1993

Runde 1

Aufgabe 1

Max baut auf jedem Feld eines Schachbretts einen Turm aus Legosteinen. Alle Legosteine haben die gleiche Höhe. Die Türme auf den Feldern mit gemeinsamer Kante unterscheiden sich in ihrer Höhe um genau einen Stein. Der niedrigste Turm besteht aus n Steinen.

Bestimme die größte Turmhöhe, die Max überhaupt erreichen kann, in Abhängigkeit von n.

Wie viele Steine sind in diesem Fall insgesamt erforderlich?

1. Lösung

Das Feld mit dem niedrigsten Turm wird als **Startfeld** bezeichnet. Die Vorgabe der Aufgabenstellung, dass sich die Turmhöhen auf Feldern mit gemeinsamer Kante um genau einen Stein unterscheiden, wird **Setzregel** genannt.

Auf den angrenzenden Feldern des Startfeldes stehen jeweils Türme aus n + 1 Steinen. Auf Feldern, die mit dem Startfeld einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen, können Türme aus höchstens n + 2 Steinen stehen. (Abb. 1.1)

n+1	n+2
n	n+1

Abb. 1.1

Erweitern wir die Abbildung zu einem 3 x 3 Quadrat mit dem Ziel, einen möglichst hohen Turm zu erhalten, so kann dieser höchste Turm aus maximal n + 4 Steinen bestehen. Dies ist dann der Fall, wenn die Türme aus n bzw. n + 4 Steinen auf zwei Feldern stehen, die sich diagonal gegenüberliegen. (Abb. 1.2)

		n+4
n+1	n+2	
n	n+1	

Abb. 1.2

Die Turmhöhen auf den noch nicht beschrifteten Feldern des 3 x 3 Schachbretts sind dann durch die Setzregel eindeutig bestimmt. Es entsteht die angegebene Verteilung (Abb. 1.3), die bis auf Drehungen und Spiegelungen eindeutig bestimmt ist.

n+2	n+3	n+4
n+1	n+2	n+3
n	n+1	n+2

Abb. 1.3

Um einen Turm mit maximaler Höhe zu erreichen, müssen das Feld mit maximaler Höhe und das Startfeld in diagonaler Richtung möglichst weit voneinander entfernt sein. Dies tritt genau dann ein, wenn die beiden Felder gegenüberliegende Eckfelder des Schachbretts sind. Der höchste Turm besteht dann aus n + 14 Steinen. Alle anderen Anzahlen ergeben sich eindeutig aus der Setzregel. Bis auf Drehungen und Spiegelungen ergibt sich die Verteilung in Abbildung 1.4.

Die Gesamtzahl der Legosteine in der Verteilung aus Abbildung 1.4 erhält man durch Addition der einzelnen Terme

$$A = n + 2\cdot(n + 1) + 3\cdot(n + 2) + \ldots + 7\cdot(n + 6) + 8\cdot (n + 7) + 7\cdot(n + 8) + \ldots + 2\cdot(n + 13) + (n + 14)$$

$$A = 64\cdot n + 448.$$

n+7	n+8	n+9	n+10	n+11	n+12	n+13	n+14
n+6	n+7	n+8	n+9	n+10	n+11	n+12	n+13
n+5	n+6	n+7	n+8	n+9	n+10	n+11	n+12
n+4	n+5	n+6	n+7	n+8	n+9	n+10	n+11
n+3	n+4	n+5	n+6	n+7	n+8	n+9	n+10
n+2	n+3	n+4	n+5	n+6	n+7	n+8	n+9
n+1	n+2	n+3	n+4	n+5	n+6	n+7	n+8
n	n+1	n+2	n+3	n+4	n+5	n+6	n+7

Abb. 1.4

2. Lösung

Wir bezeichnen die Felder des Schachbretts mit den Zahlenpaaren (x/y), wobei $1 \leq x, y \leq 8$ gilt (Abb. 1.5). Bei jedem Überschreiten einer vertikalen oder einer horizontalen Linie wird nach der Setzregel die Anzahl der Legosteine um eins erhöht oder erniedrigt. Die maximale Zunahme der Anzahl der Türme ist danach höchstens so groß wie die Anzahl der überschrittenen Linien in horizontaler und in vertikaler Richtung.

Gleichzeitig wird beim Überschreiten einer Linie eine der beiden Koordinaten um eins erhöht oder erniedrigt, während die andere unverändert bleibt. Die Anzahl der Linien in horizontaler Richtung ergibt sich aus dem Betrag der Differenz der x - Koordinaten der beiden Felder. Die Anzahl der Linien in vertikaler Richtung entspricht dem Betrag der Differenz der y - Koordinaten. Diese Beträge besitzen den Maximalwert 7, wenn die beiden Felder sich diagonal gegenüberliegen.

						(7/8)	(8/8)
							(8/7)
(1/2)							
(1/1)	(2/1)						

Abb. 1.5

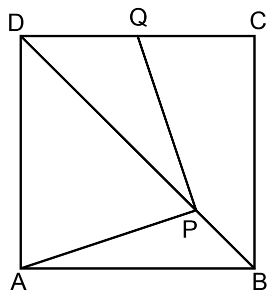
Liegt das Startfeld in einem der vier Eckpunkte (z.B. (1/1)), so kann der Turm auf dem Feld (8/8) maximal aus n + 14 Steinen bestehen. Diese Maximalzahl kann auch tatsächlich erreicht werden, wie die Abb. 1.4 zeigt.

Die Gesamtzahl aller Legosteine können wir auch dadurch bestimmen, dass wir von den 14 zusätzlichen Steinen des Feldes (8/8) sieben Steine entfernen und auf den Turm des Feldes (1/1) aufsetzen. Die Türme aus diesen beiden Feldern bestehen dann jeweils aus $n + 7$ Steinen. Danach entfernen wir jeweils sechs Steine der Felder (7/8) und (8/7) und setzen sie auf die Türme aus $n + 1$ Steinen der Felder (2/1) und (1/2). Setzen wir dieses Verfahren des paarweisen Höhenausgleiches fort, so bestehen schließlich die Türme auf allen 64 Feldern aus $n + 7$ Legosteinen. Dieses Verfahren ist möglich, weil sich die Höhen der beiden Türme auf den Feldern (a/b) und (9 - b/9 - a) jeweils zu $2 \cdot n + 14$ ergänzen.

Die Gesamtzahl aller Legosteine beträgt $A(n) = 64 \cdot (n + 7) = 64 \cdot n + 448$.

Aufgabe 2

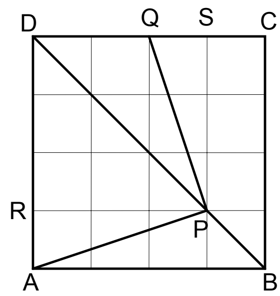
Der Punkt P teilt die Diagonale DB des Quadrats ABCD im Verhältnis 3:1.
Der Punkt Q ist der Mittelpunkt der Strecke CD.



Wie groß ist der Winkel $\angle QPA$?

1. Lösung

Teilen wir die Diagonale DB in vier gleich lange Abschnitte und zeichnen die Parallelen zu den Quadratseiten, so haben diese Parallelen die gleichen Abstände zueinander, da sie durch Parallelverschiebungen um jeweils $\frac{1}{4}\cdot|DB|$ in Richtung der Geraden (DB) aufeinander abgebildet werden. Das Quadrat ABCD wird durch die beiden Parallelenscharen in sechzehn kongruente Quadrate zerlegt.



Die Dreiecke APR und PSQ sind kongruent zueinander, denn sie stimmen in den rechten Winkeln bei R bzw. S und in den Längen der Strecken AR und SQ sowie PR und PS überein.

Deshalb gilt w(RPA) = w(SPQ)

und damit w(QPA) = w(QPR) + w(RPA)

= w(QPR) + w(SPQ)

= w(SPR) = 90°.

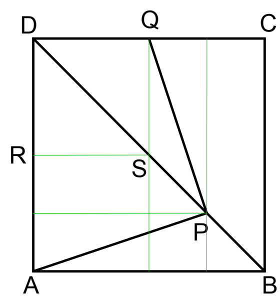
Der gesuchte Winkel ist also ein 90°-Winkel.

2. Lösung

Es sei R die Mitte der Seite AD.

Die Dreiecke APR und CPQ sind achsensymmetrisch zueinander bezüglich der Diagonalen (DB).

Es soll nun gezeigt werden, dass die beiden Dreiecke auch durch eine Drehung um P mit einem Drehwinkel von 90° aufeinander abgebildet werden können.



Zeichnet man die Parallelen zu (BC) durch P und Q, so gilt $|BS| = \frac{1}{2}\cdot|BD|$ und $|BP| = \frac{1}{4}\cdot|BD|$.

Der Punkt P ist also Mittelpunkt der Strecke BS. Deshalb ist P ein Punkt auf der Mittelparallele p von (BC) und (SQ). Da diese Parallele p orthogonal zur Geraden (CD) ist, ist sie Symmetrieachse des Dreiecks QPC. Das Dreieck QPC ist deshalb gleichschenklig mit der Basis CQ.

Entsprechend lässt sich begründen, dass das Dreieck APR gleichschenklig mit der Basis AR ist. Die Höhen dieser beiden Dreiecke sind parallel zu gegenüberliegenden Quadratseiten und damit orthogonal zueinander. Durch eine Drehung um P mit einem Drehwinkel von 90° wird Q auf A und C auf R abgebildet.

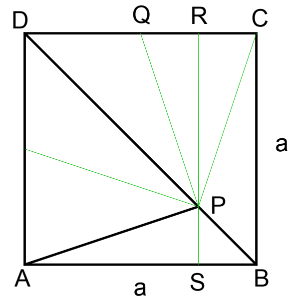
Damit ist nachgewiesen, dass der Winkel QPC ein 90°-Winkel ist.

3. Lösung

Ergänzen wir die Grundfigur durch eine Parallele zu BC durch P, so entstehen Strahlensatzfiguren mit den Zentren B und D:

$$\frac{|DR|}{|RC|} = \frac{|DP|}{|PB|} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad |DR| = 3 \cdot |RC| \quad \Rightarrow \quad |RC| = \frac{1}{4} \cdot a$$

$$\frac{|RP|}{|CB|} = \frac{|DP|}{|DB|} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad |RP| = \frac{3}{4} \cdot |CB| \quad \Rightarrow \quad |PR| = \frac{3}{4} \cdot a\,.$$



Da Q nach Aufgabenstellung der Mittelpunkt der Strecke DC ist, gilt ferner $|QR| = \frac{1}{4} \cdot a$. Außerdem folgt $|PS| = \frac{1}{4} \cdot a$ und $|AS| = \frac{3}{4} \cdot a$.

Aus den bisher nachgewiesenen Eigenschaften und den rechten Winkeln $\angle$ PSA und $\angle$ QRP kann man nun wieder wie bei der ersten Lösung auf die Kongruenz der Dreiecke ASP und PRQ und dann auf das Winkelmaß von $\angle$ QPA schließen.

Diese Folgerung kann aber auch aus der Umkehrung des Satzes von Pythagoras geschlossen werden. Dazu werden die Längen der Strecken AP, PQ und AQ in den rechtwinkligen Dreiecken ASP, PRQ und AQD berechnet.

$$|AP|^2 = |AS|^2 + |SP|^2 \quad \Rightarrow \quad |AP|^2 = \frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{16}a^2 = \frac{5}{8}a^2 \qquad (1)$$

$$|PD|^2 = |PR|^2 + |RD|^2 \quad \Rightarrow \quad |PD|^2 = \frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{16}a^2 = \frac{5}{8}a^2 \qquad (2)$$

$$|AQ|^2 = |AD|^2 + |DQ|^2 \quad \Rightarrow \quad |AQ|^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2 \qquad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $|AQ|^2 = |AP|^2 + |PQ|^2$ und damit nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras die Rechtwinkligkeit des Dreiecks APQ.

Aufgabe 3

Schreibe sieben aufeinander folgende natürliche Zahlen in eine Reihe und darunter in anderer Reihenfolge nochmals dieselben Zahlen. Bilde dann jeweils den Unterschied zwischen zwei übereinander stehenden Zahlen.

Beispiel:

15	16	17	18	19	20	21
21	15	19	16	18	20	17
6	1	2	2	1	0	4

Weise nach, dass bei diesen Unterschieden immer mindestens zwei gleiche Zahlen auftreten.

1. Lösung

Die sieben Zahlen werden mit n, n + 1, ..., n + 6 bezeichnet. Die sieben Unterschiede zwischen zwei dieser Zahlen können nur die Werte 0, 1, 2, ..., 6 annehmen. Gelingt der Nachweis, dass diese sieben Werte bei einer Verteilung nicht gleichzeitig auftreten können, so ist nachgewiesen, dass mindestens einer der sieben Werte doppelt vorkommen muss. Für diesen Nachweis betrachten wir nicht den Unterschied zwischen den beiden jeweils übereinander stehenden Zahlen, sondern bilden jeweils die Differenz zwischen der Zahl in der oberen Reihe und der Zahl in der unteren Reihe. Dann werden die Zahlen in der dritten Zeile teilweise negativ. Da bei der Differenzbildung jede der sieben Zahlen n, n + 1, n + 2, ..., n + 6 einmal als Subtrahend und einmal als Minuend auftritt, ist die Summe der sieben Differenzen 0. Falls jeder der sieben möglichen Unterschiede in der dritten Zeile genau einmal vorkommen würde, wären darunter vier gerade und drei ungerade Zahlen. Die Summe dieser sieben Zahlen wäre unabhängig von der Verteilung der Vorzeichen dann ungerade und könnte nicht den Wert 0 annehmen.

2. Lösung

Subtrahieren wir n von jeder der Zahlen n, n + 1, n + 2, ..., n + 6, so wird dadurch die Aussage der Aufgabenstellung nicht verändert. Es müssen dann nur die sieben Zahlen 0, 1, 2, ..., 6 betrachtet werden. Schreiben wir die sieben Zahlen darunter und betrachten nur die Eigenschaften gerade und ungerade, so sind folgende vier Fälle mögliche

1. unter den vier geraden Zahlen stehen die vier geraden Zahlen, unter den drei ungeraden Zahlen stehen die drei ungeraden Zahlen:
   kurz: viermal g/g und dreimal u/u.

unter den vier geraden Zahlen stehen drei gerade Zahlen und eine ungerade Zahl, demnach müssen unter zwei der drei ungeraden Zahlen ungeraden Zahlen und unter einer ungeraden Zahl eine gerade Zahl stehen:
kurz: dreimal g/g, einmal g/u, einmal u/g und zweimal u/u.

Entsprechend erhalten wir zwei weitere Möglichkeiten

2. zweimal g/g, zweimal g/u, zweimal u/g und einmal u/u
3. einmal g/g, dreimal g/u und dreimal u/g.

Der Unterschied zweier gerader Zahlen und ebenso der Unterschied zweier ungerader Zahlen sind gerade. Der Unterschied einer ungeraden und einer geraden Zahl ist ungerade. Danach erhält man als Unterschiede:

1. siebenmal gerade,
2. fünfmal gerade und zweimal ungerade,
3. dreimal gerade und viermal ungerade,
4. einmal gerade und sechsmal ungerade Werte.

Da von den möglichen Unterschieden 0, 1, 2, ..., 6 vier Werte gerade und drei Werte ungerade sind, erhalten wir bei den ersten beiden Möglichkeiten mindestens einen geraden Unterschied doppelt und bei den letzten beiden Möglichkeiten mindestens einen ungeraden Unterschied doppelt.

Aufgabe 4

Zeige: Wenn 36 die Summe zweier Quadratzahlen teilt, so teilt 36 auch die Differenz dieser beiden Quadratzahlen.

1. Lösung

Notwendige Voraussetzung für die Teilbarkeit durch 36 ist die Teilbarkeit durch 4 und durch 9. Untersuchen wir zunächst, welche Bedingungen zwei Quadratzahlen erfüllen müssen, deren Summe durch 4 teilbar ist. Aus $(2n)^2 = 4n^2$ und $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ folgt, dass die Summe von zwei Quadratzahlen nur dann durch 4 teilbar sein kann, wenn beide Quadratzahlen gerade sind. Dies ist aber nur möglich, wenn bereits die Basen gerade sind. Dann ist aber jeder der beiden Summanden durch 4 teilbar.

Die Teilbarkeit der Summe durch 9 setzt die Teilbarkeit durch 3 voraus. Jede natürliche Zahl n ergibt bei Division durch 3 den Rest 0, 1 oder 2. Jede natürliche Zahl lässt sich deshalb auf genau eine der drei Arten

$n = 3k$, $n = 3k + 1$ oder $n = 3k + 2$ $\left(k \in \mathbb{N}_o\right)$ darstellen.

Bilden wir die Quadrate, so entsteht:

$(3k)^2 = 9k^2$, $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ oder $(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$.

Jede Quadratzahl ergibt bei Division durch 3 den Rest 0 oder 1. Die Summe von zwei Quadratzahlen kann nur dann durch 3 teilbar sein, wenn jede der beiden Basen durch 3 teilbar ist. Dies bedeutet aber, dass jede der beiden Quadratzahlen durch 9 teilbar ist.

Folgerung: Die Summe von zwei Quadratzahlen kann nur dann durch 36 teilbar sein, wenn jede der beiden Quadratzahlen durch 36 teilbar ist.
Wenn aber jede der beiden Quadratzahlen durch 36 teilbar ist, so ist auch ihre Differenz durch 36 teilbar.

2. Lösung

Voraussetzung: $a^2 + b^2 = 36 \cdot n$, $a \geq b$; $a, b, n \in \mathbb{N}_o$

Behauptung: $a^2 - b^2 = 36 \cdot m$, $m \in \mathbb{N}_o$.

Aus der Teilbarkeit von $a^2 + b^2$ durch 36 folgt die Teilbarkeit dieser Summe durch 2, 3, 4 und 9. Es soll nun gezeigt werden, dass unter dieser Voraussetzung auch die Teilbarkeit von $a^2 – b^2$ durch 4 und 9 und damit die Teilbarkeit durch 36 folgt.

1) $a^2 - b^2 = a^2 + b^2 – 2b^2 = 36n – 2b^2 \Rightarrow a^2 – b^2$ ist durch 2 teilbar.
2) Wegen $a^2 – b^2 = (a + b) \cdot (a – b)$ folgt aus der Teilbarkeit von $a^2 – b^2$ durch 2, dass mindestens einer der beiden Faktoren $a + b$ oder $a – b$ durch 2 teilbar ist. Die Zahlen a und b sind also beide gerade oder beide ungerade. In beiden Fällen sind dann sowohl $a + b$ als auch $a – b$ durch 2 teilbar und damit das Produkt
$a^2 – b^2$ durch 4 teilbar.
3) $a^2 + b^2$ ist durch 3 teilbar.

1. Fall (a^2 und b^2 haben bei Division durch 3 den gleichen Rest.)
In diesem Fall ist $a^2 – b^2$ durch 3 teilbar.

2. Fall (a^2 und b^2 haben bei Division durch 3 verschiedene Reste.)
Da $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, muss einer der beiden Summanden bei der Division durch 3 den Rest 1 und der andere den Rest 2 haben.

Keine Quadratzahl besitzt bei der Division durch 3 den Rest 2, denn aus

$n \equiv 0 \bmod 3 \quad \Rightarrow \quad n^2 \equiv 0 \bmod 3,$

$n \equiv 1 \bmod 3 \quad \Rightarrow \quad n^2 \equiv 1 \bmod 3,$

$n \equiv 2 \bmod 3 \quad \Rightarrow \quad n^2 \equiv 4 \bmod 3 \equiv 1 \bmod 3.$

Der zweite Fall kann also nicht eintreten.

4) Sind $a^2 + b^2$ und $a^2 - b^2$ durch 3 teilbar, so ist auch die Summe $2a^2$ der beiden Terme und die Differenz $2b^2$ dieser beiden Terme durch 3 teilbar.
Daraus folgt, dass a^2 und b^2 durch 3 teilbar sind. Dies ist nur möglich, wenn auch die Basen a und b durch 3 teilbar sind. Dann sind aber sowohl a^2 als auch b^2 durch 9 teilbar.

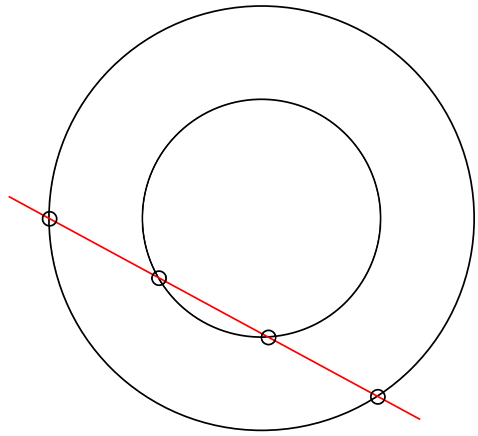
Aus den Punkten 1 bis 4 folgt die Teilbarkeit von $a^2 - b^2$ durch 4 und 9 und damit auch die Teilbarkeit durch 36.

Aufgabe 5

Konstruiere zu zwei gegebenen konzentrischen Kreisen eine Gerade, aus der die Kreise drei gleich lange Strecken ausschneiden.

Begründe die Konstruktion.

Unter welcher Voraussetzung gibt es eine solche Gerade?



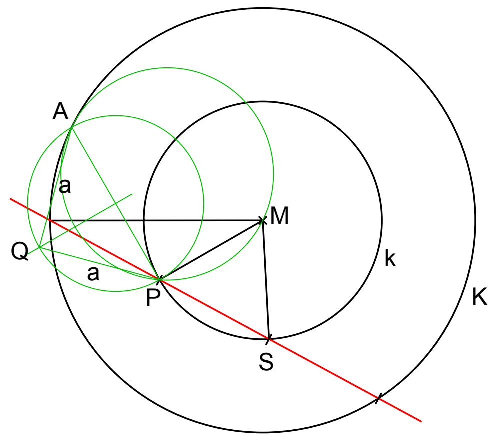
1. Lösung

Konstruktion

Um einen Punkt M werden zwei konzentrische Kreise k und K gezeichnet. Der Radius von k sei r, der Radius von K sei R (R > r).

A sei ein beliebig gewählter Punkt auf K. Der Thaleskreis über MA schneide k in einem Punkt P (und P'). Das Dreieck MAP besitzt nach dem Satz von Thales einen rechten Winkel bei P. Nach dem Satz von Pythagoras gilt deshalb

$$|AP| = \sqrt{R^2 - r^2}\ .$$



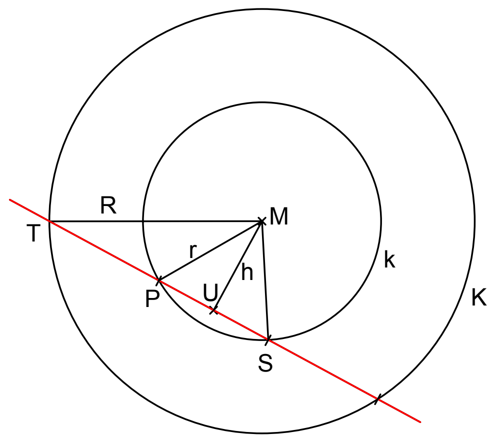
Zeichnen wir über der Strecke AP ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck AQP, dann gilt für dessen Schenkellänge a ebenfalls auf Grund des Satzes von Pythagoras

$$a^2 = \frac{1}{2}|AP|^2 = \frac{R^2 - r^2}{2}. \qquad (*)$$

Der Kreis um P mit Radius a schneidet den Kreis k in den Punkten S und S', falls a kleiner oder gleich 2r ist.

(Anmerkung: Wegen der Übersichtlichkeit sind in der Zeichnung die Punkte P' und S' nicht eingetragen.)

Aus $a^2 \le 4r^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 - r^2 \le 8r^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 \le 9r^2$ folgt zusammen mit $0 < r < R$ die Bedingung $r < R \le 3 \cdot r$.



Behauptung*:* Die Gerade (PS) ist die gesuchte Sekante.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass die Gerade (PS) durch die beiden konzentrischen Kreise in drei gleich lange Abschnitte zerlegt wird.

Nach Konstruktion gilt $|PS| = a = \sqrt{\dfrac{R^2 - r^2}{2}}$.

Da die Gesamtfigur symmetrisch zur Geraden (MU) ist, genügt der Nachweis, dass die Länge der Strecke PT mit der Länge der Strecke PS übereinstimmt. Das Dreieck MPS ist gleichschenklig mit der Basislänge a und der Schenkellänge r. Deshalb gilt $h^2 = r^2 - \frac{1}{4}a^2$.

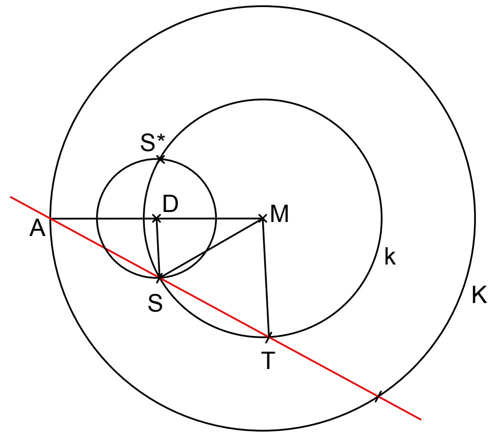
Im rechtwinkligen Dreieck MTU gilt unter Verwendung von (*)

$$|TU|^2 = R^2 - h^2 \quad \Leftrightarrow \quad |TU|^2 = 2a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{9}{4}a^2 .$$

Daraus folgt $|TU| = \frac{3}{2}a$ und damit $|TP| = a$.

2. Lösung

M sei der Mittelpunkt der beiden konzentrischen Kreise K mit Radius R und k mit Radius r (R > r).



Konstruktion

A sei ein beliebiger Punkt des Kreises K, D der Mittelpunkt der Strecke AM. Der Kreis um D mit Radius $\frac{1}{2}r$ schneidet k in den Punkten S und S*.

Behauptung:

Die Gerade (AS) [bzw. (AS*)] ist die gesuchte Gerade, aus der die beiden konzentrischen Kreise drei gleich lange Abschnitte ausschneiden.

Begründung:

Zeichnet man eine Parallele zu DS durch M, so schneidet diese Parallele die Gerade (AS) in einem Punkt T. Nach dem Strahlensatz mit Zentrum A gilt $|AD| : |AM| = |DS| : |MT|$. Da der Punkt D nach Konstruktion der Mittelpunkt der Strecke AM ist, ist AM doppelt so lang wie AD und damit auch MT doppelt so lang wie DS. Da diese Strecke gleich dem halben Radius des kleineren Kreises ist, gilt $|MT| = r$. Dies bedeutet, dass der Punkt T auch auf dem Kreis k liegt.

Wegen des Strahlensatzes gilt außerdem, dass die Strecken AS und ST gleich lang sind. Wegen der Symmetrie der Figur zur Orthogonalen zu (AS) durch M hat der dritte Abschnitt die gleiche Länge wie die Strecke AS. Damit sind alle drei Strecken gleich lang.

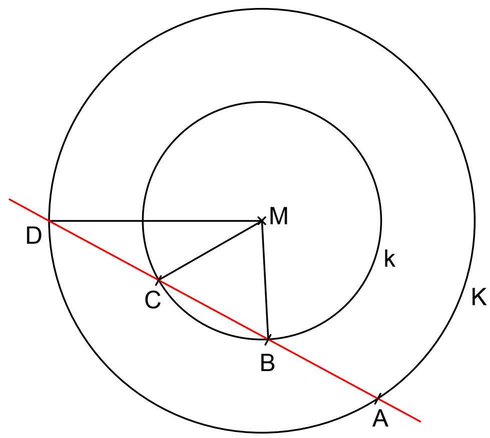
Die Konstruktion ist nicht durchführbar, wenn der Kreis um D mit Radius $\frac{1}{2}r$ den Kreis k nicht schneidet.

Dies ist der Fall, wenn $\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}r < r$ oder $\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}r > r$ ist. Da nach Annahme R > r gilt, ist die Konstruktion für R > 3r nicht durchführbar.

3. Lösung

Vorgegeben seien die konzentrischen Kreise K und k mit dem Mittelpunkt M und den Radien R und r (R > r).

Die Gerade g sei die gesuchte Gerade, die k in B und C, K in A und D so schneidet, dass $|AB| = |BC| = |CD|$ gilt.



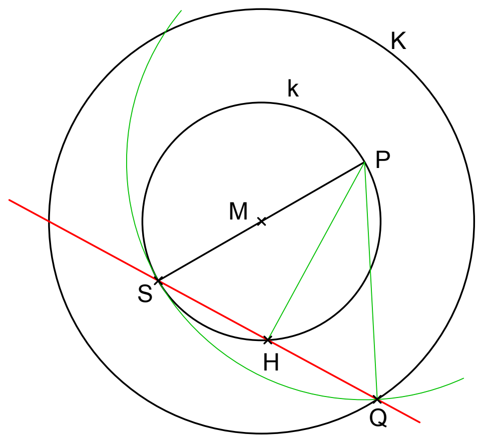
Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$R = |MD| \leq |MC| + |CD| = r + |BC| \leq r + 2r = 3r\ .$$

Dies bedeutet, dass eine Gerade der gesuchten Art höchstens dann existieren kann, wenn der Radius des äußeren Kreises höchstens dreimal so groß ist wie der Radius des inneren Kreises.

Konstruktion:

Für die nebenstehende Konstruktion wird angenommen, dass der Radius des äußeren Kreises höchstens dreimal so groß ist wie der des inneren Kreises. Wählt man auf k einen Punkt P beliebig und zeichnet einen Kreis um P mit Radius 2r, so hat dieser Kreis mit dem äußeren Kreis K mindestens einen gemeinsamen Punkt Q. Der Durchmesser von k durch P hat den zweiten Endpunkt S.



Behauptung:

Die beiden Kreise K und k schneiden aus der Geraden (QS) drei gleich lange Abschnitte aus.

Beweis:

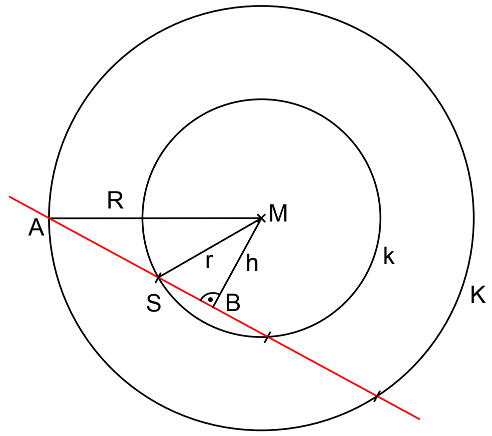
Nach Konstruktion sind die Strecken PQ und PS gleich lang. Die Basiswinkel $\measuredangle$PQS und $\measuredangle$QSP im gleichschenkligen Dreieck SQP sind spitze Winkel. Die Gerade (QS) ist also keine Tangente an den Kreis k, sondern schneidet diesen Kreis in einem Punkt H. Nach dem Satz von Thales ist $\measuredangle$ PHS ein rechter Winkel. Die Strecke PH ist also die Höhe im gleichschenkligen Dreieck SQP und deshalb auch die Mittelsenkrechte der Strecke SQ. Daraus ergibt sich $|SH| = |HQ|$.

Da die Orthogonale zu (QS) durch M die gemeinsame Symmetrieachse der Kreise K und k, sowie der Geraden (QS) ist, gilt für den zweiten Schnittpunkt T der Geraden (QS) mit dem Kreis K die Beziehung $|TS| = |SH| = |HQ|$.

4. Lösung

Lösungsidee:

Aus der Annahme, dass die gesuchte Gerade bereits gefunden sei, wird der Abstand h dieser Geraden vom Mittelpunkt M der beiden konzentrischen Kreise bestimmt. Kann dieser Abstand dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, so ergibt sich daraus eine Konstruktionsmöglichkeit der gesuchten Geraden.



In der nebenstehenden Zeichnung sei (AB) die gesuchte Gerade.

Es gelte also $|AS| = 2 \cdot |SB|$ bzw. $|AB| = 3 \cdot |SB|$.

Der Punkt B sei gleichzeitig der Lotfußpunkt von M auf diese Gerade. Die Radien der beiden Kreise seien R und r (R > r).

Nach dem Satz von Pythagoras gilt dann

$$|AB|^2 = R^2 - h^2 \text{ und } |SB|^2 = r^2 - h^2.$$

Aus $|AB|^2 = 9 \cdot |SB|^2$ folgt weiter $9r^2 - 9h^2 = R^2 - h^2$ und damit $h^2 = \frac{1}{8} \cdot \left(9r^2 - R^2\right)$.

Diese Streckenlänge h existiert, falls $3r \geq R$ ist.

Konstruktion

Bei gegebenen Streckenlängen R und r lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras eine Strecke der Länge $x = \sqrt{9r^2 - R^2}$ als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenusenlänge 3r und der Kathetenlänge R konstruieren. Wegen $h = \frac{1}{4} x \sqrt{2}$ kann man den gesuchten Abstand h der Geraden vom Mittelpunkt M der konzentrischen Kreise dann als Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge $\frac{1}{4}x$ bestimmen.

Zeichnet man dann zu den beiden konzentrischen Kreisen um M mit den Radien R und r einen dritten konzentrischen Kreis mit dem Radius h, so ist jede Tangente an diesen Kreis eine Gerade, aus der die beiden anderen Kreise drei Strecken gleicher Länge ausschneiden.

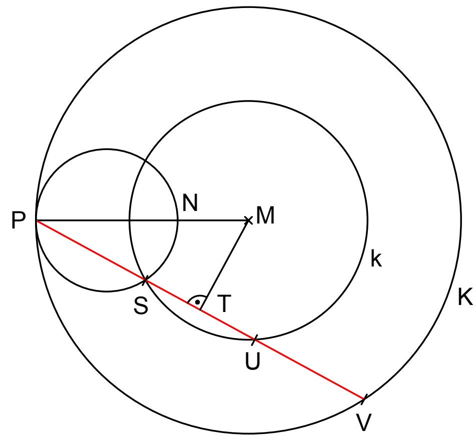
5. Lösung

Gegeben sind die beiden konzentrischen Kreise mit Mittelpunkt M und den Radien R und r. P sei ein beliebiger Punkt auf dem äußeren Kreis.

Konstruktion

Konstruiere z.B. mit Hilfe einer Streifenschar einen Punkt N auf PM so, dass $|NM| = \frac{1}{3}|PM|$ gilt. Der Thaleskreis über PN schneidet den inneren Kreis im Punkt S (und S').

Behauptung: (PS) ist die gesuchte Gerade.



Beweis:

Nach Konstruktion sind sowohl SN als auch TM orthogonal zur Geraden (PS) und deshalb parallel zueinander. Die Punkte P, S, T, N und M bilden eine Strahlensatzfigur mit Zentrum P. Nach dem ersten Strahlensatz gilt

$$|PN| : |NM| = |PS| : |ST| = 2 : 1 .$$

Da T die Strecke SU aus Symmetriegründen halbiert, gilt weiter $|SU| = 2 \cdot |ST| = |PS|$. Der dritte Abschnitt UV ist wegen der Achsensymmetrie der beiden Kreise und der Geraden (PS) zur Geraden (MT) genau so lang wie die Strecke PS. Damit ist nachgewiesen, dass alle drei Abschnitte die gleiche Länge haben.

Aufgabe 6

Zeige:
Addiert man zum Produkt von vier aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen die Zahl 1, so erhält man stets eine Quadratzahl, aber nie die vierte Potenz einer natürlichen Zahl.

Lösung

Die kleinste der vier aufeinander folgenden Zahlen sei n.

Die Eigenschaft, dass $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) + 1$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist, lässt sich auf verschiedenen Wegen nachweisen.

1. Möglichkeit

Berechnen wir den Term für kleine natürliche Zahlen n, so erhalten wir die folgende Übersicht

n	$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1$	m^2
1	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25$	5^2
2	$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121$	11^2
3	$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361$	19^2
4	$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 = 841$	29^2

Betrachten wir die Basen der Quadratzahlen genauer, so fällt auf, dass sie in allen Beispielen um eins größer sind als das Produkt von n und n + 3 bzw. um eins kleiner sind als das Produkt der beiden mittleren Zahlen n + 1 und n + 2.

In beiden Fällen erhalten wir den Term $n^2 + 3n + 1$.

Bilden wir das Quadrat dieses Terms, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(n^2 + 3n + 1)^2 &= (n^2 + 3n + 1) \cdot (n^2 + 3n + 1) \\ &= n^4 + 3n^3 + n^2 + 3n^3 + 9n^2 + 3n + n^2 + 3n + 1 \\ &= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1.\end{aligned}$$

Bilden wir das um 1 vermehrte Produkt der vier aufeinander folgenden Zahlen n, n + 1, n + 2 und n + 3 und vereinfachen wie folgt, so erhalten wir den gleichen Term.

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1 = (n^2 + n) \cdot (n^2 + 5n + 6) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1.$$

Daraus folgt für alle natürlichen Zahlen n: $\quad n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1 = \left(n^2 + 3n + 1\right)^2$.

Da der Term $n^2 + 3n + 1$ für alle positiven ganzen Zahlen n eine natürliche Zahl darstellt, ist das um eins vermehrte Produkt von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen das Quadrat einer natürlichen Zahl.

2. Möglichkeit

Wenn der Term $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$ für alle natürlichen Zahlen eine Quadratzahl sein soll, so muss die Basis die Form $n^2 + a \cdot n + 1$ mit einer natürlichen Zahl a besitzen, damit beim Quadrieren die Summanden n^4 und 1 entstehen.

Durch Berechnung von $\left(n^2 + a \cdot n + 1\right)^2$ erhalten wir:

$$\left(n^2 + a \cdot n + 1\right)^2 = n^4 + 2a \cdot n^3 + 2n^2 + a^2 \cdot n^2 + 2a \cdot n + 1.$$

Durch einen Vergleich der Koeffizienten erhalten wir die Bedingungen 2a = 6 und $2 + a^2 = 11$. Beide Bedingungen sind für a = 3 erfüllt.

Es gilt also $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = \left(n^2 + 3n + 1\right)^2$.

3. Möglichkeit

Durch geschicktes Zusammenfassen der Produkte erhalten wir

$$\begin{aligned} n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1 &= [n\cdot(n+3)]\cdot[(n+1)\cdot(n+2)]+1 \\ &= [n^2+3n]\cdot[(n^2+3n)+2]+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2\cdot(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

Nachweis, dass das um 1 vermehrte Produkt von vier aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen keine vierte Potenz sein kann.

Wenn dieser Term eine vierte Potenz wäre, so müsste n^2+3n+1 eine Quadratzahl sein.

Wegen $(n+1)^2 = n^2+2n+1 < n^2+3n+1 < n^2+4n+4 = (n+2)^2$ liegt n^2+3n+1 stets zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen und kann deshalb keine Quadratzahl sein.