1994

Runde 2

Aufgabe 1

Zeige, dass $1! + 2! + 3! + ... + 1995!$ mindestens 12 Teiler hat.

Hinweis:
Unter n! versteht man das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen.
Beispiel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Lösung

Die Summe $S = 1! + 2! + 3! + ... + 1995!$ kann in die beiden Teilsummen

$T_1 = 1! + 2! + ... + k!$ und $T_2 = (k + 1)! + (k + 2)! + ... + 1995!$

zerlegt werden. Alle Teiler der ersten Teilsumme, die kleiner oder gleich $k + 1$ sind, sind auch Teiler der zweiten Teilsumme, da sie jeden der Summanden von T_2 teilen. Findet man in der ersten Teilsumme mindestens sechs Teiler, die alle auch Teiler von $(k + 1)!$ sind, so sind diese sechs Zahlen auch Teiler der Gesamtsumme.

Durch direktes Berechnen erhalten wir:

$1! = 1,$
$1! + 2! = 3,$
$1! + 2! + 3! = 9 = 3^2,$
$1! + 2! + 3! + 4! = 33 = 3 \cdot 11,$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153 = 3^2 \cdot 17,$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! = 873 = 3^2 \cdot 97,$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! = 5913 = 3^4 \cdot 73,$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! = 46233 = 3^2 \cdot 11 \cdot 467,$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! = 409113 = 3^2 \cdot 131 \cdot 347,$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10! = 4037913 = 3^2 \cdot 11 \cdot 40787.$

Die Summe $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10!$ enthält die Teiler 1, 3, 9, 11, 33 und 99. Da 11! und jeder Summand n! mit $n > 11$ die Faktoren 9 und 11 enthält, kommen diese sechs Teiler in jedem Summanden von T_2 vor.

Außerdem sind die Zahlen $S, \frac{S}{3}, \frac{S}{9}, \frac{S}{11}, \frac{S}{33}$ und $\frac{S}{99}$ sechs weitere Teiler, die alle von 1, 3, 9, 11, 33 und 99 verschieden sind.

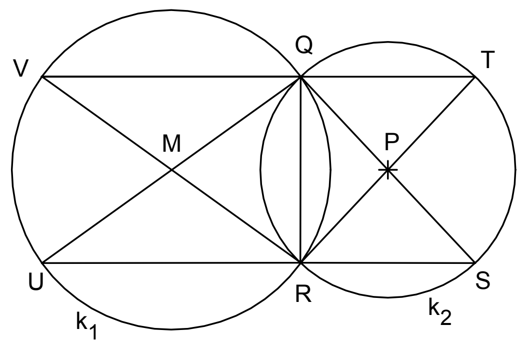
Die Zahl S besitzt also mindestens 12 Teiler.

Aufgabe 2

Ein Kreis ist ohne seinen Mittelpunkt M vorgegeben. Der Punkt M soll mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wobei der Zirkel nur einmal verwendet werden darf. Beschreibe die Konstruktion und begründe sie.

1. Lösung

Wähle einen Punkt P außerhalb des gegebenen Kreises k_1 und zeichne einen Kreis k_2 um P so, dass er k_1 in zwei Punkten Q und R schneidet, die keinen Durchmesser ergeben.



Die Geraden (PQ) und (PR) schneiden den Kreis k_2 in den Punkten S bzw. T ein zweites Mal. Nach dem Satz von Thales gilt w(SRQ) = w(RQT) = 90°.

Die Geraden (TQ) und (SR) schneiden den Kreis k, in den Punkten V bzw. U. Die Winkel ∡SRQ und ∡QRU bzw. ∡RQT und ∡VQR sind Nebenwinkel.

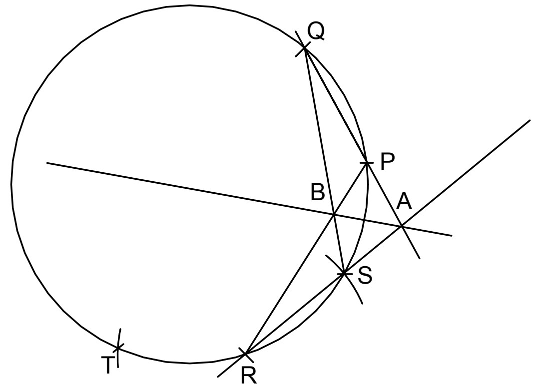
Damit gilt w(QRU) = w(VQR) = 90°.

Nach der Umkehrung des Thalessatzes sind die Strecken RV und QU Durchmesser des Kreises k_1. Der Schnittpunkt M der beiden Strecken ist der Mittelpunkt des Kreises k_1.

2. Lösung

Konstruktion und Begründung

Wähle zwei Punkte P und Q auf dem gegebenen Kreis k_1 so, dass PQ kein Kreisdurchmesser ist. Wähle einen dritten Punkt R auf diesem Kreis so, dass ein Kreis k_2 um R mit Radius |PQ| weder durch P noch durch Q geht.



Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in den Punkten S und T.

Betrachten wir nun das Viereck RSPQ. Wegen der übereinstimmenden Länge von RS und PQ gibt es eine Gerade so, dass durch die Spiegelung an dieser Geraden die Sehne RS auf die Sehne PQ abgebildet wird. Diese Gerade geht aus Symmetriegründen durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises.

Bei dieser Spiegelung wird R auf Q und S auf P abgebildet und umgekehrt. Der Schnittpunkt A der Geraden (RS) und (PQ) und der Schnittpunkt B der Geraden (RP) und (SQ) sind Fixpunkte dieser Abbildung und bestimmen dadurch die Spiegelungsachse.

Anmerkung: Sind die gegenüberliegenden Seiten dieses Vierecks paarweise parallel, so handelt es sich wegen der Achsensymmetrie um ein Rechteck. Der Diagonalenschnittpunkt ist dann der gesuchte Kreismittelpunkt und die Konstruktion ist bereits beendet.

Entsprechend gibt es eine weitere Gerade so, dass bei Spiegelung an dieser Geraden die Sehnen RT und PQ aufeinander abgebildet werden. Diese Spiegelungsachse lässt sich in gleicher Weise durch die Schnittpunkte C und D der Geraden (TR) mit (PQ) und (TP) mit (RQ) konstruieren.

Die Geraden (AB) und (CD) schneiden sich im Mittelpunkt des Kreises k_1.

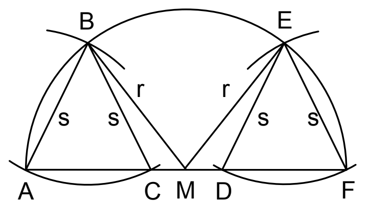
Aufgabe 3

Die Strecke AF enthält im Innern die Punkte C und D und ist Durchmesser eines Halbkreises, auf dem die Punkte B und E liegen. Die Strecken AB, BC, CD, DE und EF haben alle die gleiche Länge s. Bestimme s in Abhängigkeit vom Radius des Halbkreises.

Lösung

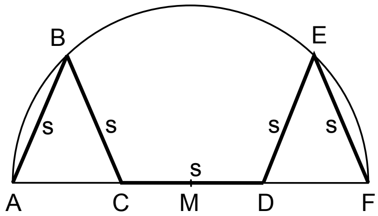
Vorüberlegungen an einer Skizze

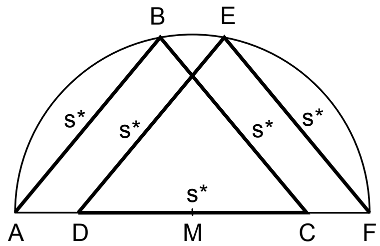
Zeichnen wir zunächst einen Halbkreis über der Strecke AF und jeweils Kreise um A und F mit dem Radius s, so sind die Punkte B und E als Schnittpunkte dieser Kreise mit dem Halbkreis eindeutig bestimmt. Die Kreise um B bzw. E mit dem Radius s schneiden die Gerade (AF) in den Punkten A und F und zusätzlich in den Punkten C und D. Diese Schnittpunkte sind ebenfalls eindeutig bestimmt. Die Dreiecke AMB und MFE sind kongruent, da sie paarweise in allen drei Seitenlängen übereinstimmen.



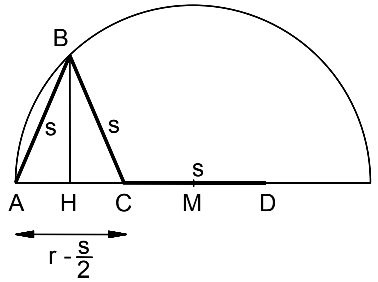
Die Figur ist achsensymmetrisch zur Mittelsenkrechten der Strecke AF. Damit ist M auch der Mittelpunkt der Strecke CD.

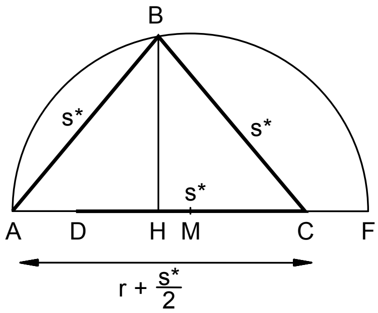
Wenn nun zusätzlich die Strecke CD ebenfalls die Länge s haben soll, so sind die beiden nebenstehenden Lagen möglich.





Ergänzen wir die Zeichnung durch die Orthogonale zu AF durch den Punkt B (bzw. E), so halbiert der Höhenfußpunkt H die Strecke AC, da im gleichschenkligen Dreieck ACB die Höhe auf AC gleichzeitig die Mittelsenkrechte ist.





Wegen der Achsensymmetrie der Figur gilt:

$$|CM| = \frac{1}{2}s \text{ und } |AH| = |HC| = \frac{1}{2}r - \frac{1}{4}s \text{ bzw. } |CM| = \frac{1}{2}s* \text{ und } |AH| = |HC| = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}s*$$

Um den Zusammenhang zwischen r und s (bzw. s*) herzuleiten, gibt es verschiedene Möglichkeiten.

1. Variante

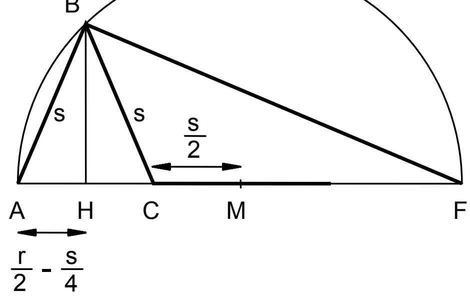
Da der Punkt B auf dem Thaleskreis über der Strecke AF liegt, ist das Dreieck AFB rechtwinklig.

Es gilt deshalb der Kathetensatz $|AF| \cdot |AH| = |AB|^2$

$$2r \cdot \left(\frac{1}{2}r - \frac{1}{4}s\right) = s^2 \qquad 2r \cdot \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{4}s*\right) = s*^2$$

$$r^2 - \frac{1}{2}rs = s^2 \qquad r^2 + \frac{1}{2}rs* = s*^2$$

$$s^2 + \frac{1}{2}rs - r^2 = 0 \qquad s*^2 - \frac{1}{2}rs* - r^2 = 0.$$



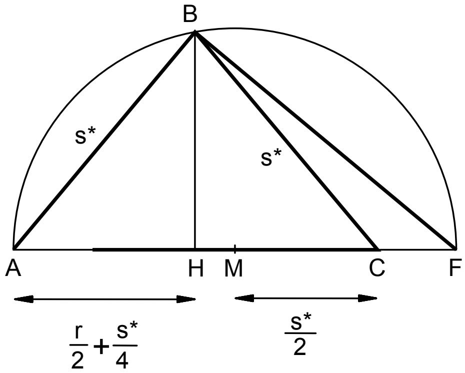
Das Auflösen dieser quadratischen Gleichungen nach s bzw. s* ergibt

$$s=\frac{1}{4}r\cdot\left(-1+\sqrt{17}\right)\ \vee\ s=\frac{1}{4}r\cdot\left(-1-\sqrt{17}\right)\ \text{bzw.}$$

$$s^*=\frac{1}{4}r\cdot\left(1+\sqrt{17}\right)\ \vee\ s^*=\frac{1}{4}r\cdot\left(1-\sqrt{17}\right).$$

Die jeweils zweiten Lösungen ergeben negative Werte für s bzw. s* und entfallen deshalb.

Die beiden positiven Lösungen entsprechen der Abbildung auf der vorherigen Seite.

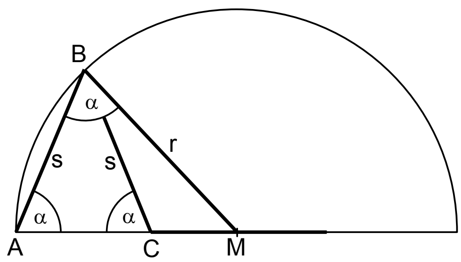


Bei den beiden folgenden Lösungsvarianten wird jeweils nur die erste Beziehung zwischen r und s hergeleitet. Die Bearbeitung wird abgebrochen, sobald die quadratische Gleichung $s^2+\frac{1}{2}rs-r^2=0$ erreicht ist.

2. Variante

Die Dreiecke ACB und AMC sind gleichschenklig und haben den Winkel $\measuredangle CAB$ mit w(CAB) = α gemeinsam.

Da dieser Winkel in beiden Dreiecken ein Basiswinkel ist, stimmen auch die übrigen Winkel überein. Die beiden Dreiecke sind deshalb ähnlich.

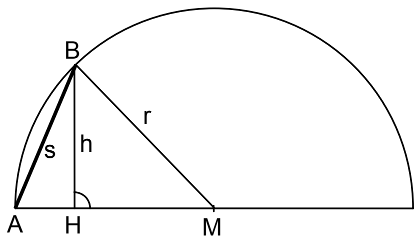


Für die Seitenlängen gilt:

$$\frac{|AM|}{s}=\frac{s}{|AC|}\Leftrightarrow r\cdot\left(r-\frac{s}{2}\right)=s^2\Leftrightarrow s^2+\frac{1}{2}rs-r^2=0.$$

3. Variante

Die Dreiecke AHB und MBH sind rechtwinklig. Durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Pythagoras auf diese beiden Dreiecke entsteht:



$$h^2=s^2-|AH|^2\text{, d.h. }h^2=s^2-\left(\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}s\right)^2,$$

$$h^2=r^2-|HM|^2\text{, d.h. }h^2=r^2-\left(\frac{1}{2}r+\frac{1}{4}s\right)^2.$$

Durch Gleichsetzen und Ausmultiplizieren erhalten wir

$$s^2-\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{4}rs-\frac{1}{16}s^2=r^2-\frac{1}{4}r^2-\frac{1}{4}rs-\frac{1}{16}s^2\Leftrightarrow s^2+\frac{1}{2}rs-r^2=0.$$

Aufgabe 4

Es ist

$$0 = -1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2,$$
$$1 = +1^2,$$
$$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2,$$
$$3 = -1^2 + 2^2,$$
$$4 = -1^2 - 2^2 + 3^2.$$

Lassen sich alle natürlichen Zahlen in der Form $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm .... \pm m^2$ darstellen?

1. Lösung

Aus dem Vergleich der angegebenen Darstellungen für die Zahlen 0 und 4 im Aufgabentext erhalten wir unmittelbar die Beziehung $-4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 = -4$ bzw. $+4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 = +4$, was sich auch durch direktes Berechnen bestätigen lässt.

Betrachten wir allgemein den Term $k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2$ und lösen die Klammern auf, so erhalten wir

$$k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2 = k^2 - k^2 - 2k + 1 - k^2 - 4k - 4 + k^2 + 6k + 9 = 4\,.$$

Dies bedeutet, dass der Term $k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2$ unabhängig vom Startwert k stets den Wert 4 besitzt.

Durch Addieren von aufeinander folgenden Termen dieser Art kann jedes Vielfache von 4 erreicht werden.

$$k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2 = 4\,,$$
$$k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2 + (k+4)^2 - (k+5)^2 - (k+6)^2 + (k+7)^2 = 8\,,$$

usw. .

Jede natürliche Zahl n lässt sich in der Form 4m, 4m + 1, 4m + 2 oder 4m + 3 darstellen. Aus einer Darstellung der Zahlen 0, 1, 2 und 3 kann durch Addition von jeweils vier Summanden in der Form $k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2$ mit passendem Startwert k eine Darstellung von n in der Form $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm .... \pm m^2$ erzeugt werden.

Ist $n \equiv 0 \bmod 4$, so setzt man k = 1 und erhält $n = 0^2 + \left[1^2 - 2^2 - 3^3 + 4^2\right] + \left[5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2\right] + \ldots$.

Ist $n \equiv 1 \bmod 4$, so setzt man k = 2 und erhält $n = 0^2 + 1^2 + \left[2^2 - 3^3 - 4^2 + 5^2\right] + \left[6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2\right] + \ldots$.

Entsprechend

$n = 0^2 - 1^2 - 2^2 - 3^3 + 4^2 + \left[5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2\right] + \left[9^2 - 10^2 - 11^2 + 12^2\right] + \ldots$ für $n \equiv 2 \bmod 4$ und k = 5

bzw.

$n = 0^2 - 1^2 + 2^2 + \left[3^3 - 4^2 - 5^2 + 6^2\right] + \left[7^2 - 8^2 - 9^2 + 10^2\right] + \ldots$ für $n \equiv 3 \bmod 4$ und k = 3.

2. Lösung

Die Differenz von zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen k^2 und $(k+1)^2$ ist wegen

$$(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1$$

die Summe der beiden Zahlen k und k + 1.

Da jede Quadratzahl in der Summe nur einmal auftreten darf, wurden im folgenden Zahlenschema nur die Differenzen eingetragen, die keine gemeinsame Quadratzahl enthalten. Dabei fällt auf, dass die Differenz dieser Differenzen immer den Wert 4 hat.

	0		1		4		9		16		25		36		49		64		81
1. Differenz		1				5				9				13				17	
2. Differenz				4				4				4				4			

In der allgemeinen Darstellung bedeutet dies $(k+3)^2 - (k+2)^2 - (k+1)^2 + k^2 = 4$, was sich durch Vereinfachen mit Hilfe der ersten binomischen Formel direkt bestätigen lässt.

Aus der Darstellung einer Zahl n in der Form $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm .... \pm (k-1)^2$ lässt sich durch Addition von $k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2$ die Zahl n + 4 darstellen. In der Formulierung der Aufgabe sind bereits Darstellungen für die Zahlen 0, 1, 2 und 3 vorgegeben.

Aus diesen Vorgaben erhalten wir in den oben angegebenen Weise aus

0	Darstellungen von	4, 8, 12, 16, ... ,
1	Darstellungen von	5, 9, 13, 17, ... ,
2	Darstellungen von	6, 10, 14, 18, ... ,
3	Darstellungen von	7, 11, 15, 19, ...

Damit lassen sich alle natürlichen Zahlen in der geforderten Weise darstellen.