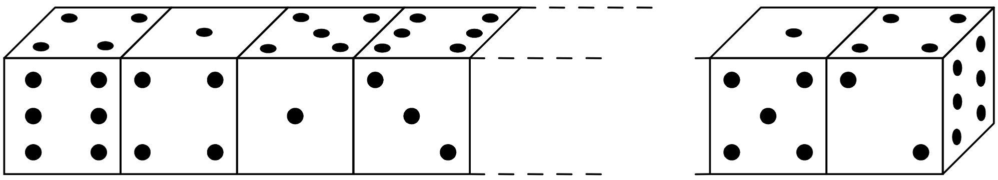
1991

Runde 2

Aufgabe 1

Es werden n gewöhnliche Spielwürfel nebeneinander auf den Tisch gelegt (siehe Bild).



Man addiert alle Augenzahlen, die nicht durch den Tisch oder durch einen Nachbarwürfel verdeckt sind.

Die maximale Augenzahl, die man so erhalten kann, werde mit A(n), die minimale mit a(n) bezeichnet. Die Differenz $d(n) = A(n) - a(n)$ ist für gewisse n eine Quadratzahl (z.B. für n = 2, n = 6).

Für welche Würfelanzahl n erhält man die 1000. Quadratzahl in dieser Folge?

1. Lösung

Die Augensumme eines Würfels beträgt 21. Dabei ergänzen sich die Augenzahlen auf zwei gegenüberliegenden Seiten jeweils zum Wert 7.

Besteht die "Reihe" nur aus einem einzigen Würfel, so ist A(l) = 20 und a(l) =15. Die Differenz ist keine Quadratzahl. Deshalb kann dieser Sonderfall unberücksichtigt bleiben.

Es sei nun n > 1.

Mit Ausnahme des ersten und letzten Würfels werden von jedem Würfel durch seinen rechten und linken Nachbarn jeweils sieben Augen verdeckt. Versucht man die größte Augenzahl A(n) zu erhalten, so legt man jeden Würfel mit der Augenzahl 1 nach unten auf den Tisch und die beiden äußeren Würfel der Reihe so, dass die Augenzahl 5 nach außen weist. In dieser Lage sind von den beiden äußeren Würfeln jeweils 18 Augen sichtbar. Von den (n – 2) inneren Würfeln sind jeweils 13 Augen (= 21 – 7 – 1) zu sehen. Die größte Augensumme ist demnach:

$$A(n) = 13 \cdot (n-2) + 36$$

$$A(n) = 13n + 10.$$

Die kleinste Augenzahl a(n) erhält man entsprechend, wenn man bei den (n – 2) inneren Würfeln die Augenzahl 6 auf den Tisch legt und bei den beiden äußeren Würfeln jeweils die Augenzahl 2 nach außen weist. Von jedem inneren Würfel sind in der angegebenen Lage jeweils 8 Augen und von den beiden äußeren Würfeln jeweils 10 Augen sichtbar. Die kleinste Augensumme ist also:

$$a(n) = 8 \cdot (n-2) + 20$$

$$a(n) = 8n + 4.$$

Bildet man die Differenz d (n) dieser beiden Terme, so erhält man d(n)= 5n + 6.

Ersetzt man in diesem Term die Variable n durch eine natürliche Zahl, so entsteht stets eine Zahl mit der Einerziffer 1 oder 6. Andererseits sind alle Zahlen größer oder gleich 16 mit diesen Einerziffern darstellbar. Quadratzahlen mit der Einerziffer 1 oder 6 besitzen eine Basis mit den Einerziffern 1, 4, 6 oder 9.

Wegen der Einschränkung n > 1 beginnt die Teilfolge der Quadratzahlen mit 16, 36, 81, 121, 196,... . Das Problem, die tausendste Quadratzahl in der Folge d(n) zu bestimmen, ist somit auf die Aufgabe zurückgeführt, in dieser Folge die tausendste Zahl zu bestimmen. Dies wird einfacher, wenn man die Folge der zugehörigen Basen 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, 21,... betrachtet.

Jede vierte Zahl hat die Form 10m+ 1, die tausendste Zahl die Form 10 • 250+1. Zu dieser Zahl 2501 gehört die Quadratzahl d(n) =6255001. Die Anzahl n der Würfel beträgt dann 1250999.

2. Lösung

Aus der Forderung, dass 5n + 6 das Quadrat einer natürlichen Zahl k sein soll, erhält man durch Umformung die Bedingung

$$5n+6=k^2 \;\Leftrightarrow n=\frac{k^2-6}{5} \;\Leftrightarrow n=\frac{k^2-1}{5}-1 \;\Leftrightarrow n=\frac{(k-1)\cdot(k+1)}{5}-1.$$

Aus der Forderung n > 1 folgt k > 1. Der Bruch $\frac{(k-1)\cdot(k+1)}{5}$ ergibt genau dann eine ganze Zahl, wenn k + 1 oder k – 1 durch 5 teilbar ist.

Aus $k-1=5\cdot m$ bzw. $k+1=5\cdot m$

folgt $k=5\cdot m+1$ bzw. $k=5\cdot m-1$.

Durchläuft m die natürlichen Zahlen größer oder gleich 1, so erhält man abwechselnd aus 5m – 1 bzw. 5m + 1 die Zahlenfolge 4, 6, 9, 11, ...usw.

Jede dieser Zahlen ist eine zulässige natürliche Zahl k. Die tausendste Zahl in dieser Folge ergibt sich durch Einsetzen von m = 500 in den Term 5m + 1. Die weitere Lösung stimmt mit der oben angegebenen überein.

Aufgabe 2

In jedem spitzwinkligen Dreieck ABC kann man einen Punkt P so konstruieren, dass die Bildpunkte von P bei Spiegelung an den drei Dreieckseiten ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Stelle die Winkel $\angle APB$, $\angle BPC$ und $\angle CPA$ in Abhängigkeit von den Innenwinkeln des Dreiecks ABC dar.

Beschreibe eine Konstruktion des Punktes P.

1. Lösung

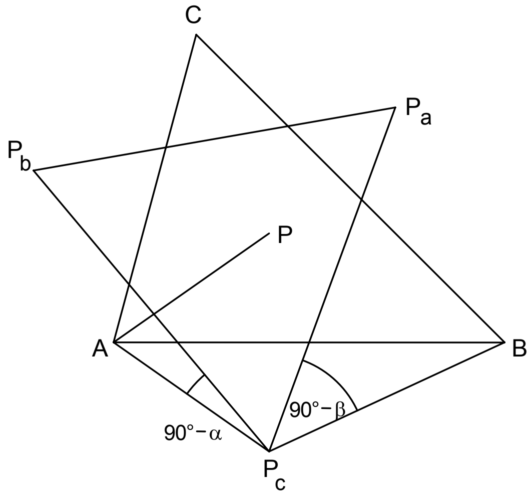
a) Für die folgende Lösung wird vorausgesetzt, dass der Punkt P im Inneren des Dreiecks ABC so gewählt sei, dass die Bildpunkte P_a, P_b und P_c von P bei der Spiegelung an den Dreieckseiten ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle P_cAB = \measuredangle BAP \\ \measuredangle PAC = \measuredangle CAP_b\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle P_cAP_b = 2\alpha$$

$|AP_C| = |AP|$ und $|AP| = |AP_b|$.

Das Dreieck AP_cP_b ist gleichschenklig mit den Basiswinkeln $90° - \alpha$.



Entsprechend zeigt man, dass das Dreieck P_cBP_a gleichschenklig ist mit der Basis P_CP und den Basiswinkeln $90° - \beta$.

Aus der Gleichseitigkeit des Dreiecks $P_aP_bP_c$ erhält man weiter:

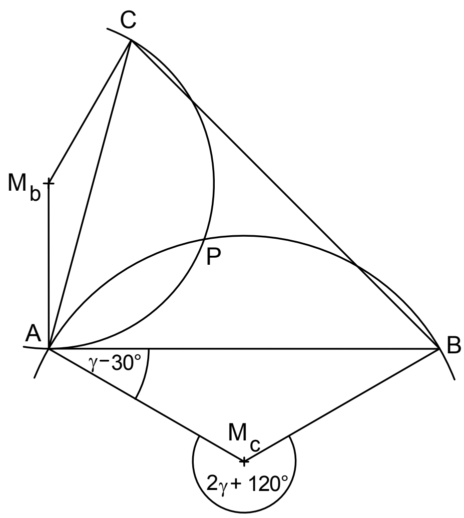
$$w(BP_cA) = 90° - \beta + 60° + 90° - \alpha = 180° - \beta - \alpha + 60° = \gamma + 60°.$$

Wegen der Spiegelung gilt dann auch $w(APB) = \gamma + 60°$. Entsprechend zeigt man $w(BPC) = \alpha + 60°$ und $w(CPA) = \beta + 60°$.

b) Nach den Ergebnissen der Teilaufgabe a) ist der Punkt P so zu bestimmen, dass die Strecken AB, BC und CA von P aus unter dem Winkel $\gamma + 60°$, $\alpha + 60°$ bzw. $\beta + 60°$ erscheinen.

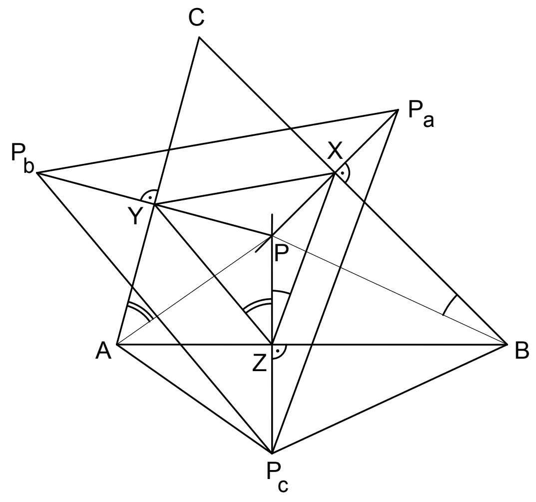
Alle Punkte, von denen aus eine Strecke AB unter einem vorgegebenen Winkel, z.B. $\gamma + 60°$, erscheint, liegen nach dem Randwinkelsatz auf einem Kreisbogen über der Sehne AB. Der Mittelpunktswinkel $\measuredangle AM_cB$ ist doppelt so groß wie der vorgegebene, also $2\gamma + 120°$.

Zeichnet man über den Dreieckseiten AB und BC die Kreise mit den Mittelpunktswinkeln $2\gamma + 120°$ bzw. $2\alpha + 120°$, so erhält man den Punkt P als denjenigen Schnittpunkt der beiden Kreise, der im Inneren des Dreiecks liegt. Der dritte Winkel bei P besitzt wegen der Winkelsumme von 360° die geforderte Größe von $\beta + 60°$.



2. Lösung

Wieder sei $P_aP_bP_c$ das gesuchte gleichseitige Dreieck. Verbindet man P mit den Eckpunkten dieses Dreiecks, so schneiden diese Verbindungsstrecken die Dreieckseiten AB, BC und CA in den Punkten Z, X und Y. Da P_a,P_b und P_c die Bildpunkte von P bei der Spiegelung an den Dreieckseiten sind, halbieren die Schnittpunkte die Verbindungsstrecken. Durch eine zentrische Streckung mit Zentrum P und Streckfaktor 0,5 wird das Dreieck $P_aP_bP_c$ auf das Dreieck XYZ abgebildet.



Da bei einer zentrischen Streckung die Winkelmaße erhalten bleiben, ist auch das Dreieck XYZ gleichseitig. Jedes der Vierecke AZPY, BXPZ und CYPX besitzt bei X, Y bzw. Z zwei rechte Winkel. Diese Vierecke sind deshalb Sehnenvierecke mit den Durchmessern AP, BP bzw. CP. Nach dem Randwinkelsatz gilt z.B. w(PAC) = w(PAY) = w(PZY).

Entsprechend gilt w(CBP) = w(XBP) = w(XZP).

Da das Dreieck XYZ gleichseitig ist, folgt daraus w(PAC) + w(CBP) = 60°.

Wegen der Winkelsumme von 360° im Viereck APBC gilt:

w(BPA) = 360° – (w(PAC) + w(CBP) – γ = 360° – 60° – γ.

Daraus folgt für den Ergänzungswinkel:

w(APB) = 360° – w(BPA) = γ + 60°.

Entsprechend zeigt man für die übrigen Winkel w(BPC) = α + 60° und w(CPA) = β + 60°.

Die Konstruktion des Punktes P erfolgt wie bei der ersten Lösung.

Aufgabe 3

Welche der Zahlen 101, 10101, 1010101, 101010101,... sind Primzahlen?

Vorbemerkung

Es soll gezeigt werden, dass in der angegebenen Zahlenfolge nur die Zahl 101 eine Primzahl ist. Die Primzahleigenschaft von 101 wird als bekannt vorausgesetzt. In den beiden folgenden Lösungen wird nachgewiesen, dass die Zahl z =1010101...101 mit mehr als zwei Ziffern 1 keine Primzahl sein kann.

1. Lösung

Sucht man nach Zerlegungen der Zahlen 101, 10101, 1010101,.... für kleine Stellenzahlen, so erhält man:

101 ist Primzahl

$$\begin{aligned} 10101 &= 111\cdot 91 \\ 1010101 &= 101\cdot 10001 \\ 101010101 &= 11111\cdot 9091 \\ 10101010101 &= 101\cdot 100010001. \end{aligned}$$

Aus diesen Beispielen kann man die Vermutungen ableiten, dass die gegebenen Zahlen durch 101 teilbar sind, wenn die Anzahl der Ziffern 1 gerade ist, und durch eine Zahl aus lauter Einsern teilbar sind, wenn die Anzahl der Ziffern 1 ungerade ist. Zum Nachweis dieser Vermutungen werden die beiden Fälle unterschieden.

<u>Fall I</u>   (Die Anzahl der Ziffern 1 ist gerade.)

Jede Zahl der Form z = 101010...101 mit einer geraden Anzahl von Ziffern 1 kann man als Summe der Form $101+101\cdot 10^4+101\cdot 10^8+\ldots+101\cdot 10^{4m}$ schreiben. Daraus ergibt sich unmittelbar die Teilbarkeit durch 101, da jeder Summand durch 101 teilbar ist. Lediglich die erste Zahl 101 ist eine Primzahl.

<u>Fall II</u>   (Die Anzahl k der Ziffern 1 ist ungerade, d.h. k = 2n + 1.)

Die Zahl 10101... 101 besteht aus insgesamt $2k-1$ Ziffern und lässt sich in der Form $10^{2k-2}+10^{2k-4}+10^{2k-6}+\ldots+10^2+1$ schreiben. Durch Ausmultiplizieren lässt sich bestätigen, dass $\left(10^{2k-2}+10^{2k-4}+10^{2k-6}+\ldots+10^2+1\right)\cdot\left(10^2-1\right)=10^{2k}-1$ gilt. Durch Umformen und Anwenden der dritten binomischen Formel erhält man daraus:

$$10^{2k-2}+10^{2k-4}+10^{2k-6}+\ldots+10^2+1=\frac{10^{2k}-1}{10^2-1}=\frac{\left(10^k-1\right)\cdot\left(10^k+1\right)}{9\cdot 11}.$$

Die Zahl 10^k-1 besteht aus k Ziffern 9 und ist deshalb durch 9 teilbar. Für k > 1 ist der Quotient $\frac{10^k-1}{9}$ größer 1.

Nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 11 ist die Zahl 10^k+1 durch 11 teilbar, da k nach Voraussetzung ungerade und deshalb die alternierende Quersumme der Ziffern null ist.

Für k > 1 ist auch der Quotient $\frac{10^k+1}{11}$ größer als 1.

Die Zahl $10^{2k-2}+10^{2k-4}+10^{2k-6}+\ldots+10^2+1=\frac{\left(10^k-1\right)\cdot\left(10^k+1\right)}{9\cdot 11}$ ist für eine ungerade Anzahl von Ziffern 1 aus zwei Faktoren größer als 1 zusammengesetzt und deshalb keine Primzahl.

2. Lösung

Multipliziert man die Zahl z = 1010101...101 (2n – 1 Ziffern) mit 99, so erhält man die Zahl 9999999...999 mit 2n Ziffern. Diese Zahl enthält die Zahl t = 1111... 11 (n Ziffern) als Teiler.

Die Zahl t ist einerseits für n > 2 größer als 99, aber kleiner als z. Da t andererseits ein Teiler von $99 \cdot z$ ist, müssen t und z mindestens einen Teiler größer als 1 gemeinsam haben. Deshalb kann z für n > 2 keine Primzahl sein.

Aufgabe 4

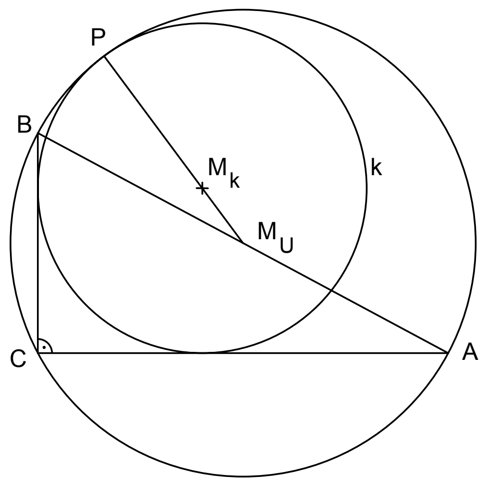
Bei einem rechtwinkligen Dreieck ABC berührt ein Kreis k den Umkreis sowie die beiden Katheten.

Zeige, dass der Radius des Kreises k doppelt so groß ist wie der Inkreisradius des rechtwinkligen Dreiecks ABC.

Bezeichnungen und Eigenschaften

Die Benennungen des Dreiecks werden so gewählt, dass $a < b$ gilt.

In der Abbildung sei P der Berührpunkt des Umkreises von Dreieck ABC und des Kreises k aus der Aufgabenstellung.



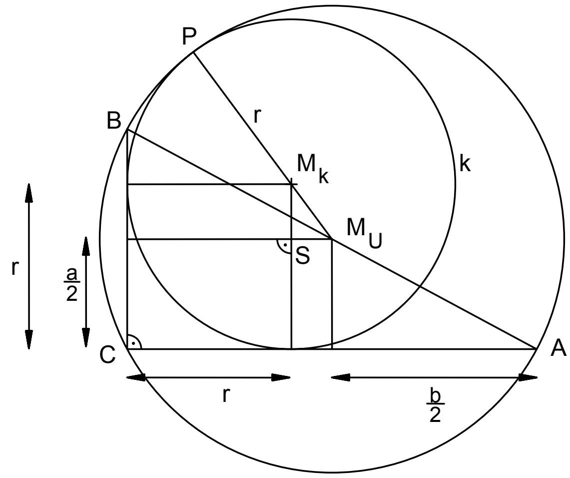
Dessen Mittelpunkt wird mit M_k, der Mittelpunkt des Umkreises mit M_u und der Mittelpunkt des Inkreises mit M_I bezeichnet. Der Radius des Umkreises ist $\frac{1}{2}c$.

Der Mittelpunkt M_k des Kreises k muss außerhalb des Dreiecks ABC liegen, denn sonst könnte k nicht die beiden Katheten und den Umkreis des Dreieckes berühren.

Der Radius des Kreises k wird mit r bezeichnet. Für diesen Radius r gilt $\frac{1}{2}a < r < \frac{1}{2}c$.

Lösung

Die Geraden (PM_u) und (PM_k) sind orthogonal zur gemeinsamen Tangente an die beiden Kreise im Berührpunkt P. Deshalb fallen diese beiden Geraden zusammen und die drei Punkte M_u, M_k und der Berührpunkt P liegen auf einer Geraden.



Aus diesem Grund gilt

$$|M_U P| = |M_U M_k| + |M_k P| \text{ und damit}$$

$$\frac{1}{2}c = |M_U M_k| + r .$$

Die Schnittpunkte der Lote von M_U auf die Dreiecksseiten AC und BC sind die Mittelpunkte dieser Seiten.

Zeichnen wir die Orthogonalen zu AC und BC durch M_k, so stimmen deren Abstände von den Geraden (AC) und (BC) mit dem Radius r des Kreises k überein.

Ist die Gerade $(M_U M_k)$ nicht zu (BC) parallel, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck $M_U M_k S$, aus dem mit Hilfe des Satzes von Pythagoras für die Streckenlänge $|M_U M_k|$ folgt:

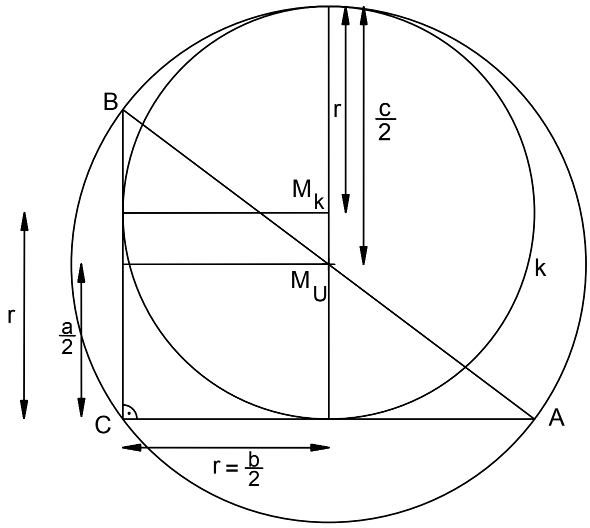
$$\left(r - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b - r\right)^2 = \left(\frac{1}{2}c - r\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2r^2 - (a+b)\cdot r + \frac{1}{4}\cdot\left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{4}c^2 - cr + r^2 . \qquad (*)$$

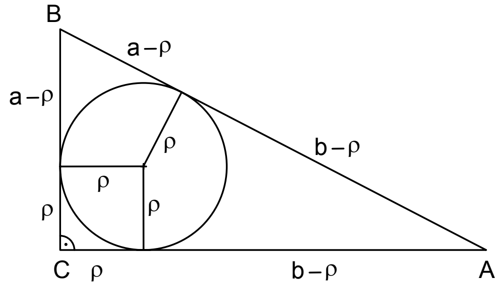
Da r von null verschieden ist und außerdem im rechtwinkligen Dreieck ABC die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, kann zu $r = a + b - c$ vereinfacht werden.

Ist $(M_U M_k)$ parallel zu (BC), so gilt $r = \frac{1}{2}b$.

Aus der linken Abbildung folgt ferner, dass dann außerdem $\frac{1}{2}c - r = r - \frac{1}{2}a$ ist.

Diese besondere Lage von M_k ist demnach als Sonderfall in der obigen Gleichung (*) enthalten und führt wie diese zu der Bedingung $r = a + b - c$.





Für den Inkreisradius p eines rechtwinkligen Dreiecks erhält man aus den gleich langen Tangentenabschnitten, wie man aus der rechten Abbildung erkennt, die Beziehungen

$$(a - \rho) + (b - \rho) = c \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)\,.$$

Daraus folgt schließlich die behauptete Beziehung $r = 2\rho$.