1992

Runde 1

Aufgabe 1

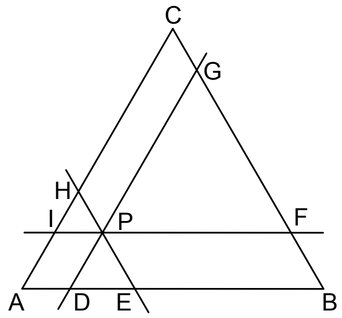
Durch einen Punkt im Innern eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a sind die drei Parallelen zu den Dreiecksseiten gezeichnet.

Das Dreieck schneidet aus diesen Parallelen drei Strecken mit den Längen x, y und z aus.

Zeige: $x + y + z = 2\,a$

Vorüberlegungen

In der nebenstehenden Figur sind die drei Parallelen zu den Dreieckseiten durch einen frei gewählten Punkt P gezeichnet. Die Längen der Strecken DG, EH und IF werden mit x, y bzw. z bezeichnet. Die drei Parallelen zerlegen das gleichseitige Dreieck ABC in drei Vierecke und drei Dreiecke.



Die Vierecke ADPI, EBFP und GCHP sind Parallelogramme, da die gegenüberliegenden Seiten nach Konstruktion paarweise parallel zueinander sind.

Die Dreiecke IPH, DEP und FGP sind gleichwinklig und damit auch gleichseitig.

Nach Voraussetzung sind jeweils zwei Innenwinkel, nämlich $\measuredangle$ IHP, $\measuredangle$ PIH, $\measuredangle$ EDP, $\measuredangle$ PED, $\measuredangle$ GFP und $\measuredangle$ PGF als Stufenwinkel zu den Innenwinkeln des Dreiecks ABC jeweils 60°. Wegen der Winkelsumme in den Dreiecken IPH, DEP und FGP sind dann auch die verbleibenden Winkel jeweils 60°.

1. Lösung

Auf Grund dieser Eigenschaften gilt:

$$\begin{aligned} &|AD| = |IP| = |IH| = |PH| = |GC|, \\ &|AI| = |DP| = |DE| = |EP| = |BF|, \qquad (1) \\ &|EB| = |PF| = |FG| = |PG| = |HC|. \end{aligned}$$

Für die ausgeschnittenen Streckenlängen x, y und z gilt ferner:

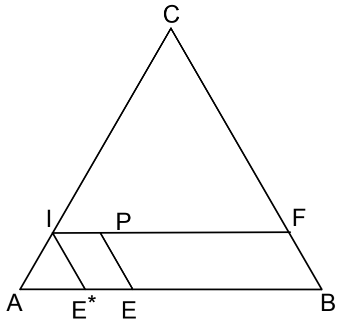
$$x = |DP| + |PG|,\ y = |EP| + |PH|,\ z = |IP| + |PF|. \qquad (2)$$

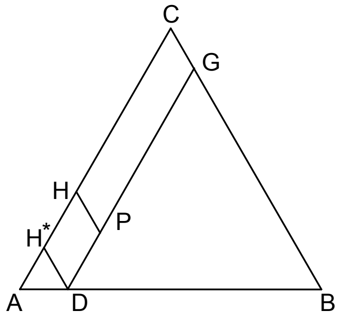
Ersetzt man die Streckenlängen in (2) mit Hilfe von (1), so erhält man

$$\begin{aligned} x + y + z &= |DP| + |PG| + |EP| + |PH| + |IP| + |PF| \\ &= |AI| + |EB| + |DE| + |IH| + |AD| + |HC| \\ &= |AI| + |IH| + |HC| + |AD| + |DE| + |EB| \\ &= |AC| + |AB| \\ &= 2a. \end{aligned}$$

2. Lösung

Betrachtet man zunächst die beiden Teilfiguren, in denen die Strecken PE bzw. PH nach IE* bzw. DH* verschoben wurden, so entstehen die Teildreiecke AE*I bzw. ADH*. Diese Dreiecke sind gleichseitig, da ihre Seiten paarweise parallel zu den Seiten des gleichseitigen Dreiecks ABC sind.





Aus diesen Zeichnungen ergibt sich

$z = |IF| = |E^*B|$ und $x = |DG| = |CH^*|$.

Berücksichtigt man die Gleichseitigkeit der Dreiecke AE*I und ADH*, so folgt aus $|PE| = |IE^*| = |AE^*|$, $|PH| = |DH^*| = |H^*A|$ und $y = |HP| + |PE| = |H^*A| + |AE^*|$.

Für die Summe der Streckenlängen x, y und z ergibt sich daraus:

$x + y + z = |CH^*| + |H^*A| + |AE^*| + |E^*B| = |CA| + |AB| = 2a$.

Aufgabe 2

Für welche natürlichen Zahlen n sind sowohl 2^n+1 als auch $2^{n+1}+1$ Primzahlen?

Zeige, dass für alle anderen natürlichen Zahlen n mindestens eine der beiden Zahlen 2^n+1 oder $2^{n+1}+1$ keine Primzahl ist.

Lösung

Die Zahlen 2^n+1 und $2^{n+1}+1$ sind zwei aufeinander folgende Zahlen der Form $a_k=2^k+1$. Betrachtet man diese Zahlenfolge für kleine natürliche Zahlen k, so erhält man folgende Tabelle

k	1	2	3	4	5	6	7
2^k+1	3	5	$9=3\cdot3$	17	$33=3\cdot11$	$65=5\cdot13$	$129=3\cdot43$

In dieser Tabelle findet man nur die Zahlen 3 und 5 als aufeinander folgendes Paar von Primzahlen. Dieses Zahlenpaar erhält man für n = 1.

Es soll nun gezeigt werden, dass es keine weiteren natürlichen Zahlen n gibt, für die die Terme 2^n+1 und $2^{n+1}+1$ gleichzeitig Primzahlen ergeben.

1. Lösung

Es wird gezeigt, dass von den beiden Zahlen 2^n+1 und $2^{n+1}+1$ stets eine der beiden durch 3 teilbar ist.

Keine Zweierpotenz 2^k ist durch 3 teilbar. Es gilt also $2^k\equiv1 \bmod 3$ oder $2^k\equiv2 \bmod 3$.

Im ersten Fall gilt $2^{k+1}\equiv2^k\cdot2\equiv1\cdot2 \bmod 3$, also $2^{k+1}+1\equiv0 \bmod 3$, woraus die Teilbarkeit durch 3 folgt.

Im zweiten Fall gilt $2^k+1\equiv0 \bmod 3$. In diesem Fall ist also 2^k+1 durch 3 teilbar.

2. Lösung

Es wird gezeigt, dass von den beiden Zahlen 2^n+1 und $2^{n+1}+1$ stets eine der beiden durch 3 teilbar ist. Dazu betrachtet man die drei aufeinander folgenden Zahlen 2^n, 2^n+1 und 2^n+2. Es wird n > 2 vorausgesetzt.

Von drei aufeinander folgenden Zahlen ist genau eine durch 3 teilbar. Da eine Zweierpotenz nicht durch 3 teilbar ist, muss entweder 2^n+1 oder 2^n+2 durch 3 teilbar sein. Im ersten Fall sind wir fertig.

Ist 2^n+1 nicht durch 3 teilbar, so betrachtet man das Doppelte dieser Zahl. Dieses Doppelte ist auch nicht durch 3 teilbar, denn wenn 2^n+1 keinen Primfaktor 3 enthält, so kann dies auch nicht für $2\cdot\left(2^n+1\right)=2^{n+1}+2$ zutreffen.

Betrachtet man die drei aufeinander folgenden Zahlen 2^{n+1}, $2^{n+1}+1$ und $2^{n+1}+2$, so ist wiederum eine von ihnen durch 3 teilbar. Da dies für die Zweierpotenz 2^{n+1} und für $2^{n+1}+2$ nicht zutrifft, muss $2^{n+1}+1$ durch 3 teilbar sein.

Da n > 2 vorausgesetzt wurde, kann $2^{n+1}+1$ nicht selbst 3 sein und besitzt deshalb die Zahl 3 als echten Teiler. Dies bedeutet, wenn 2^n+1 nicht durch 3 teilbar ist, dann ist $2^{n+1}+1$ durch 3 teilbar.

3. Lösung

Es wird gezeigt, dass $2^k + 1$ keine Primzahl ist, wenn k eine ungerade Zahl ist.

Es sei also k = 2m + 1, dann gilt

$$2^{2m+1} + 1 = 2 \cdot 2^{2m} + 1 = 2 \cdot 2^{2m} - 2 + 3 = 2 \cdot \left(2^{2m} - 1\right) + 3 = 2 \cdot \left(2^m - 1\right) \cdot \left(2^m + 1\right) + 3$$

Jede Zweierpotenz 2^m ergibt bei Division durch 3 den Rest 1 oder den Rest 2 (siehe erste Lösung). Deshalb ist entweder $2^m - 1$ oder $2^m + 1$ durch 3 teilbar. Damit ist aber auch der gesamte Term $2 \cdot \left(2^m - 1\right) \cdot \left(2^m + 1\right) + 3$ durch 3 teilbar.

4. Lösung

Es wird gezeigt, dass aus der Teilbarkeit von $2^k + 1$ durch 3 die Teilbarkeit von $2^{k+2} + 1$ durch 3 folgt. Da das erste Folgeglied $2^1 + 1 = 3$ durch 3 teilbar ist, folgt dann, dass auch das dritte, fünfte, siebte,... Folgeglied ebenfalls durch 3 teilbar ist. Damit kann es außer 3 und 5 kein weiteres Paar aufeinander folgender Primzahlen geben.

Es sei $2^k + 1 = 3 \cdot m$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Durch Umformung erhält man aus $2^{k+2} + 1$:

$$2^{k+2} + 1 = 2^k \cdot 2^2 + 1 = 4 \cdot 2^k + 1 = 4 \cdot 2^k + 4 - 3 = 4 \cdot \left(2^k + 1\right) - 3 = 4 \cdot m - 3.$$

Da m durch 3 teilbar ist, gilt dies auch für $4 \cdot m$ und für $4 \cdot m - 3$.

Aufgabe 3

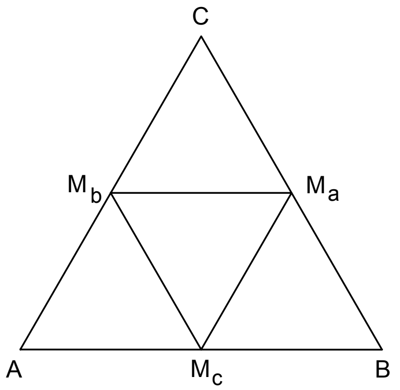
Eine natürliche Zahl $n > 1$ heißt *schneidig*, wenn sich ein gleichseitiges Dreieck in n (nicht notwendig gleich große) gleichseitige Dreiecke zerschneiden lässt.

Gib alle schneidigen Zahlen an und weise für sie diese Eigenschaft nach.

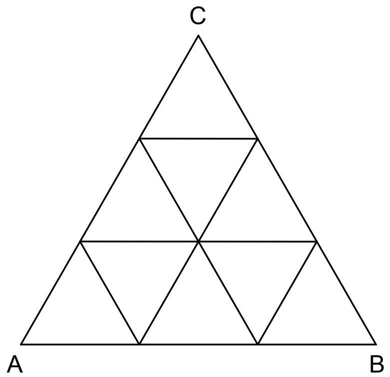
(Ein Nachweis, dass die anderen Zahlen nicht *schneidig* sind, wird nicht verlangt.)

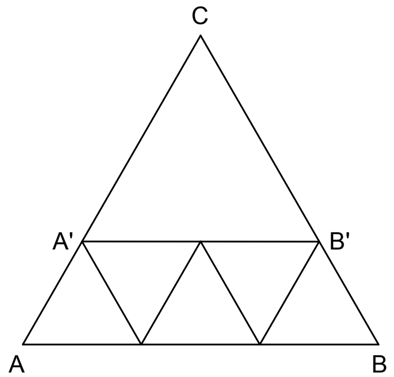
1. Lösung

Aus dem Unterricht kann als bekannt vorausgesetzt werden, dass das Mittendreieck eines gleichseitigen Dreiecks ABC eine Zerlegung dieses Dreiecks in vier kongruente gleichseitige Teildreiecke erzeugt. Da jedes dieser Teildreiecke nun wieder durch sein Mittendreieck in vier gleichseitige Dreiecke zerlegt werden kann und die Dreiecke nicht gleich groß sein müssen, kann man aus jeder Zerlegung in k gleichseitige Dreiecke eine Zerlegung in $k + 3$ gleichseitige Dreiecke erhalten.

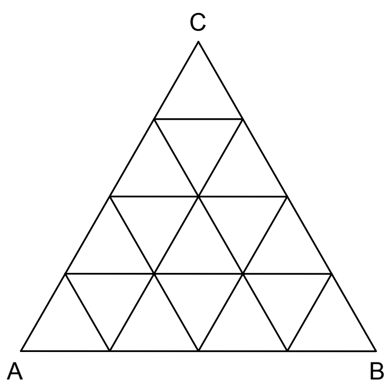


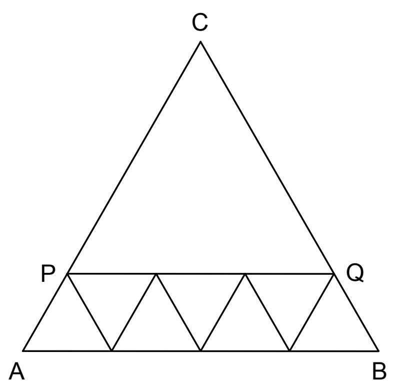
In der folgenden Figur ist jede der Dreiecksseiten in drei kongruente Strecken zerlegt. Die Verbindungsstrecken der entsprechenden Teilpunkte sind jeweils parallel zu einer Grundseite. Alle auftretenden Winkel sind Stufenwinkel zu den Innenwinkeln des Dreiecks ABC und damit 60°-Winkel. Alle Teildreiecke sind also gleichseitig. Fasst man die oberen vier Teildreiecke zu einem größeren Dreieck A'B'C zusammen, so ist dieses ebenfalls gleichseitig. Das vorgegebene Dreieck ist dann in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegt.





Teilt man entsprechend jede Dreiecksseite in vier gleich lange Teilstrecken und verbindet die Teilpunkte wie im folgenden Bild, so erhält man eine Zerlegung des Dreiecks ABC in 16 kongruente gleichseitige Dreiecke. Fasst man die oberen neun Teildreiecke zu einem größeren Dreieck PQC zusammen, so ist dieses größere Dreieck wieder gleichseitig. Das Dreieck ABC ist dann in acht gleichseitige Dreiecke zerlegt.





Zwischenergebnis:

Bisher wurde gezeigt, dass sich ein gleichseitiges Dreieck ABC in vier, sechs und acht gleichseitige Dreiecke zerlegen lässt und dass aus jeder Zerlegung mit k gleichseitigen Dreiecken eine Zerlegung mit k + 3 Dreiecken erzeugt werden kann. Die *schneidigen* Zahlen n ergeben sich aus der Vereinigung der Folgen

4 7 10 13 16 19

6 9 12 15 18

8 11 14 17

Folgerung:

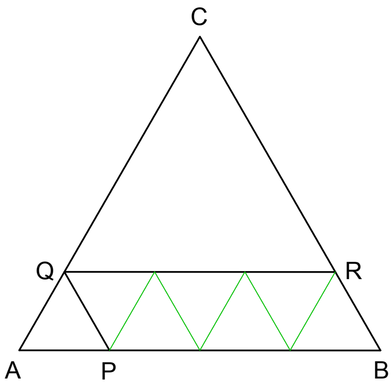
Dies bedeutet, dass es nach n = 4 für jede natürliche Zahl n größer oder gleich sechs eine Zerlegung des gleichseitigen Dreiecks ABC in n gleichseitige Dreiecke gibt.

2. Lösung

Gegeben ist das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge a. Die Punkte P und Q seien auf AB bzw. AC so gewählt, dass

$$|AP| = |AQ| = \frac{a}{n},\ n \in \mathbb{N} \text{ und } n > 1 \text{ gilt.}$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt dies für n = 4.



Das Dreieck PQA ist nach Voraussetzung gleichschenklig mit einem 60°-Winkel bei A. Es ist demnach gleichseitig. Außerdem ist die Strecke PQ parallel zur Strecke BC, da beide mit den Seiten AB und AC einen 60°-Winkel einschließen.

Zeichnet man die Parallele zu AB durch Q, so entsteht das Parallelogramm PBRQ mit den Seitenlängen $\frac{a}{n}$ und $(n-1)\cdot\frac{a}{n}$ (siehe Zeichnung).

Dieses Parallelogramm wird durch die Verbindung der Teilpunkte der Seiten PB und QR in $2\cdot(n-1)$ gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $\frac{a}{n}$ zerlegt. Das Dreieck QRC ist ebenfalls gleichseitig, da alle drei Seiten die Länge $\frac{n-1}{n}\cdot a$ besitzen.

Das gleichseitige Dreieck ABC ist also in $1+2\cdot(n-1)+1=2n$ gleichseitige Dreiecke zerlegt. Daraus folgt, dass für alle natürlichen Zahlen n > 1 eine Zerlegung in 2n gleichseitige Dreiecke möglich ist. Dies bedeutet, dass alle geraden Zahlen größer oder gleich vier *schneidig* sind.

Da sich insbesondere jedes Dreieck durch sein Mittendreieck in vier gleichseitige Dreiecke zerlegen lässt, kann man zu jeder Zerlegung in k gleichseitige Dreieck eine Zerlegung in k + 3 gleichseitige Dreiecke erzeugen. Deshalb sind auch alle natürlichen Zahlen *schneidig,* die aus den geraden Zahlen 4, 6, 8,.... durch Addition von 3 erreicht werden können. Damit sind auch alle ungeraden Zahlen größer oder gleich 7 *schneidig.*

Zusammenfassung:

Die Zahl 4 und alle natürlichen Zahlen größer oder gleich 6 sind *schneidig.*

Aufgabe 4

Bestimme alle Zahlenpaare (x/y) mit $x, y \in \mathbb{Z}$, die Lösung von $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ sind.

1 Lösung

Da die Summe der Kehrwerte von x und y positiv sein soll, muss zumindest eine der beiden Zahlen positiv sein. Da in der Aufgabenstellung die Bezeichnung der Variablen vertauscht werden kann, kann man zunächst ohne Einschränkung x > 0 voraussetzen. Durch Umformung erhält man aus der gegebenen Bedingung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{x-2}{2x}$.

Bildet man den Kehrwert, so ergibt sich die Forderung $y = \frac{2x}{x-2}$.

Durch Einsetzen von positiven ganzen Zahlen für x erhält man die folgende Tabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = \frac{2x}{x-2}$	-2	—	6	4	$\frac{10}{3}$	3	$\frac{14}{5}$	$\frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

Zwischenergebnisse:

Aus dieser Tabelle erhält man die Lösungspaare (1/ – 2); (3/6) und (4/4). Wegen der Vertauschbarkeit von x und y kommen noch die Lösungspaare (– 2/1) und (6/3) hinzu. Setzt man für x immer größere Werte ein, so liegen alle Werte für y zwischen 2 und 3. Wenn diese Beobachtung bewiesen werden könnte, so würde dies bedeuten, dass y keine ganze Zahl annehmen kann, wenn man für x eine ganze Zahl größer als 6 einsetzt. Die oben angegebenen fünf Zahlenpaare wären dann alle Lösungen. Dieser Nachweis wird in zwei Schritten erbracht, wobei x > 6 vorausgesetzt wird.

$\frac{2x}{x-2} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 2x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > -4$ wahre Aussage

$\frac{2x}{x-2} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 3x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6 < x$ wahre Aussage

2. Lösung

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner und Auflösen nach x erhält man:

$$
\begin{aligned}
2y + 2x &= xy \\
2y &= x \cdot (y-2) \\
x &= \frac{2y}{y-2} \\
x &= \frac{2 \cdot (y-2) + 4}{y-2} \\
x &= 2 + \frac{4}{y-2}.
\end{aligned}
$$

Für y ist eine ganze Zahl so zu bestimmen, dass auch x eine ganze Zahl ist. Dies ist nur möglich, wenn $y - 2$ ein Teiler von 4 ist.

Aus $y-2 \in \{-4,-2,-1,1,2,4\}$ folgt $y \in \{-2,0,1,3,4,6\}$ als notwendige Bedingung. Die Zahlen y = 0 bzw. y = 2 entfallen, da sonst Nenner von Brüchen 0 werden. Zu jedem anderen y-Wert aus der obigen Menge erhält man eine zulässige Lösung für x. Die Lösungspaare lauten (–2/1); (1/ –2); (3/6); (6/3) und (4/4).

3. Lösung

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner und anschließenden Umformungen erhält man:

$$2y+2x = xy$$
$$0 = xy-2x-2y$$
$$0 = x\cdot(y-2)-2y$$
$$0 = x\cdot(y-2)-2y+4-4$$
$$4 = x\cdot(y-2)-2\cdot(y-2)$$
$$4 = (x-2)\cdot(y-2).$$

Sind x und y ganze Zahlen, so sind auch x – 2 und y – 2 ganze Zahlen.

Das Produkt aus x – 2 und y – 2 kann nur dann den Wert 4 besitzen, wenn keiner der beiden Terme einen Wert annimmt, dessen Betrag größer als 4 ist. Somit gilt sowohl für x – 2 als auch für y – 2 die Bedingung

$$-4 \le x-2 \le 4 \quad \text{und} \quad -4 \le y-2 \le 4$$
$$-2 \le x \le 6 \quad \text{und} \quad -2 \le y \le 6$$

Da die Anzahl der ganzen Zahlen, die diese Bedingungen erfüllen, begrenzt ist, kann man die Lösungen nun durch Probieren ermitteln. Man erhält die bereits in der ersten Lösung genannten Zahlenpaare.

Aufgabe 5

Ausgehend von zwei beliebigen Startzahlen a_1 und a_2 werden nach folgender Vorschrift weitere Zahlen gebildet.

$$a_3 = a_2 - a_1;\ a_4 = a_3 - a_2;\ a_5 = a_4 - a_3 \text{ usw.}$$

Berechne die Summe der ersten 1992 Zahlen.

Vorüberlegungen

Wählt man sich zunächst einmal für a_1 und a_2 konkrete Zahlwerte und bildet nach der vorgegebenen Vorschrift die Zahlenfolge $a_3, a_4, a_5, \ldots$, so stellt man schnell fest, dass sich die gewählten Zahlwerte periodisch wiederholen und die Summe von jeweils sechs aufeinander folgenden Zahlen jeweils null wird.

Diese Eigenschaften werden nun allgemein nachgewiesen.

1. Lösung

Bestimmt man die Folgeglieder nach der vorgegebenen Bildungsvorschrift, so entsteht die nachfolgende Tabelle.

$$a_1$$

$$a_2$$

$$a_3 = a_2 - a_1$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 - a_2 = -a_1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -a_1 - (a_2 - a_1) = -a_2$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -a_2 + a_1$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = a_1 - a_2 + a_2 = a_1$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = a_1 - (a_1 - a_2) = a_2$$

Da jede Zahl a_{n+2} aus der Folge durch die Vorschrift $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ durch ihre beiden Vorgänger eindeutig bestimmt ist, wiederholen sich die Zahlen unabhängig von der Wahl der Startzahlen a_1 und a_2 nach jeweils sechs Werten periodisch. Addiert man die Zahlen einer Periode, so erhält man wegen

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = a_1 + a_2 + a_2 - a_1 - a_1 + a_2 + a_1 - a_2 = 0$$

stets den Wert 0.

Da 1992 $(= 332 \cdot 6)$ ein Vielfaches von 6 ist, lässt sich die Summe der ersten 1992 Zahlen der beschriebenen Folge in 332 Teilsummen zerlegen, die jeweils den Wert 0 haben. Die Gesamtsumme aller 1992 Zahlen hat deshalb ebenfalls den Wert 0.

2. Lösung

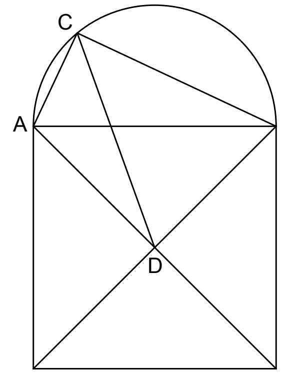
Bestimmt man die Summe von sechs beliebigen aufeinander folgenden Zahlen dieser Folge, so erhält man

$$\begin{aligned} S &= a_{n+5} + a_{n+4} + a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \\ &= a_{n+4} - a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \\ &= 2a_{n+4} + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \\ &= 2a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \\ &= 2a_{n+2} - 2a_{n+1} - 2a_{n+2} + a_{n+1} - a_n + a_{n+1} + a_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jede Teilsumme von sechs aufeinander folgenden Zahlen nimmt stets den Wert 0 an. Da die Gesamtsumme aus 1992 Zahlen in 332 Teilsummen von jeweils sechs aufeinander folgenden Zahlen zerlegt werden kann und jede dieser Teilsummen den Wert null besitzt, hat auch die Gesamtsumme den Wert null.

Hinweis: Da der Summenwert einer Teilfolge von sechs aufeinander folgenden Zahlen, die nach der angegebenen Vorschrift bestimmt wurden, unabhängig von den Startzahlen jeweils null ist, muss bei der zweiten Lösung nicht nachgewiesen werden, dass sich die Folgeglieder mit der Periode sechs wiederholen.

Aufgabe 6



Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit y = 90° und über der Hypotenuse das Quadrat nach außen. Das Quadrat hat den Diagonalenschnittpunkt D.

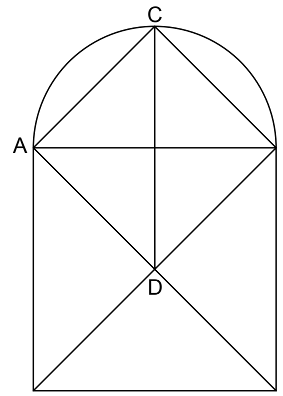
Bei welchen rechtwinkligen Dreiecken ist die Strecke CD so lang wie eine Seite des Dreiecks ABC?

Vorüberlegungen

Da sich die Diagonalen des Quadrats in D schneiden, sind die Strecken AD und BD orthogonal zueinander. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegen die Punkte C und D auf einem Kreis mit der Strecke AB als Durchmesser. Das Dreieck ADB ist nach Voraussetzung gleichschenklig rechtwinklig.

Die Lage des Dreiecks über der Hypotenuse AB ist unabhängig von der Lage des Punktes C.

Gemeinsamer Lösungsteil



Zeichnet man das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck über der Seite AB und verbindet D mit C, so sind die Strecken AB und CD gleich lang, wie nachfolgend gezeigt wird. Die Dreiecke ADB und ABC sind jeweils gleichschenklig rechtwinklig und ergänzen sich zu einem Quadrat. Da in einem Quadrat die Diagonalen gleich lang sind, gilt |AB| = |CD|.

Es muss nun untersucht werden, ob es noch weitere Dreiecke mit der geforderten Eigenschaft gibt und durch welche Eigenschaften diese Dreiecke bestimmt sind.

Zunächst muss geklärt werden, ob es eine weitere Möglichkeit für die Lage des Punktes C* gibt, bei der |AB| = |C*D| gilt.

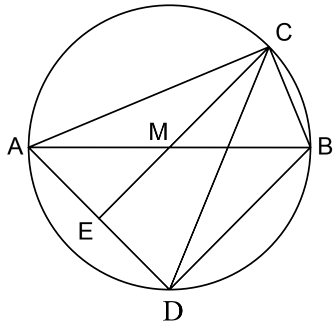
Die Punkte A, D, B und C* liegen nach den Vorbemerkungen auf einem Kreis mit dem Durchmesser AB. Da die Strecke C*D die gleiche Länge haben soll, muss der Mittelpunkt M des Umkreises auf dieser Strecke liegen. Da nach Voraussetzung das Dreieck ADB außerdem gleichschenklig rechtwinklig ist, stehen die Strecken AB und MD orthogonal aufeinander. Der Punkt C ist dann der Schnittpunkt der Geraden (MD) mit dem Thaleskreis über AB. Damit fallen die Punkte C und C* zusammen.

Weiter ist zu beachten, dass die Länge der Strecke CD mit den Streckenlängen AC bzw. BC übereinstimmen kann. Aus Symmetriegründen genügt es, einen der beiden Fälle zu betrachten.

1. Lösung

Die Längen der Strecken AC und CD stimmen genau dann überein, wenn das Dreieck ADC gleichschenklig ist. Um die Lage des Punktes C zu bestimmen, errichtet man die Mittelsenkrechte der Strecke AD. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit dem Thaleskreis ist einer der gesuchten Punkte.

Bestimmung der Innenwinkel des Dreiecks ABC



Da AD eine Sehne des Umkreises von ADBC ist, geht die Mittelsenkrecht von AD durch den Umkreismittelpunkt M. Die Strecken EC und DB sind beide orthogonal zu AD und damit parallel zueinander.

Die Winkel $\measuredangle$BMC und $\measuredangle$MBD sind als Wechselwinkel gleich groß.

Da ADB ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist, gilt:

w(BMC) = w(MBD) = 45°.

Das Dreieck AMC ist gleichschenklig mit

w(CMA) =180° – 45° = 135°.

Die Basiswinkel dieses Dreiecks haben die Größe

$$w(MAC) = w(ACM) = \frac{1}{2} \cdot \left(180° - 135°\right) = 22{,}5°.$$

Aus dem vorgegebenen Winkel bei C und der Winkelsumme im Dreieck ergeben sich daraus die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABC zu 22,5°, 67,5° und 90°. Entsprechend erhält man den Punkt C als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BD mit dem Thaleskreis, wenn die Streckenlängen BC und DC übereinstimmen sollen.

2. Lösung

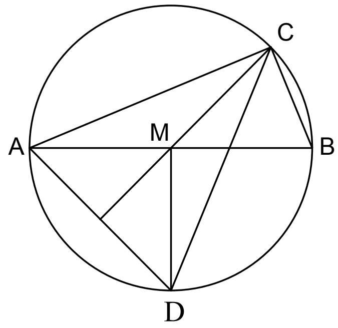
Es sei ADC ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln AC und DC. Nach dem Randwinkelsatz ist die Größe des Winkels $\measuredangle$ (ACD) unabhängig von der Lage des Punktes C auf dem Halbkreis über AB stets halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel AMD. Da MD orthogonal zu AB ist, gilt

$$w(ACD) = 45°.$$

Die Mittelsenkrechte der Basis AD ist die Symmetrieachse des Dreiecks ADC und halbiert deshalb den Winkel bei C. Der Winkel MCA hat deshalb die Größe 22,5°. Da diese Mittelsenkrechte die Strecke AB im Kreismittelpunkt M schneidet (siehe 1. Lösung), ist das Dreieck AMC gleichschenklig und es gilt:

$$w(MAC) = w(ACM) = 22{,}5°.$$

Wie bei der ersten Lösung folgert man dann die Innenwinkel im Dreieck ABC.



Lösungsvariante

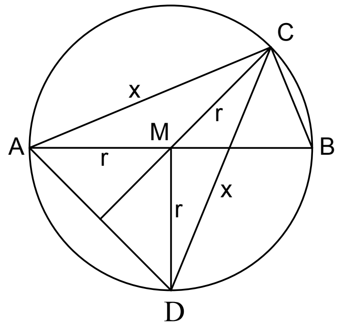
Ist die Größe 22,5° des Winkels $\measuredangle$ACM oder die des Winkels DMC mit 135° bestimmt, so kann man mit Hilfe des Kosinussatzes die Länge der Strecken AC und BC des Dreiecks ABC z.B. in Abhängigkeit vom Radius des Umkreises bestimmen.

Nach dem Kosinussatz gilt $x^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos 135°$,

woraus $x = r \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ folgt.

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhält man dann

$$|BC| = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ .$$



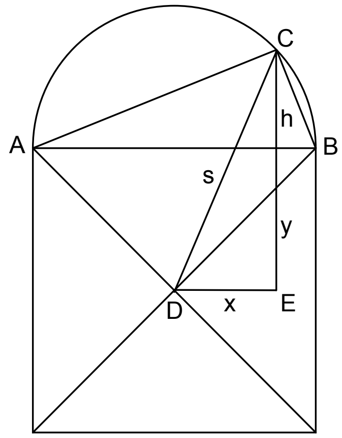
3. Lösung

Im rechtwinkligen Dreieck ABC gelten neben den in der Zeichnung angegebenen Benennungen die üblichen Bezeichnungen für die Katheten und die Hypotenusenabschnitte.

Die Strecke EC sei orthogonal, die Strecke DE parallel zu AB. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck DEC. Da D der Diagonalenschnittpunkt des Quadrats mit der Seitenlänge c ist, gilt für x und y die Beziehung

$$x = \frac{1}{2}c - p \text{ und } y = \frac{1}{2}c.$$

Außerdem gilt $h^2 = a^2 - p^2$, d.h. $h = \sqrt{a^2 - p^2}$, und nach dem Kathetensatz $a^2 = p \cdot c$.



Unter Verwendung dieser Eigenschaften folgt im Dreieck DEC nach dem Satz von Pythagoras daraus für die Länge s der Strecke DC:

$$s=\sqrt{x^2+\left(y+h\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}c^2-a^2+p^2+\frac{1}{4}c^2+c\cdot\sqrt{a^2-\frac{a^4}{c^2}}+a^2-p^2}=\sqrt{\frac{1}{2}c^2+a\sqrt{c^2-a^2}}$$

Diese Streckenlänge s kann nun mit der Hypotenusenlänge c oder einer Kathetenlänge des Dreiecks ABC übereinstimmen. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass s mit a übereinstimmt. Durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten von AB erhält man dann eine weitere Lösung mit s = b.

Bei den nachfolgenden Umformungen wird vorausgesetzt, dass alle Variablen Streckenlängen darstellen und damit positiv sind.

Aus den Bedingungen $c=\sqrt{\frac{1}{2}c^2+a\sqrt{c^2-a^2}}$ und $a=\sqrt{\frac{1}{2}c^2+a\sqrt{c^2-a^2}}$ sowie durch Umformungen erhält man daraus:

$$c^2=\frac{1}{2}c^2+a\sqrt{c^2-a^2}$$

$$\frac{1}{2}c^2=a\sqrt{c^2-a^2}$$

$$\frac{c^4}{4a^2}=c^2-a^2$$

$$c^4-4a^2c^2+4a^2=0$$

$$\left(c^2-2a^2\right)=0$$

$$a^2=\frac{1}{2}c^2$$

$$a=\frac{1}{2}c\sqrt{2}$$

$$a^2=\frac{1}{2}c^2+a\sqrt{c^2-a^2}$$

$$a^2-\frac{1}{2}c^2=a\sqrt{c^2-a^2}$$

$$a-\frac{c^2}{2a}=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$a^2-c^2+\frac{c^4}{4a^2}=c^2-a^2$$

$$8a^4-8a^2c^2+c^4=0$$

Durch Substitution und unter Berücksichtigung von $0<a<c$ erhält man daraus:

$$a=\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad\vee\quad a=\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

Aus diesen Ergebnissen erhält man mit Hilfe von $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ für α in der Reihenfolge der oben angegebenen Lösungen die Winkelmaße 45°, 67,2° und 22,5°.