1992

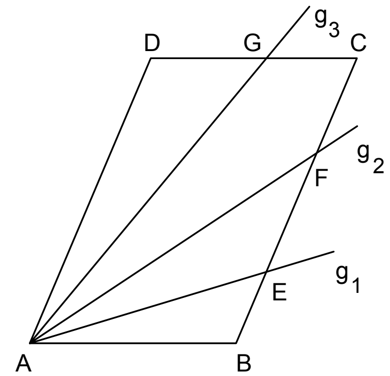
Runde 1

Aufgabe 1

Drei Geraden gehen durch den Punkt A eines Parallelogramms ABCD. Sie zerlegen es in vier inhaltsgleiche Teilflächen und den Innenwinkel bei A in vier gleich große Teilwinkel.

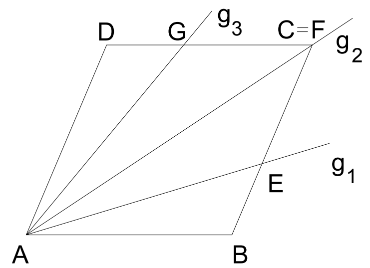
Für welche Parallelogramme trifft dies zu?

1. Lösung



In ein beliebiges Parallelogramm sind die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 durch den Punkt A so eingezeichnet, dass sie den Winkel α in vier gleich große Teilwinkel zerlegen. Ihre Schnittpunkte mit den Seiten des Parallelogramms seien E, F und G. Nach Voraussetzung sollen diese drei Geraden das Parallelogramm in vier inhaltsgleiche Teilflächen zerlegen. Dies bedeutet insbesondere, dass die beiden Dreiecke ABE und AEF zusammen halb so groß wie der Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD sind. Dies ist nur möglich, wenn der Punkt F mit dem Punkt C zusammenfällt.

(Sollte g_2 nicht die Strecke BC sondern die Strecke CD schneiden, so betrachtet man die Teildreiecke AFG und AGD.)



Für die Innenwinkel in den Dreiecken ABC und ACD gilt:

w(BAC) = w(DCA) (Wechselwinkel)
w(CAD) = w(ACB) (Wechselwinkel)
w(BAC) = w(CAD) (Winkelhalbierende AC).

Die Dreiecke ABC und ACD sind also gleichschenklig mit den Schenkeln AB, BC, CD und AD.

Da bei jedem Parallelogramm die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, gilt

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|. \qquad (1)$$

Das Parallelogramm ist also eine Raute.

Betrachtet man nun das Dreieck ABC, so wird dieses Dreieck nach Voraussetzung durch die Strecke AE in zwei inhaltsgleiche Teildreiecke zerlegt. Bezeichnet man die Strecken BE und EC als Grundseiten, so ist der Abstand des Punktes A von der Geraden (BC) die gemeinsame Höhe. Die beiden Dreiecke sind genau dann inhaltsgleich, wenn die Strecken BE und EC gleiche Länge haben. (Zum Nachweis dieser Aussage siehe 3. Lösung). Dies bedeutet, dass E der Mittelpunkt der Seite BC ist. Die Strecke AE ist zugleich Winkelhalbierende und Seitenhalbierende. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist mit der Basis BC und den Schenkeln AB und AC. Zusammen mit der Eigenschaft (1) ergibt sich daraus, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. Entsprechend folgt, dass auch das Dreieck ACD gleichseitig ist.

Für die Innenwinkel von ABCD ergibt sich daraus die Eigenschaft

w(BAD) = w(DCB) = 120° und w(CBA) = w(ADC) = 60°.

Die Parallelogramme mit den geforderten Eigenschaften sind die Rauten mit dem Innenwinkel von 120° bei A.

2. Lösung

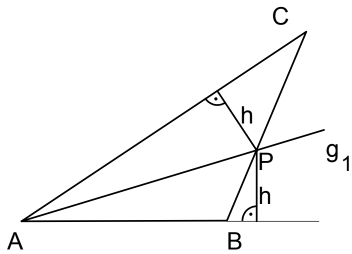
Wegen der Punktsymmetrie zum Diagonalenschnittpunkt wird jedes Parallelogramm durch die Diagonale AC in zwei kongruente und damit flächengleiche Teildreiecke zerlegt. Die mittlere der drei Geraden durch A soll nach Aufgabenstellung die Parallelogrammfläche ebenfalls halbieren. Dies ist nur möglich, wenn diese Gerade mit der Diagonalen AC zusammenfällt. Nach Aufgabenstellung ist die mittlere Gerade gleichzeitig auch Winkelhalbierende von α und wegen der Punktsymmetrie zum Diagonalenschnittpunkt auch Winkelhalbierende von γ.

Da in jedem Parallelogramm gegenüberliegende Winkel gleich groß sind, gilt

$$w(BAC) = w(CAD) = w(ACB) = w(DCA) = \frac{1}{2}\alpha .$$

Die beiden Teildreiecke ABC und ACD sind also gleichschenklig mit der gemeinsamen Basis AC und gleich großen Basiswinkeln. Die Dreiecke sind deshalb kongruent. Die Längen der Strecken AB, BC, CD und DA sind gleich. Das Parallelogramm ABCD ist also eine Raute.

Man betrachtet nun das Dreieck ABC und die Gerade g_1 durch A, die den Winkel $\measuredangle BAC$ halbiert. Sie schneidet die gegenüberliegende Seite im Punkt P.



Nach Aufgabenstellung sind die beiden Teildreiecke ABP und CPA flächengleich. Da P auf der Winkelhalbierenden von $\measuredangle BAC$ liegt, ist sein Abstand von den Winkelschenkeln AB und AC gleich groß.

Fasst man die Seiten AC und AB als Grundseiten der Dreiecke ABP und CAP auf, so ist der Abstand des Punktes P von den Geraden (AB) und (AC) die zugehörige Höhe. Wegen des übereinstimmenden Abstandes h sind die beiden Teildreiecke ABP und CAP genau dann flächengleich, wenn die Grundseiten AB und AC die gleiche Länge haben. Die Raute ABCD hat also die zusätzliche Eigenschaft, dass die Diagonale AC mit der Seitenlänge übereinstimmt. Dies bedeutet, dass die Teildreiecke ABC und ACD gleichseitig sind. Aus dieser Eigenschaft folgen die Innenwinkelmaße

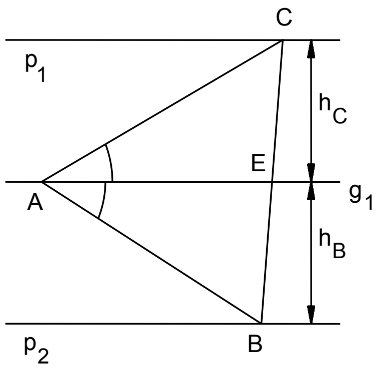
$$\alpha = \gamma = 120° \quad \text{und} \quad \beta = \delta = 60° .$$

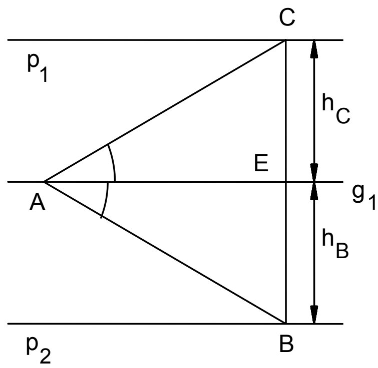
Betrachtet man umgekehrt eine Raute mit einem Innenwinkel von 120° bei A, so wird diese Raute durch die Diagonale AC in zwei gleichseitige Dreiecke ABC und ACD zerlegt. In diesen gleichseitigen Dreiecken sind die Seitenhalbierenden durch A gleichzeitig auch die Winkelhalbierenden. Sie halbieren also die Innenwinkel $\measuredangle$ BAC und $\measuredangle$ CAD und die Flächeninhalte. Diese beiden Seitenhalbierenden und die Diagonale AC erfüllen also in der Raute ABCD die Bedingungen der Aufgabenstellung.

3. Lösung

Wie bei der ersten oder der zweiten Lösung begründet man, dass die mittlere der drei Geraden durch den Punkt C gehen muss, wenn das Parallelogramm durch diese Gerade in zwei flächengleiche Teile zerlegt wird.

Es sei E der Schnittpunkt der Geraden g_1 mit der Strecke BC. Betrachtet man in den beiden benachbarten Teildreiecken ABE und AEC die Seite AE als Grundseite und den Abstand h_b bzw. h_c als Abstand der Punkte B bzw. C von der Geraden (AE), so folgt aus der geforderten Flächengleichheit der Teildreiecke $h_b = h_c$. Die Punkte B und C liegen auf Parallelen zu (AE) im gleichen Abstand.





Durch Spiegelung an der Geraden (AE) wird die Gerade (AB) auf die Gerade (AC) abgebildet, da die Spiegelungsachse nach Voraussetzung die Winkelhalbierende ist. Außerdem wird p_1 auf p_2 abgebildet und umgekehrt, da die Abstände dieser Parallelen von (AE) übereinstimmen. Damit ist B der Bildpunkt von C bei dieser Spiegelung und umgekehrt.

Die Strecke BC ist damit orthogonal zu (AE).

In jedem Parallelogramm gilt $w(CBA) = \beta = 180° - \alpha$.

Aus der Winkelsumme im Dreieck ABE folgt damit

$$\frac{1}{4}\alpha + 180° - \alpha + 90° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 90° = \frac{3}{4}\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 120°.$$

Die Innenwinkel im Dreieck ABC sind deshalb

$$w(BAC) = \frac{1}{2}\alpha = 60°,\ w(CBA) = 180° - \alpha = 60°,\ w(ACB) = 60°.$$

Das Dreieck ABC ist also gleichseitig. Da jedes Parallelogramm punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Diagonalen ist, ist auch das Dreieck ACD gleichseitig.

Das gesuchte Parallelogramm ist also eine Raute mit den Innenwinkeln 120° und 60°.

Aufgabe 2

Für welche natürlichen Zahlen n lässt sich der Bruch $\frac{n-1}{n^2+1}$ nicht kürzen?

1. Lösung

Der Bruch $\frac{n-1}{n^2+1}$ lässt sich genau dann kürzen, wenn sich auch der Kehrbruch $\frac{n^2+1}{n-1}$ kürzen lässt.
Durch Umformen erhält man

$$\frac{n^2+1}{n-1}=\frac{n^2-1+2}{n-1}=\frac{n^2-1}{n-1}+\frac{2}{n-1}=\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n-1}+\frac{2}{n-1}=n+1+\frac{2}{n-1}$$

Der Bruch lässt sich also kürzen, wenn $\frac{2}{n-1}$ gekürzt werden kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn n –1 eine gerade Zahl ist, d.h. wenn n –1 sich in der Form $2\cdot k$ mit $k\in\mathbb{N}$ schreiben lässt. Dies bedeutet, dass n eine ungerade Zahl größer oder gleich 3 sein muss. Da alle Schlussfolgerungen umkehrbar sind, lässt sich der Bruch $\frac{n-1}{n^2+1}$ genau dann kürzen, wenn man für n eine ungerade Zahl größer oder gleich 3 einsetzt.

2. Lösung

1. Fall n (n > 1) sei eine ungerade natürliche Zahl.

In diesem Fall dann sind sowohl n – 1 als auch n^2+1 gerade Zahlen. Der Bruch $\frac{n-1}{n^2+1}$ kann dann mit 2 gekürzt werden.

2. Fall n sei eine gerade Zahl, d.h. $n=2\cdot m$ mit $m\in\mathbb{N}$

Sowohl Zähler als auch Nenner sind dann ungerade Zahlen. Der Bruch kann also sicherlich nicht durch die Zahl 2 gekürzt werden.

Annahme: Es sei p (p > 2) ein gemeinsamer Primfaktor von Zähler und Nenner.

Der Bruch $\frac{n-1}{n^2+1}$ lässt sich in der Form $\frac{2m-1}{4m^2+1}$ darstellen. Wenn p ein Primfaktor von 2m – 1 ist, so ist p auch ein Primfaktor von $(2m-1)^2=4m^2-4m+1$.

Bildet man die Differenz von $4m^2+1$ und $4m^2-4m+1$, so ist auch diese Differenz durch p teilbar, weil beide Terme durch p teilbar sind. Durch Vereinfachen erhält man, dass p ein Teiler von 4m ist. Da p eine Primzahl größer als 2 ist, muss p ein Teiler von m sein; d.h. p teilt 2n und damit auch n. Andererseits ist p ein Teiler des Zählers n – 1. Als Teiler von n und n – 1 müsste p auch deren Differenz, also 1 teilen. Dies ist wegen p > 2 nicht möglich. Damit ist die Annahme, dass es einen gemeinsamen Primfaktor von Zähler und Nenner gibt, widerlegt.

Zusammenfassung:
Der Bruch lässt sich für alle ungeraden Zahlen n > 3 kürzen, für alle geraden Zahlen kann er nicht gekürzt werden.

3. Lösung

Der Bruch $\frac{n-1}{n^2+1}$ kann genau dann gekürzt werden, wenn es natürliche Zahlen k (k > 1), r und s gibt mit der Eigenschaft $n-1=k\cdot r$ und $n^2+1=k\cdot s$

Löst man die erste Bedingung nach n auf und setzt den Term $k\cdot r+1$ für n in die zweite ein, so erhält man

$$\begin{aligned}(k\cdot r+1)^2+1&=k\cdot s\\ k^2\cdot r^2+2kr+2&=k\cdot s\\ k\cdot r^2+2r+\frac{2}{k}&=s.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung enthält bis auf den Bruch $\frac{2}{k}$ nur ganze Zahlen. Sie kann höchstens dann erfüllt werden, wenn k gleich 2 ist.

Dies bedeutet, dass sowohl $n-1$ als auch n^2+1 gerade Zahlen sein müssen. Der gegebene Bruch kann also höchstens dann gekürzt werden, wenn n eine ungerade natürliche Zahl ist. Es kann sicherlich nicht gekürzt werden, wenn n eine gerade Zahl ist.

Ist andererseits n eine ungerade natürliche Zahl von der Form 2k + 1, so gilt $\frac{n-1}{n^2+1}=\frac{2k}{4k^2+4k+2}$, woraus unmittelbar folgt, dass der Bruch gekürzt werden kann.

4. Lösung

Es sei k der gemeinsame Faktor von Zähler und Nenner größer als 1, durch den der gegebene Bruch gekürzt werden kann. Betrachtet man Zähler und Nenner modulo k, so erhält man

$n-1\equiv 0 \bmod k$ und $n^2+1\equiv 0 \bmod k$

und damit $n\equiv 1 \bmod k$ und $n^2\equiv -1 \bmod k$.

Wenn aber n = 1 mod k ist, so folgt daraus auch n^2 = 1 mod k.

Zusammen mit $n^2\equiv -1 \bmod k$

ergibt sich daraus $1\equiv -1 \bmod 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\equiv 0 \bmod k$.

Diese Kongruenz ist aber wegen k > 1 nur für k = 2 gültig. Der Bruch $\frac{n-1}{n^2+1}$ kann also für alle natürlichen Zahlen n höchstens mit 2 gekürzt werden. Dazu muss n – 1 eine gerade Zahl, n also eine ungerade Zahl sein.

Ist umgekehrt n ungerade, so sind sowohl n – 1 als auch n^2+1 gerade Zahlen und der Bruch kann mit 2 gekürzt werden.

Aufgabe 3

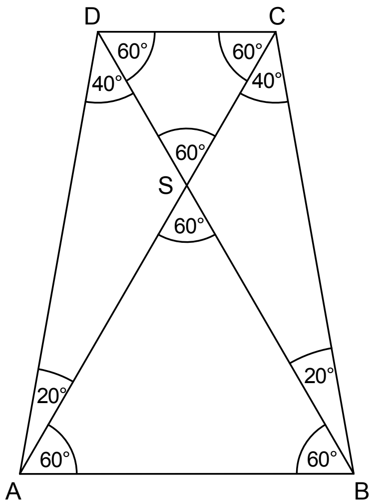
In einem gleichschenkligen Trapez ABCD (AB || CD) gilt w(BAD) = w(CBA) = 80°. Die Diagonale AC schneidet die Grundseite AB unter dem Winkel 60°. Ein Punkt P wird auf AD so gewählt, dass die Weite des Winkels w(PBA) 50° beträgt.

Unter welchem Winkel schneidet die Gerade (PC) die Seite DC?

Gemeinsamer Lösungsteil

Das Trapez ABCD ist wegen der Gleichschenkligkeit symmetrisch zur Mittelsenkrechten der Grundseite AB. Aus den vorgegebenen Winkelmaßen folgen wegen der Winkelsumme in den Teildreiecken und den Eigenschaften von Winkeln an den parallelen Seiten AB und CD die in der Abbildung eingetragenen Winkelgrößen.

Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die Dreiecke ABS und CDS gleichseitig sind. In den folgenden Lösungen sei S stets der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD.

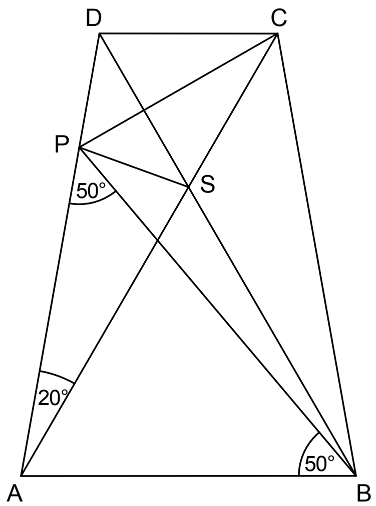


1. Lösung

Es sei P so gewählt, dass w(PBA) = 50° gilt. Wegen der Winkelsumme im Teildreieck ABP gilt

w(APB) = w(PBA) = 50°.

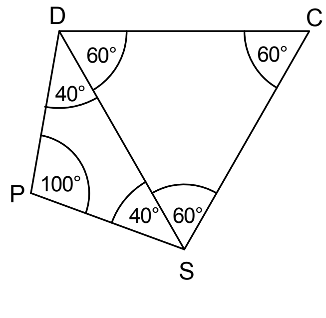
Das Dreieck ABP ist also gleichschenklig mit |AB| = |AP|. Da wegen des gleichseitigen Dreiecks ABS außerdem |AB| = |AS| gilt, ist auch das Dreieck ASP gleichschenklig mit der Basis PS und den Schenkeln AS und AP. Für den Winkel an der Spitze dieses Dreiecks gilt w(SAP) = 20°. Die beiden Basiswinkel sind jeweils 80°.



Für die Nebenwinkel im Viereck PSCD ergibt sich daraus

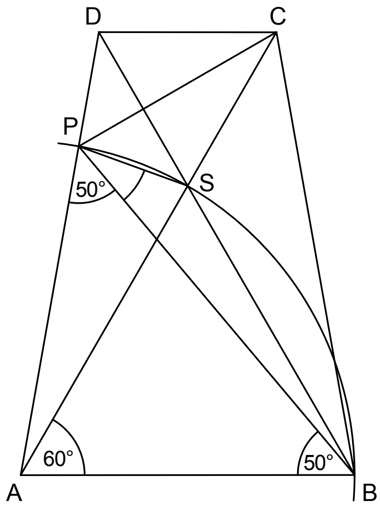
w(CSP) = w(SPD) = 100°.

Zusammen mit der Gleichseitigkeit des Dreiecks CDS erhält man die Winkelmaße in der nebenstehenden Zeichnung. Das Dreieck DPS ist gleichschenklig mit der Basis SD. Das Viereck CDPS ist also ein Drachen. Die Diagonale PC ist die Symmetrieachse. Sie halbiert den 60°-Winkel bei C. Der Schnittwinkel der Geraden (PC) mit der Geraden (CD) beträgt damit 30°.



Die Eigenschaft, dass die Strecke PC den Winkel ∡ DCS halbiert, kann man auch durch die Kongruenz der Dreiecke PSC und CDP nachweisen. Diese beiden Dreiecke sind nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent, da sie in der Länge der gemeinsamen Seite PC und der Länge der Seiten CD und CS übereinstimmen. Außerdem sind die Winkel, die der längeren Seite PC gegenüberliegen, gleich groß.

2. Lösung



Wie bei der ersten Lösung weist man zunächst nach, dass die Dreiecke ABS und CDS gleichseitig und das Dreieck ABP gleichschenklig ist. Daraus folgt |AB| = |AS| = |AP|. Die Punkte B, S und P liegen also auf einem Kreis mit Mittelpunkt A und Radius |AB|.

Nach dem Satz über Mittelpunktswinkel und Randwinkel gilt für den Randwinkel $\measuredangle$ BPS und den zugehörigen Mittelpunktswinkel $\measuredangle$ BAS über der Sehne BS die Beziehung

$$w(BPS) = \frac{1}{2} w(BAS) = 30° .$$

Daraus folgt dann weiter

$$w(SPD) = 180° – 50° – 30° = 100°.$$

Aus der Winkelsumme im Viereck SCDP folgt schließlich

$$w(CSP) = 360° – 100° – 100° – 60° = 100°.$$

Die Dreiecke PSC und CDP sind nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent, da sie in den Längen der Seiten CS und CD sowie in der gemeinsamen Seite PC und im Maß der Winkel $\measuredangle$ CSP und $\measuredangle$ PDC übereinstimmen, die der längeren Seite PC gegenüberliegen.

Aufgabe 4

Von einer natürlichen Zahl $n > 1$ bestimmt man die Anzahl a_1 ihrer Teiler, danach die Anzahl a_2 der Teiler von a_1, danach die Anzahl a_3 der Teiler von a_2 usw.

Zeige: Entweder ist n eine Primzahl oder unter den Zahlen $n, a_1, a_2, a_3, \ldots$ gibt es mindestens eine Quadratzahl.

Lösung

Für die Lösung dieser Aufgabe kann man folgende Eigenschaften verwenden, die für die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl n gelten.

Bei jeder natürlichen Zahl n, mit Ausnahme der Zahl 2, ist die Anzahl ihrer Teiler kleiner als die Zahl selbst, da beispielsweise alle Zahlen größer als $\frac{n}{2}$ aber kleiner als n keine Teiler von n sind. Bei der Zahl 2 stimmt die Anzahl der Teiler mit der Zahl selbst überein.

Alle Primzahlen und nur diese haben zwei Teiler.

Eine Zahl n ist genau dann Quadratzahl, wenn die Anzahl ihrer Teiler ungerade ist. Ist $t > 1$ ein Teiler von n, so ist auch $\frac{n}{t}$ ein Teiler von n. Ist n keine Quadratzahl, so sind die Zahlen t und $\frac{n}{t}$ immer voneinander verschieden. Fasst man die Teiler zu Paaren $(t \,/\, \frac{n}{t})$ zusammen, so wird deutlich, dass die Anzahl der Teiler von n gerade ist. Ist n aber eine Quadratzahl, d.h. $n = m^2$, so gibt es zum Teiler m keinen Partnerteiler. Die Anzahl der Teiler von n ist dann ungerade.

Bestimmt man, wie in der Aufgabenstellung beschrieben, die Anzahl a_1 der Teiler von n, dann die Anzahl a_2 der Teiler von a_1, so werden die Zahlen $n, a_1, a_2, a_3, \ldots$ entsprechend der ersten genannten Eigenschaft immer kleiner, bis die Zahl 2 erreicht ist. Dann sind alle weiteren Zahlen konstant. Man kann nun drei Fälle unterscheiden:

Fall I

Ist n eine Primzahl, so entsteht die Folge n, 2, 2, ... und enthält damit keine Quadratzahl.

Fall II

Ist n eine Quadratzahl, so ist die Behauptung der Aufgabenstellung erfüllt.

Fall III

Es sei n keine Primzahl und keine Quadratzahl.

Die Anzahl a_1 ihrer Teiler ist dann größer als 2 und gerade. Es gilt also $a_1 > 4$. Da die Zahl a_1 gerade ist, kann sie selbst keine Primzahl sein. Demnach ist auch die Anzahl a_2 ihrer Teiler größer als 2.

Wenn keine der Zahlen a_i in der Folge $n, a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Primzahl wäre, so würde

$n > a_2 > a_2 > a_3 > \ldots > 2$ gelten.

Da diese Folge nur natürliche Zahlen enthält, kann sie aber nicht unendlich viele Elemente enthalten. Es muss eine Zahl a_k geben, für die <u>erstmals</u> $a_k = 2$ gilt. Die Zahl a_{k-1} muss eine Primzahl größer als 2 gewesen sein. Dies bedeutet, dass a_{k-1} eine ungerade Zahl ist. Dann muss aber a_{k-1} eine Quadratzahl gewesen sein.

Wenn also n nicht bereits selbst eine Primzahl oder eine Quadratzahl war, so ist aber mindestens die zweite Zahl vor dem erstmaligen Auftreten der Zahl 2 in der Folge $n, a_1, a_2, a_3 \ldots$ eine Quadratzahl.