1995

Runde 1

Aufgabe 1

Die beiden Zahlen 1995^{1994} und 1995^{1996} haben die gleichen Endziffern.

An welcher Stelle von rechts unterscheiden sie sich zum ersten Mal?

1. Lösung

Die Anzahl der übereinstimmenden Endziffern von 1995^{1994} und 1995^{1996} lässt sich durch die Berechnung der Differenz bestimmen. Die Anzahl der Endnullen der Differenz stimmt mit der Anzahl der übereinstimmenden Endziffern der beiden Potenzen überein.

Wir bilden die Differenz der beiden Potenzen und klammern die größte gemeinsame Potenz aus.

$$1995^{1996} - 1995^{1994} = 1995^{1994} \cdot (1995^2 - 1) = 3980024 \cdot 1995^{1994}$$

Aus den Primfaktorzerlegungen $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ und $3980024 = 2^3 \cdot 499 \cdot 997$ erhalten wir

$$3980024 \cdot 1995^{1994} = 2^3 \cdot 3^{1994} \cdot 5^{1994} \cdot 7^{1994} \cdot 19^{1994} \cdot 499 \cdot 997.$$

Diese Zahl lässt sich auch in der Form

$$2^3 \cdot 5^3 \cdot \left(3^{1994} \cdot 5^{1991} \cdot 7^{1994} \cdot 19^{1994} \cdot 499 \cdot 997\right) = 1000 \cdot \left(3^{1994} \cdot 5^{1991} \cdot 7^{1994} \cdot 19^{1994} \cdot 499 \cdot 997\right)$$

darstellen. Da alle Faktoren des Produkts in der Klammer ungerade sind, endet die Darstellung dieser Zahl sicherlich nicht mit der Ziffer 0. Die gesamte Differenz besitzt demnach drei Endnullen. Die beiden Potenzen unterscheiden sich erstmals an der vierten Stelle von rechts.

2. Lösung

Durch Berechnung der Potenzen 1995^2, 25^4 und 625^2 erhalten wir die folgenden Eigenschaften:

$$1995^2 \equiv (-5)^2 \equiv 25 \mod 10000,$$

$$1995^4 \equiv 25^2 \equiv 625 \mod 10000,$$

$$1995^8 \equiv 25^4 \equiv 625^2 \equiv 625 \mod 10000,$$

$$625^r \equiv 625 \mod 10000 \text{ für jede natürliche Zahl r.}$$

$$1995^{1994} = 1995^{8 \cdot 249 + 2} = \left(1995^8\right)^{249} \cdot 1995^2 \equiv 625^{249} \cdot 25 \equiv 625 \cdot 25 \mod 10000 \equiv 5625 \mod 10000,$$

$$1995^{1996} = 1995^{8 \cdot 249 + 4} = \left(1995^8\right)^{249} \cdot 1995^4 \equiv 625^{249} \cdot 625 \equiv 625 \cdot 625 \mod 10000 \equiv 625 \mod 10000.$$

Die beiden Potenzen 1995^{1994} und 1995^{1996} stimmen in den letzten drei Ziffern überein. An der vierten Stelle von rechts steht bei 1995^{1994} die Ziffer 5, bei 1995^{1996} die Ziffer 0. Die beiden Zahlen unterscheiden sich also zum ersten Mal an der vierten Stelle von rechts.

3. Lösung

Durch die Berechnung von 1995^2, 1995^4, 1995^6 und 1995^8 erhalten wir

$$1995^2 = 3980025$$

$$1995^4 = 15840599000625$$

Bei der Berechnung von $1995^6 = 1995^2 \cdot 1995^4$ und $1995^8 = 1995^4 \cdot 1995^4$ sind für die letzten vier Stellen der Produktwerte nur die Zahlen 25 und 625 aus den letzten vier Stellen der beiden Faktoren erforderlich. Beide Zahlen sind Potenzen von 5. Wir erhalten für die letzten vier Stellen die Zahlen 5625 und 0625.

Zur Verallgemeinerung betrachten wir nun die binomischen Formeln der Form $(a-b)^n$ mit höheren Exponenten n. Aus dem Unterricht kann für gerade Exponenten n als bekannt vorausgesetzt werden, dass $1995^n = (2000-5)^n = 2000^n - a_1 \cdot 2000^{n-1} \cdot 5 + a_2 \cdot 2000^{n-2} \cdot 5^2 - + ... - a_{n-1} \cdot 2000 \cdot 5^{n-1} + 5^n$ gilt. Die Zahlwerte a_1, a_2, ..., a_{n-1} können mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks bestimmt werden. Mit Ausnahme des letzten Summanden sind, unabhängig von den exakten Zahlenwerten für die Koeffizienten a_i, alle anderen Summanden durch 10000 teilbar. Die letzten vier Stellen von 1995^n werden also lediglich durch die letzten vier Stellen von 5^n bestimmt.

Für diese Potenzen mit geraden Exponenten gilt

$5^2 = 25$	$5^4 = 625$,
$5^6 = 15625$	$5^8 = 390625$,
$5^{10} = ...5625 \cdot 625 = 9765625 = ...5625$	$5^{12} = ...0625 \cdot 625 = 244140625 = ...0625$.

In beiden Zahlenreihen erfolgt der Übergang von Zeile zu Zeile durch die Multiplikation mit $5^4 = 625$. Wegen $...5625 \cdot 625 = 3515625 = ...5625$ und $...0625 \cdot 625 = 390625 = ...0625$ bleiben die letzten vier Ziffern in jeder der beiden Zahlenreihen erhalten. Da $1994 = 4 \cdot 498 + 2$. und $1996 = 4 \cdot 499$ ist, endet 1995^{1994} auf die Ziffernfolge ...5625 und 1995^{1996} auf die Ziffernfolge ...0625. Die beiden Zahlen unterscheiden sich also erstmals an der vierten Stelle von rechts.

Aufgabe 2

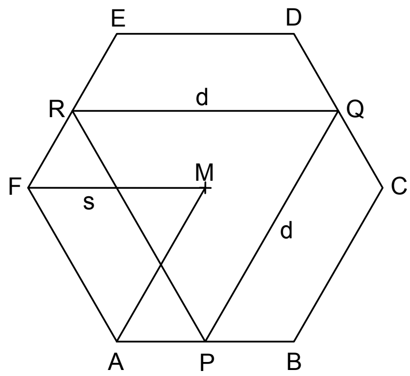
Die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind die Seitenmitten eines regelmäßigen Sechsecks.

In welchem Verhältnis steht der Umfang des Dreiecks zum Umfang des Sechsecks?

In welchem Verhältnis steht der Flächeninhalt des Dreiecks zum Flächeninhalt des Sechsecks?

Benennungen und allgemeine Eigenschaften

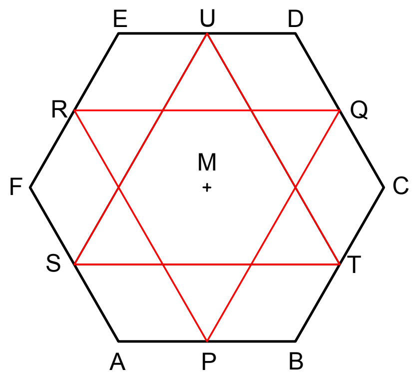
Das Sechseck ABCDEF ist nach Aufgabenstellung regelmäßig. M sei der Mittelpunkt seines Umkreises. Die Seitenlängen s stimmen mit dem Radius des Umkreises überein. Die Weite der Innenwinkel beträgt 120°. Die sechs Dreiecke ΔABM,..., ΔFAM sind jeweils gleichseitig mit der Seitenlänge s. Der Flächeninhalt eines dieser Teildreiecke wird mit A_0 bezeichnet. Die Seitenlänge des Dreiecks PQR wird mit d bezeichnet.

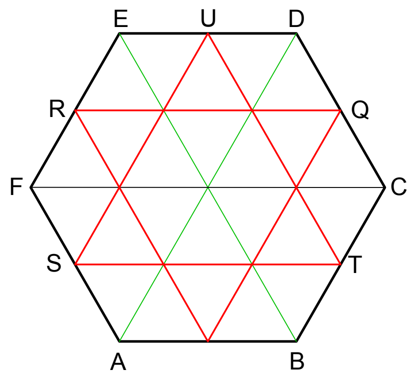


1. Lösung

Wegen der Symmetrieeigenschaften des regelmäßigen Sechsecks ABCDEF und der Festlegung des Dreiecks PQR wird die Gesamtfigur z.B. durch die Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke AB auf sich abgebildet. Insbesondere werden die Strecken DE und QR bei dieser Spiegelung auf sich selbst abgebildet. Sie sind orthogonal zur Spiegelungsachse und damit parallel zueinander. Entsprechend lässt sich begründen, dass jede Dreiecksseite parallel zu einer Seite des Sechseckes ist. Wir ergänzen nun die gegebene Figur durch ein zweites Dreieck STU, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Seiten BC, DE und FA sind. Die Seiten dieses Dreiecks sind ebenfalls jeweils parallel zu einer der Sechseckseiten.

Die entstandene Gesamtfigur ist achsensymmetrisch zu jedem der drei Durchmesser. Da bei jeder dieser Spiegelungen das Dreieck PQR auf das Dreieck STU abgebildet wird, liegen die sechs Schnittpunkte der beiden Dreiecke jeweils auf einem dieser Durchmesser.





Das regelmäßige Sechseck wird durch die beiden Dreiecke PQR und STU sowie die drei Durchmesser in Dreiecke zerlegt. In diesen Dreiecken treten wegen des regelmäßigen Sechsecks und der Parallelität aller Linien zu einer der gegebenen Sechseckseiten nur 60°-Winkel auf. Da benachbarte Teildreiecke eine gemeinsame Seite besitzen, sind alle benachbarten Teildreiecke kongruente, gleichseitige Dreiecke. Das gesamte Sechseck ist deshalb in kongruente gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}s$ zerlegt.

Für die gesuchten Verhältnisse folgt daraus:

Eine Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks hat die Länge $\frac{3}{2}s$. Der Umfang des Dreiecks beträgt $\frac{9}{2}s$. Der Umfang des regelmäßigen Sechsecks 6s.

Das Verhältnis der beiden Umfänge beträgt damit $\frac{6s}{\frac{9}{2}s} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

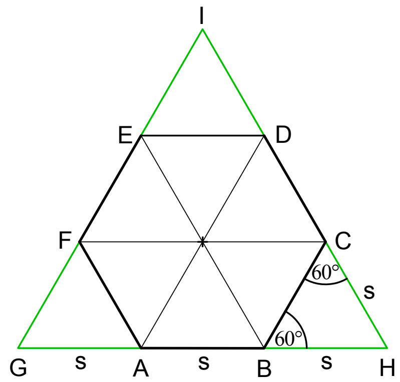
Der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks ist 24 - mal so groß wie der Inhalt eines kleinen gleichseitigen Dreiecks. Der Flächeninhalt des Dreiecks PQR ist 9 - mal so groß.

Damit erhalten wir für das Verhältnis der Flächeninhalte $\frac{A_6}{A_3} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$.

2. Lösung

Die Seiten AB, CD und EF des Sechsecks werden verlängert. Die Verlängerungen schneiden sich in den Punkten G, H und I.

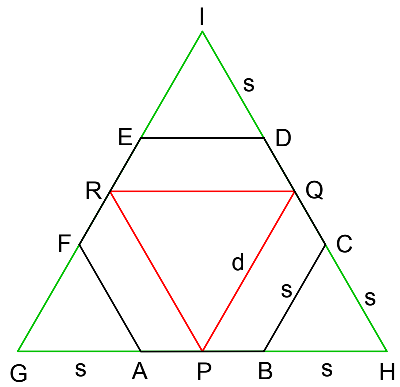
Im Dreieck BHC sind die Winkel $\measuredangle$HBC und $\measuredangle$BCH jeweils Nebenwinkel von Innenwinkeln des regelmäßigen Sechsecks. Es gilt deshalb w(HBC) = w(BCH) = 60°.



Wegen der Winkelsumme von 180° ist auch der dritte Winkel im Dreieck BHC ein 60°-Winkel. Das Dreieck BHC ist deshalb gleichseitig mit der Seitenlänge s. Die gleichen Überlegungen gelten auch für die Dreiecke GAF und EDI. Das Dreieck GHI ist damit gleichseitig mit der Seitenlänge 3s und dem Flächeninhalt $9A_0$.

Da AB, CD und EF jeweils nach beiden Seiten um eine Strecke der Länge s verlängert wurden, sind die Mittelpunkte P, Q und R der Strecken AB, CD und EF zugleich auch die Mittelpunkte der Strecken GH, HI und IG.

Das Dreieck PQR ist also das Mittendreieck des Dreiecks GHI. Wie in jeden Mittendreieck sind seine Seiten halb so lang wie die entsprechenden Seiten des großen Dreiecks. Außerdem zerlegt das Mittendreieck das große Dreieck in vier kongruente und damit auch flächengleiche Teildreiecke. Aus diesen Überlegungen folgt für die Umfänge U_3 und U_6, sowie die Flächeninhalte A_3 und A_6



$$d = \frac{3}{2}s, \text{ d.h. } U_3 = 3d = 3\cdot\frac{3}{2}s = \frac{9}{2}s = \frac{3}{4}\cdot 6s = \frac{3}{4}\cdot U_6,$$

$$A_3 = \frac{1}{4}A_{GHI} = \frac{1}{4}\cdot 9\cdot A_0 = \frac{3}{8}\cdot 6\cdot A_0 = \frac{3}{8}\cdot A_6.$$

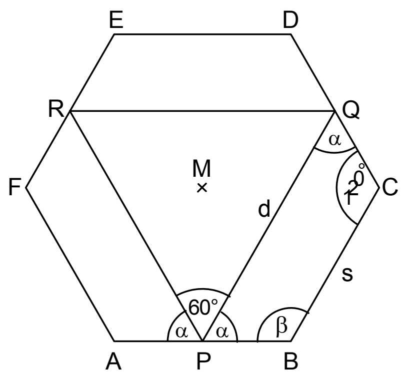
Der Umfang des Dreiecks PQR verhält sich zum Umfang des regelmäßigen Sechsecks wie 3 : 4; der Flächeninhalt des Dreiecks PQR verhält sich zum Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks wie 3 : 8.

3. Lösung

Der Winkel $\measuredangle$QPR im gleichseitigen Dreieck hat die Weite 60°.

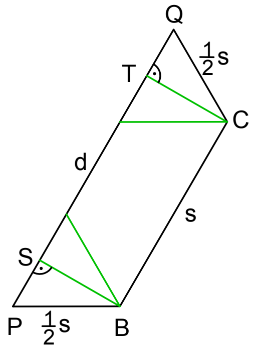
Der Winkel $\measuredangle$APB ist nach Konstruktion ein gestreckter Winkel.

Zusammengefasst folgt α = 60°. Wegen der Symmetrie der Gesamtfigur zur Geraden (RM) sind auch die Winkel $\measuredangle$BPQ und $\measuredangle$PQC gleich groß.



Jeder Innenwinkel im regelmäßigen Sechseck hat die Weite β = 120°. Dies folgt bereits aus der Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks.

Wegen $\alpha + \beta = 180°$ ist das Viereck PBCQ ein Trapez. Da nach Voraussetzung P und R Seitenmittelpunkte der Sechseckseiten sind, gilt $|PB| = |CQ|$. Folglich ist dieses Trapez sogar gleichschenklig.



Aus Symmetriegründen gilt dies auch für die beiden anderen Trapeze. Die Lote von B bzw. C aus auf PQ ergeben die Lotfußpunkte S bzw. T. Der Winkelsummensatz in den Dreiecken PBS bzw. TCQ ergibt für die Weiten der fehlenden Dreieckswinkel jeweils 30°. Somit können diese beiden Dreiecke als halbe gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $|PB| = \frac{1}{2}s$ aufgefasst werden, in denen BS bzw. CT Höhen und zugleich auch Seitenhalbierende sind. Daraus erhalten wir:

$$|PS| = \frac{1}{2} \cdot |PB| = \frac{1}{4} \cdot s,$$

$$|TQ| = \frac{1}{2} \cdot |CQ| = \frac{1}{4} \cdot s,$$

$$d = |PQ| = |PS| + |ST| + |TQ| = \frac{3}{2} \cdot s.$$

Für den Umfang U_3 des Dreiecks PQR gilt:

$$U_3 = 3 \cdot d = \frac{9}{2} s.$$

Vergleichen wir diesen Umfang mit dem Umfang $U_6 = 6 \cdot s$ des regelmäßigen Sechsecks ABCDEF, so erhalten wir das Verhältnis $U_3 : U_6 = \left(\frac{9}{2}s\right) : (6 \cdot s) = 3 : 4.$

Für den Flächeninhalt A eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a gilt (nach Formelsammlung)

$$A = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}.$$

Der Inhalt des Dreiecks PQR mit der Seitenlänge $d = \frac{3}{2}s$ ist demzufolge $A_3 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}s\right)^2 \cdot \sqrt{3}$, d.h.

$$A_3 = \frac{9}{16} \cdot \sqrt{3} \cdot s^2.$$

Das regelmäßige Sechseck ABCDEF besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken ABM, BCM, ..., EFM mit den Seitenlängen s.

Sein Inhalt beträgt daher $A_6 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}.$

Berechnen wir das Verhältnis der beiden Flächeninhalte, so erhalten wir

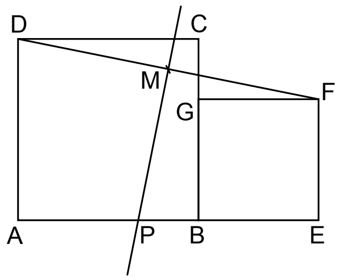
$$A_3 : A_6 = \left(\frac{9}{16}\sqrt{3} \cdot s^2\right) : \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot s^2\right) = 3 : 8.$$

Aufgabe 3

Zwei Quadrate werden in der angegebenen Weise aneinandergesetzt.

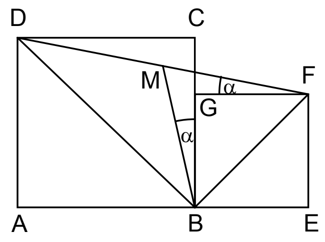
Die Mittelsenkrechte von FD schneidet AE in P.

Wie groß ist der Winkel FPD?



1. Lösung

Es sei M der Mittelpunkt der Strecke FD. Die beiden Diagonalen BF und BD der Quadrate bilden bei B einen rechten Winkel. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt der Punkt B auf dem Thaleskreis über der Strecke FD. Die Strecken MB und MF sind daher gleich lang. Die beiden Basiswinkel $\measuredangle$FBM und $\measuredangle$MFB, und damit auch $\measuredangle$MFG und $\measuredangle$GBM, sind gleich groß.

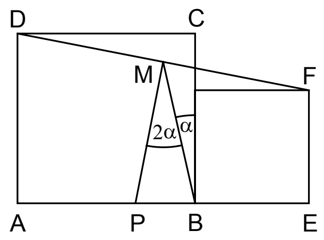


Es sei w(MFG) = w(GBM) = α.

Aus der Winkelsumme im Dreieck BFM folgt dann:

$$w(BMF) = 180° - 2 \cdot (45 + \alpha) = 90° - 2\alpha.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass der Punkt P ebenfalls auf dem Thaleskreis über der Strecke FD liegt. Dann gilt für das gesuchte Winkelmaß w(FPD) = 90°.



Betrachten wir dazu das Dreieck PBM. Da nach Aufgabenstellung die Strecken PM und FD orthogonal sind, gilt

$$w(PMB) = 90° - w(BMF) = 2\alpha.$$

Aus der Orthogonalität von AB und BC folgt: w(MBP) = 90° – w(GBM) = 90° – α.

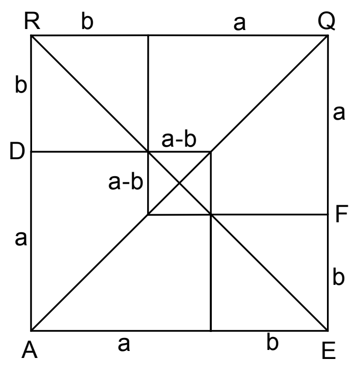
Aus der Winkelsumme im Dreieck PBM folgt schließlich w(BPM) = 180° – (90° – α) – 2α = 90° – α.

Das Dreieck PBM ist also gleichschenklig mit der Basis PB. Damit gilt $|MP| = |MB| = r$.

Der Punkt P liegt also ebenso wie der Punkt B auf dem Thaleskreis über der Strecke FD.

Damit gilt w(FPD) = 90°.

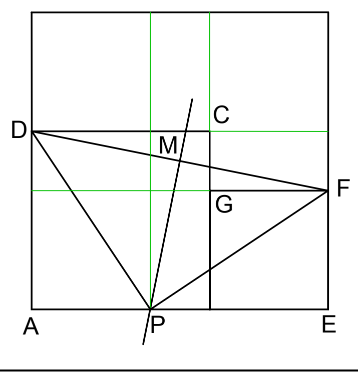
2. Lösung



Zunächst erweitern wir die Figur, wie es die nebenstehende Abbildung zeigt. Es entsteht ein Quadrat mit der Seitenlänge a + b. Die Figur ist achsensymmetrisch zu den beiden Diagonalen AQ und ER. Damit ist die Figur auch punktsymmetrisch zum Schnittpunkt dieser Diagonalen. Der Punkt F wird bei der Punktspiegelung am Diagonalenschnittpunkt auf D abgebildet. Damit ist der Mittelpunkt M der Strecke DF gleichzeitig der Diagonalenschnittpunkt des Quadrats AEQR.

Führen wir eine 90° - Drehung um M aus, so wird D auf einen Punkt D' abgebildet. Da M der Diagonalenschnittpunkt des Quadrats AEQR ist, fällt die Strecke RA bei dieser Drehung auf die Strecke AE. D' liegt also auf AE. Außerdem gilt w(DMD') = 90°. Damit fällt der Punkt D' mit dem Punkt P der Aufgabenstellung zusammen, der ja als Schnittpunkt der Seite AE mit der Orthogonalen zu FD durch M festgelegt ist. Daraus folgt $|MP| = |MD| = |MF|$.

Der Punkt P liegt also auf dem Thaleskreis um M über der Strecke FD. Damit gilt w(FPD) = 90°.

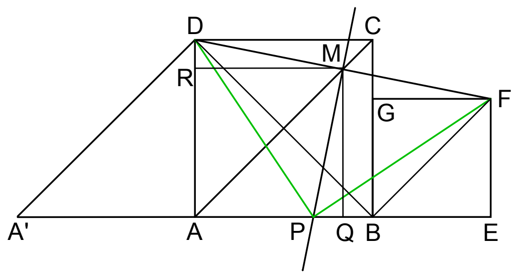


3. Lösung

M sei der Mittelpunkt der Strecke DF, (MP) ihre Mittelsenkrechte. Es sei MQ das Lot von M auf (AB) und (MR) das Lot von M auf AD.

Die Diagonalen AC und BF sind nach Voraussetzung parallel zueinander.

Die Parallele zu AC durch D schneidet die Gerade (AE) in A'. Das Dreieck A'BD ist gleichschenklig, da w(BA'D) = w(DBA') = 45° gilt. Daraus folgt, dass die Strecken AA' und AB gleich lang sind.



Auf Grund der Konstruktion ist AC die Mittelparallele im Streifen der Parallelen (A'D) und (BF). Da M der Mittelpunkt der Strecke DF ist und jeder Mittelpunkt einer Querstrecke in der Streifenschar auf der Mittelparallelen liegt, geht die Gerade (AC) durch M. Das Viereck AQMR ist also ein Quadrat.

Die Dreiecke PQM und RMD sind nach wsw kongruent, denn es gilt:

(1) $|MQ| = |MR|$,

(2) w(MRD) = w(MQP) = 90°,

(3) w(DMR) = w(PMQ), da die Schenkel paarweise orthogonal sind.

Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt weiter $|PM| = |MD| = |MF|$.

P liegt auf dem Thaleskreis über DF, also ist ∡FPD nach dem Satz des Thales ein rechter Winkel.

4. Lösung

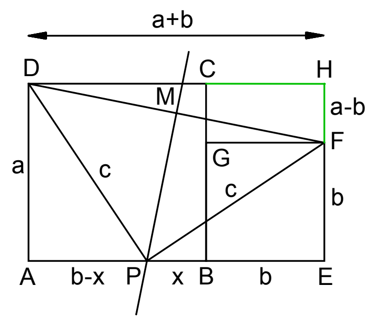
Die Strecken EF und DC werden wie im Bild bis zum Schnittpunkt H verlängert. Die Dreiecke APD, PEF und FHD sind nach Voraussetzung rechtwinklig. Da P auf der Mittelsenkrechten der Strecke DF liegt, sind die Strecken DP und FP gleich lang. Es soll gezeigt werden, dass das Dreieck FDP bei P einen rechten Winkel besitzt.

Bezeichnen wir die Länge der Strecke PB mit x und die Länge der Strecken DP und FP mit c, so gilt nach dem Satz von Pythagoras

im Dreieck APD: $a^2 + (a - x)^2 = c^2$, (1)

im Dreieck PEF: $(b + x)^2 + b^2 = c^2$, (2)

im Dreieck FHD: $(a - b)^2 + (a + b)^2 = |FD|^2$. (3)



Durch Umformung erhalten wir

$2a^2 - 2ax + x^2 = c^2$, (1')

$2b^2 + 2bx + x^2 = c^2$, (2')

$2a^2 + 2b^2 = |FD|^2$. (3')

Durch Gleichsetzen von (1') und (2') und anschließendes Vereinfachen erhalten wir wegen

$2a^2 - 2ax = 2b^2 + 2bx \Leftrightarrow a^2 \quad b^2 = (a + b) \cdot x \Leftrightarrow a - b = x$ (4)

Betrachten wir nun das Dreieck FDP, so gilt wegen (3') und (4) $|FD|^2 = c^2 + c^2$. Nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras ist das Dreieck FDP rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei P. Der gesuchte Winkel hat somit die Weite 90°.

Aufgabe 4

Beim Zahlenlotto werden einschließlich der Zusatzzahl sieben Zahlen gezogen.

Zeige: Aus diesen sieben Ziehungszahlen können stets drei Zahlen ausgewählt werden, deren Summe durch 3 teilbar ist.

Statt sieben Zahlen werden n Zahlen gezogen.

Wie groß muss n mindestens sein, damit aus diesen n Zahlen immer drei ausgewählt werden können, deren Summe durch 3 teilbar ist?

Erster Teil

Jede der gezogenen Zahlen lässt bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1 oder 2. Es entstehen also 7 solcher Dreier-Reste. Unter diesen sind mindestens drei gleiche: Käme nämlich jeder Rest höchstens zweimal vor, so könnten es höchstens sechs Reste sein. Addieren wir nun drei natürliche Zahlen mit gleichem Dreier-Rest r, so erhalten wir stets eine durch 3 teilbare Zahl:

$$(3 \cdot x + r) + (3 \cdot y + r) + (3 \cdot z + r) = 3 \cdot (x + y + z + r).$$

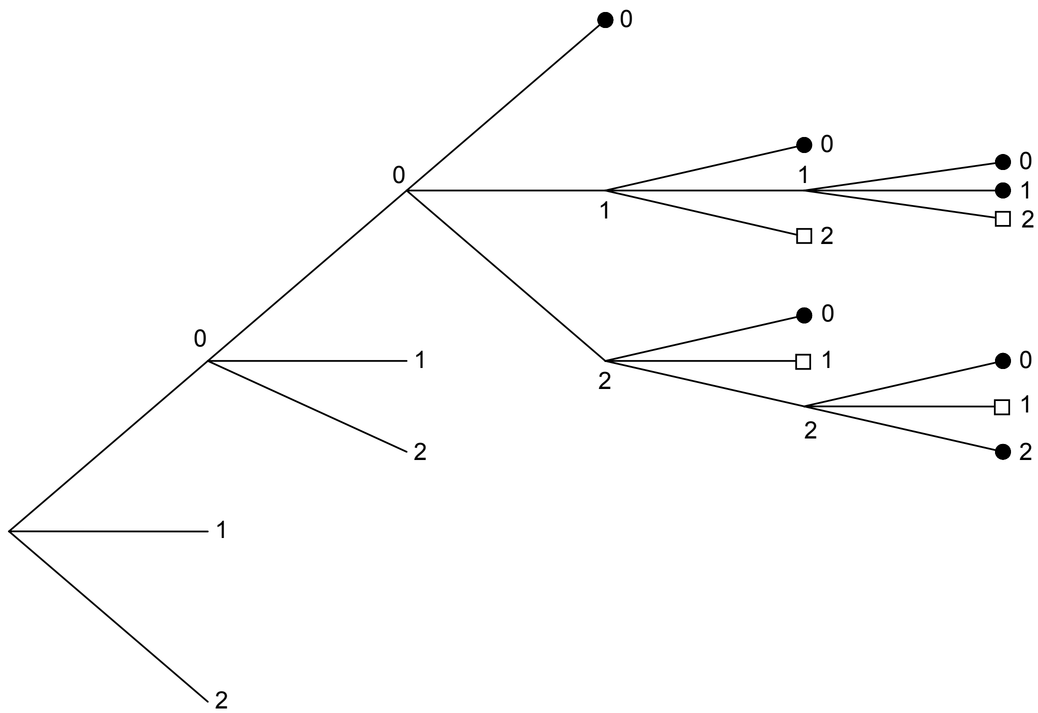
Zweiter Teil

Bei den folgenden Lösungsvarianten wird jeweils nachgewiesen, dass bei fünf Ziehungszahlen stets drei ausgewählt werden können, deren Summe durch 3 teilbar ist, dass vier Ziehungszahlen aber eventuell nicht reichen.

Variante 1

Die Ziehungszahlen werden durch 3 dividiert und die entstehenden Reste {0; 1; 2} in ein Baumdiagramm eingetragen. Im nachstehenden Diagramm ist nur der Teil vollständig aufgelistet, bei dem die ersten beiden Ziehungszahlen jeweils die Reste 0 haben. Die fehlenden Teile können entsprechend ergänzt werden.

Aus



diesem Diagramm lässt sich zweierlei ablesen.

Nach vier Ziehungszahlen führt von den Kombinationen (0/0/1/1) und (0/0/2/2) keine Teilauswahl von drei Zahlen zu einer durch 3 teilbaren Summe.

Sind fünf Zahlen gezogen, so sind unter diesen fünf gezogenen entweder drei gleiche ● vorhanden oder je einer der drei verschiedenen Reste □. Bei beiden Möglichkeiten ist die Summe der gleichen Reste bzw. die Summe der drei Reste 0, 1 und 2 durch 3 teilbar. Wegen der Teilbarkeitsregel von 3 ist damit auch die Summe der zugehörigen drei Ziehungszahlen durch 3 teilbar.

Variante 2

Von den vier Zahlen 3, 4, 6, 7 haben keine drei eine durch 3 teilbare Summe.

$3 + 4 + 6 = 13$, $3 + 4 + 7 = 14$, $3 + 6 + 7 = 16$, $4 + 6 + 7 = 17$

Es muss also $n \geq 5$ sein, wenn die gestellte Bedingung erfüllt werden soll. Von fünf gezogenen Zahlen betrachten wir wieder die Reste bei der Division durch 3.

Fall 1 Unter diesen Resten sind mindestens drei gleiche.
Dann lassen sich nach dem ersten Teil der Lösung drei der fünf Zahlen auswählen, deren Summe durch 3 teilbar ist.

Fall 2 Unter den fünf Resten sind höchstens zwei gleiche.
Dann tritt aber jeder der Reste 0, 1 und 2 mindestens einmal auf, denn sonst hätten wir höchstens vier Reste.
Die Summe dreier natürlicher Zahlen mit den Dreier-Resten 0, 1 und 2 ist nun immer durch 3 teilbar:
$(3 \cdot x + 0) + (3 \cdot y + 1) + (3 \cdot z + 2) = 3 \cdot (x + y + z + 1)$.

Also ist die Bedingung immer erfüllt, wenn n mindestens die Zahl 5 ist.

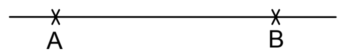
Aufgabe 5

A und B sind zwei Punkte der Ebene.

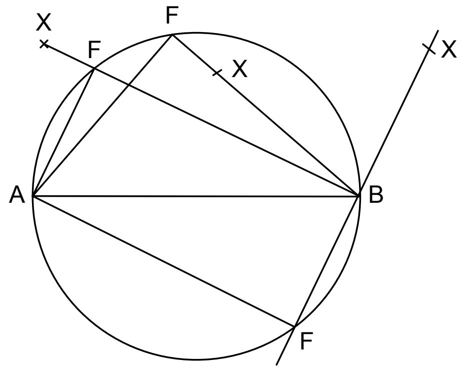
Für welche Punkte X gilt:
Geht man auf geradem Weg von X nach B, so entfernt man sich ständig von A.

Lösung

Beh.: Die gesuchten Punkte sind die Punkte im Inneren und auf dem Rand des Thaleskreises über AB.



Für Punkte X auf der Geraden (AB) ist klar, dass sich nur für die Punkte X auf der Strecke AB die Entfernung von A ständig vergrößert, wenn sich der Punkt X nach B bewegt.



Wenn X nicht auf der Geraden (AB) liegt, so ist die Gerade (BX) von der Geraden (AB) verschieden.

Zeichnen wir das Lot von A auf die Gerade (BX), so gibt es für die Lage der drei Punkte B, X und den Lotfußpunkt F drei verschiedene Möglichkeiten

- I) F liegt innerhalb der Strecke BX,
- II) B liegt innerhalb der Strecke FX,
- III) X liegt auf der Strecke BF.

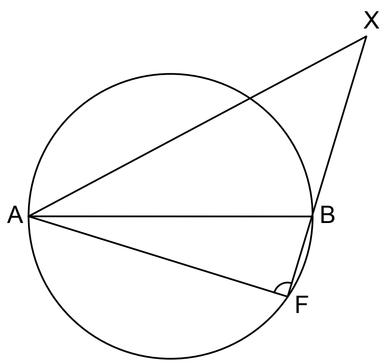
In den ersten beiden Fällen liegt der Punkt X außerhalb des Thaleskreises über AB. Im dritten Fall liegt X auf dem Rand oder im Innern des Thaleskreises.

Es muss nun gezeigt werden, dass sich in den ersten beiden Fällen bei geradliniger Annäherung von X aus an B die Entfernung von A nicht ständig vergrößert. Dazu genügt der Nachweis, dass es (mindestens) einen Punkt auf der Strecke XB gibt, dessen Entfernung von A kleiner ist als die Entfernung von X und A.

Für den dritten Fall muss gezeigt werden, dass bei Annäherung von X aus an B die Entfernung von A ständig zunimmt. Dies bedeutet, dass für zwei verschiedene beliebige Punkte X_1 und X_2 der Strecke XB derjenige Punkt von A den größeren Abstand besitzt, der näher an B liegt.

Bei den Nachweisen wird von der Eigenschaft Gebrauch gemacht, dass in einem Dreieck dem größten Winkel stets die längste Seite gegenüberliegt. Gibt es in einem Dreieck einen stumpfen Winkel, dann ist die gegenüberliegende Seite die längste.

zu I)



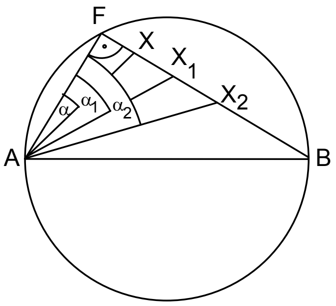
Das Dreieck AFX hat bei F einen 90°-Winkel. Die Strecke AX ist deshalb die längste Seite und es gilt $|AX| > |AF|$. Gehen wir von X auf geradem Weg nach B, so vergrößert sich die Entfernung von A also nicht ständig. Ein Punkt X in dieser Lage gehört also nicht zur gesuchten Punktmenge.

zu II)

Die Dreiecke AFB und AFX haben bei F einen rechten Winkel. Wegen der Winkelsumme von 180° gilt w(ABF) < 90°. Der Nebenwinkel $\measuredangle$XBA ist dann ein stumpfer Winkel und die gegenüberliegende Seite AX deshalb die längste Seite im Dreieck ABX. Es gilt also insbesondere $|AX| > |AB|$. Nähern wir uns vom Punkt X aus dem Punkt B geradlinig, so kann die Entfernung von A also nicht ständig größer werden.

zu III) Variante 1

Dazu müssen wir zeigen, dass $|AX| < |AX_1| < |AX_2|$ gilt, wenn die Punkte X_1, X_2, ... in der angegebenen Weise auf der Strecke XB liegen.



Gilt $0 < |FX| < |FX_1| < |FX_2| < \ldots$, dann gilt $0 \leq \alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$.

In den rechtwinkligen Dreiecken AXF, AX_1F, AX_2F, ... gilt:

$w(FXA) = 90° - \alpha_1$,
$w(FX_1A) = 90° - \alpha_1$,
$w(FX_2A) = 90° - \alpha_2$
und deshalb $w(FXA) > w(FX_1A) > w(FX_2A) > \ldots$.

Für die zugehörigen Nebenwinkel ergibt sich daraus die Anordnung

$90° < w(AXB) < w(AX_1B) < w(AX_2B) < \ldots$.

Im Dreieck AX_1X ist die Seite AX_1 die längste, d.h. $|AX| < |AX_1|$.

Im Dreieck AX_1X_2 liegt die Seite AX_2 einem stumpfen Winkel gegenüber also: $|AX_1| < |AX_2|$.

Die Argumentation gilt auch, wenn der Punkt X mit dem Lotfußpunkt F übereinstimmt.

Variante 2

Nach dem Satz von Pythagoras gilt in den rechtwinkligen Dreiecken AXF und AX_1F:

$$|AX|^2 = |AF|^2 + |FX|^2 \text{ bzw. } |AX_1|^2 = |AF|^2 + |FX_1|^2 .$$

Ersetzen wir $|FX_1|$ durch $|FX| + |XX_1|$, so erhalten wir

$$|AX_1|^2 = |AF|^2 + |FX|^2 + 2 \cdot |FX| \cdot |XX_1| + |XX_1|^2 = |AX|^2 + 2 \cdot |FX| \cdot |XX_1| + |XX_1|^2 .$$

Gehen wir von X in Richtung B, so wird die Länge der Strecke XX_1 immer größer. Damit wird aber auch die Summe $2 \cdot |FX| \cdot |XX_1| + |XX_1|^2$ immer größer. Bei geradliniger Annäherung von X aus an B wird daher die Entfernung von A immer größer.

Aufgabe 6

27 gleich große Würfel sind von 1 bis 27 durchnummeriert.

Kann man sie alle so zu einem Würfel zusammensetzen, dass der nicht sichtbare Innenwürfel die Nummer 1 trägt und Würfel mit aufeinander folgenden Nummern eine gemeinsame Seitenfläche haben?

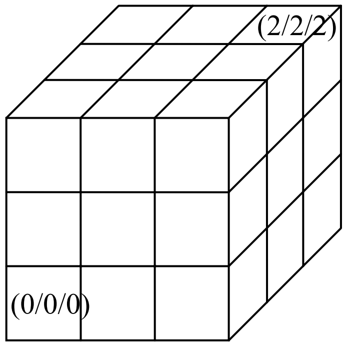
1. Lösung

Die Annahme, dass die 27 kleinen Würfel in der gewünschten Form zu einem großen Würfel zusammengebaut werden können, wird zum Widerspruch geführt.

Die Lage der kleinen Würfel kann durch ein räumliches Koordinatensystem beschrieben werden. Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Würfels links, vorne und unten und setzen voraus, dass die Längeneinheit auf den Koordinatenachsen mit der Kantenlänge der kleinen Würfel übereinstimmt.

Mit dieser Festlegung gilt:

Würfel links, vorne, unten (0/0/0),
⋮
Würfel in der Mitte (1/1/1),
⋮
Würfel rechts, hinten, oben (2/2/2).



Wenn zwei Würfel eine gemeinsame Seitenfläche besitzen, dann unterscheiden sich ihre Koordinaten an genau einer Stelle um 1, d.h. die eine Koordinatensumme ist gerade, die andere ungerade.

Durchlaufen wir den großen Würfel in der geforderten Weise, so wechseln sich gerade und ungerade Koordinatensummen ab.

Da der Innenwürfel mit ungerader Koordinatensumme die Nummer 1 trägt, so müssen alle Würfel mit ungerader Koordinatensumme eine ungerade Nummer tragen und alle Würfel mit gerader Koordinatensumme eine gerade Nummer. Es gibt einerseits 14 Würfel mit gerader Koordinatensumme und 13 mit ungerader. Andererseits aber sind es 14 ungerade Nummern und 13 gerade. Dies ist ein Widerspruch. Folglich ist ein Zusammenbauen der 27 kleinen Würfel zu einem großen Würfel in der gewünschten Form nicht möglich.

2. Lösung

Aus den 27 kleinen Würfeln lässt sich ein größerer Würfel mit dreifacher Kantenlänge zusammensetzen, wobei sich vier verschiedene Typen von Lagen eines kleinen Würfels im großen Würfel unterscheiden lassen.

- die acht Würfel an den acht Eckpunkten des Würfels (Eckwürfel),
- die sechs Würfel in der Mitte von jeder der sechs Seitenflächen (Mittenwürfel),
- die zwölf Würfel in der Mitte von jeder der zwölf Seitenkanten (Kantenwürfel),
- der Innenwürfel des großen Würfels.

Die vierzehn Eck- und Mittenwürfel werden als Würfel vom Typ I bezeichnet, die anderen dreizehn Würfel als Würfel vom Typ II.

Nach der Regel für das Zusammensetzen der 27 Würfel sind folgende Übergänge möglich:

- vom einem Mittenwürfel nur zu einem der Kantenwürfel — Typ I $\to$ Typ II,
- von einem der Eckwürfel nur zu einem der Kantenwürfel — Typ I $\to$ Typ II,
- von einem Kantenwürfel nur zu einem Mitten - oder einem Eckwürfel — Typ II $\to$ Typ I,
- vom Innenwürfel nur zu einem Mittenwürfel — Typ II $\to$ Typ I.

Bei jedem Übergang erfolgt also ein Wechsel des Würfeltyps.

Der Start erfolgt bei einem Würfel des Typs II.

Es gilt deshalb

1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	...
Typ II		Typ I		Typ II		Typ I		Typ II		

Da die Zahlen auf den Würfeln nach der Regel für das Zusammensetzen abwechselnd die Eigenschaft gerade/ungerade besitzen und gleichzeitig auch immer ein Wechsel des Würfeltyps eintritt, müssten alle ungeraden Zahlen aus der Folge 1, 2, 3, ..., 26, 27 auf einem Würfel vom Typ II stehen. Da es 14 ungerade Zahlen aber nur 13 Würfel vom Typ II gibt, ist ein Zusammensetzen in der geforderten Art nicht möglich.

3. Lösung

Wir nehmen an, dass die 27 kleinen Würfel, aus denen der große Würfel zusammengesetzt ist, in der geforderten Art angeordnet seien. Nun sollen die 27 Würfel in der neben angegebenen Weise hell und dunkel gefärbt werden. Bei dieser Einfärbung haben Würfel mit gemeinsamer Seitenfläche unterschiedliche Farben. Da beim Zusammensetzen Würfel mit aufeinander folgenden Zahlen eine gemeinsame Seitenfläche besitzen sollen, erfolgt beim Durchlaufen der Würfel mit den Zahlen von 1 bis 27 jeweils ein Übergang von dunkel nach hell. Der Würfel mit der Aufschrift 1 ist ein dunkler Würfel, der Würfel mit der Aufschrift 2 ein heller Würfel, der mit der Aufschrift 3 ein dunkler und so weiter. Alle Würfel mit einer ungeraden Zahl als Aufschrift müssten also dunkel gefärbt werden. In der Folge der natürlichen Zahlen von 1 bis 27 gibt es 14 ungerade Zahlen. Wie das Bild zeigt, werden bei dem beschriebenen Verfahren aber nur 13 kleine Würfel dunkel gefärbt. Damit ist gezeigt, dass eine Anordnung der 27 Würfel in der geforderten Art nicht möglich ist.