1 ist die Aussage sicherlich richtig.

Für $n \geq 2$ wird $s_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \ldots + \frac{2n-1}{2n}$ als Bruch $\frac{Z}{N}$ dargestellt, wobei N das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner ist.

Es sei $2^m$ $(m \geq 2)$ die höchste Zweierpotenz kleiner oder gleich 2n. Der Hauptnenner enthält in seiner Primfaktorzerlegung ebenfalls die Zweierpotenz $2^m$.

Der Summand $\frac{2^m - 1}{2^m}$ muss mit einer ungeraden Zahl erweitert werden, um den Hauptnenner N zu erhalten. Der Zähler des erweiterten Bruches ist als Produkt von zwei ungeraden Faktoren selbst ungerade.

Alle anderen Nenner sind nicht durch $2^m$ teilbar, da sonst für einen solchen Nenner

$$2n^* = a \cdot 2^m \geq 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$$

gelten würde. Zwischen dem Bruch mit dem Nenner $2^m$ und dem mit dem Nenner 2n* gäbe es also einen mit dem Nenner $2^{m+1}$ und $2^m$ wäre also nicht die höchste Zweierpotenz, die in der Primfaktorzerlegung eines Nenners auftritt.

Alle Brüche mit Ausnahme von $\frac{2^m - 1}{2^m}$ müssen mit einer geraden Zahl erweitert werden. Nach dem Erweitern auf den gemeinsamen Nenner N sind alle Zähler bis auf einen gerade. Die Summe Z ist eine ungerade Zahl, der Nenner ist eine gerade Zahl, da er durch $2^m$ teilbar ist. Die Primfaktorpotenz $2^m$ des Nenners kann demnach nicht gekürzt werden. Es entsteht keine ganze Zahl.

***2. Begründung***

Der Nenner mit den meisten Primfaktoren 2 sei $2^m \cdot u$ (u ungerade). Der Faktor u muss 1 sein, da sonst wegen $2^{m+1} < 2^m \cdot u$ der Bruch $\frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}}$ ebenfalls als Summand vorkommen würde und damit $2^m$ nicht die höchste Zweierpotenz eines Nenners wäre. Es gibt also nur einen Bruch, dessen Nenner die Primzahlpotenz $2^m$ enthält. Dieser Bruch b hat die Form $\frac{2^m - 1}{2^m}$.

Der Hauptnenner aller Brüche in der vorgegebenen Summe kann in der Form $2^m \cdot u$ dargestellt werden, wobei U das kleinste gemeinsame Vielfache aller ungeraden Primfaktoren aller Nenner ist. Beim Erweitern der Brüche auf den Hauptnenner $2^m \cdot u$ werden alle Zähler gerade, deren Nenner nicht den Primfaktor $2^m$ enthalten. Damit werden alle Zähler bis auf den Bruch b gerade. Der Bruch b hat nach dem Erweitern die Form $\frac{\left(2^m - 1\right) \cdot u}{2^m \cdot u}$. Der Zähler des erweiterten Bruches b ist ungerade. Die Summe aller Zähler der erweiterten Brüche ist damit ungerade, während der Nenner gerade ist. Ein solcher Bruch lässt sich nicht vollständig kürzen.