1991

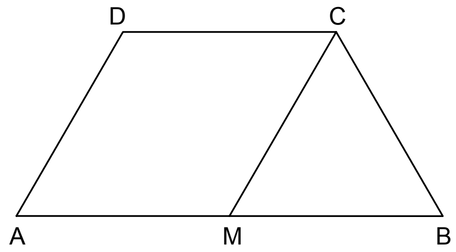
Runde 1

Aufgabe 1

Bei einem Trapez sind drei Seiten gleich lang; die vierte Seite hat die doppelte Länge.

Unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen?

Vorüberlegungen

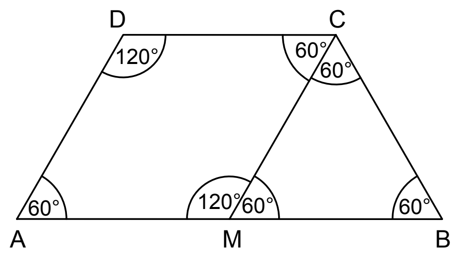


Im Trapez ABCD sollen die Seiten AB und CD parallel sein. Diese Seiten können nicht gleich lang sein, da sonst das Viereck ABCD zu einem Parallelogramm würde. Dies würde aber im Widerspruch dazu stehen, dass drei Seiten gleich lang sind, die vierte aber doppelte Länge haben soll.

Es sei AB die Trapezseite, die doppelt so lang ist wie die drei anderen Seiten. Bezeichnet man den Mittelpunkt von AB mit M, so gilt $|AM| = |MB| = |BC| = |CD| = |DA| = |MC| = x$

Als gleichschenkliges Trapez ist ABCD achsensymmetrisch zur gemeinsamen Mittelsenkrechten der beiden parallelen Seiten.

1. Lösung

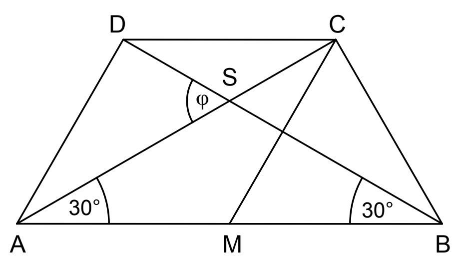


Verbindet man den Mittelpunkt M der Seite AB mit dem Punkt C, so wird das Trapez in ein Dreieck MBC und ein Viereck AMCD zerlegt. Die Seiten AM und CD des Vierecks AMCD sind gleich lang und parallel. Das Viereck AMCD ist deshalb ein Parallelogramm, woraus dann folgt, dass auch die Seiten MC und AD parallel und gleich lang sind. Dies bedeutet aber

$|AM| = |MB| = |BC| = |CD| = |DA| = |MC| = x$

Das Trapez wird also in ein gleichseitiges Dreieck MBC und eine Raute AMCD zerlegt.

Daraus ergeben sich die im Bild eingetragenen Winkelmaße.



Zeichnet man in die Raute AMCD die Diagonale AC ein, so entstehen zwei gleichschenklige, kongruente Dreiecke AMC und CDA.

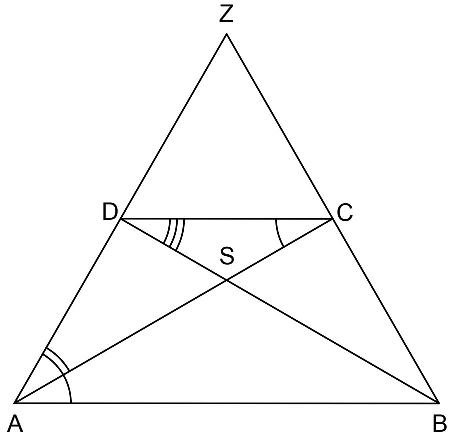
Die Diagonale AC ist die Winkelhalbierende in der Raute AMCD.

Deshalb gilt w(MAC) = 30°. Aus Symmetriegründen ist dann auch w(DBM) = 30°. Der Schnittwinkel der beiden Diagonalen ist Außenwinkel des Dreiecks ABS, und es gilt $\varphi = 60°$.

2. Lösung

Verlängert man die Trapezseiten AD und BC über D bzw. C hinaus, so schneiden sie sich im Punkt Z. Dieser Punkt Z ist Zentrum einer Strahlensatzfigur mit den parallelen Geraden (AB) und (CD).

Aus $|AD| = |BC|$ und $|AB| = 2 \cdot |CD|$ und den Strahlensätzen folgt:



1) $|ZB| = 2 \cdot |ZC| \quad \Rightarrow \quad |ZC| = |CB|$

2) $|ZA| = 2 \cdot |ZD| \quad \Rightarrow \quad |ZD| = |DA|$

3) $|ZA| = |ZB| = |AB|$

4) $|ZC| = |ZD| = |CD|$

Die Dreiecke ABZ und DCZ sind also gleichseitig.

Verbindet man A mit C und B mit D, so schneiden sich diese Strecken im Punkt S. Aus der Parallelität von AB und CD, sowie den Symmetrieeigenschaften der Gesamtfigur folgt:

w(BAC) = w(DCA) (Wechselwinkel)

w(CAD) = w(DCA) (gleichschenkliges Dreieck ACD)

w(BDC) = w(DCA) (Symmetrie der Gesamtfigur)

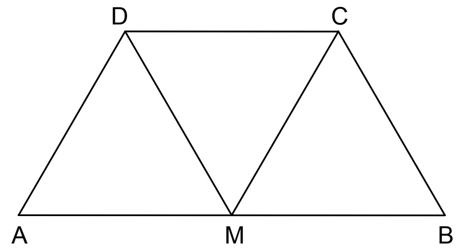
Wegen w(BAD) = 60° folgt aus diesen Eigenschaften

w(BAC) = w(CAD) = w(DCA) = w(BDC) = 30°.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck CDS ist w(CSD) = 120°. Die Diagonalen AC und BD des Trapezes ABCD schneiden sich also unter einem Winkel von 60°.

3. Lösung

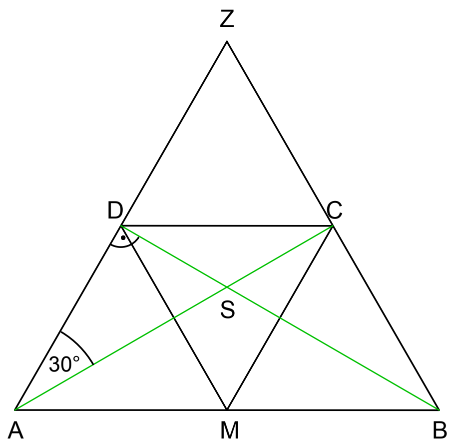
Verbindet man den Mittelpunkt M der Seite AB mit den Punkten C und D, so entstehen zwei Vierecke AMCD und MBCD. Diese beiden Vierecke sind Parallelogramme, da die gegenüberliegenden Seiten AM und CD bzw. MB und CD gleich lang und parallel sind.



Da außerdem die Streckenlängen AD und BC mit der Streckenlänge CD übereinstimmen, sind diese Parallelogramme sogar Rauten. In der Figur gilt also

$|AM| = |MB| = |BC| = |CD| = |DA| = |MC| = |MD| = x$

Aus dieser Eigenschaft der Streckenlängen folgt weiter, dass die Dreiecke AMD, MBC und CDM gleichseitig sind.



Verlängert man die Seiten AD und BC bis zum Schnittpunkt Z, so entsteht ein Dreieck ABZ mit zwei 60°-Winkeln bei A und B.

Das Dreieck ABZ ist also gleichseitig mit der Seitenlänge 2x.

Das Dreieck MCD ist das Mittendreieck im gleichseitigen Dreieck ABZ.

Die Diagonalen AC und BD des Trapezes sind gleichzeitig Höhen und Winkelhalbierende im Dreieck ABZ.

Aus der Winkelsumme im Dreieck ASD folgt dann für den Schnittwinkel der Diagonalen AC und BD w(DSA) = 180° – 30° – 90° = 60°.

Aufgabe 2

Addiert man die Einerziffern aller Teiler von 1991^{1990}, so erhält man ein Vielfaches von 1991.

Lösung

Die Zahl 1991 hat die Primfaktorzerlegung $11\cdot 181$, deshalb gilt für die Primfaktorzerlegung von 1991^{1990}.

$$1991^{1990} = (11\cdot 181)^{1990} = 11^{1990}\cdot 181^{1990}$$

Jeder Teiler von 1991^{1990} hat deshalb die Form $11^{a}\cdot 181^{b}$ mit $0 \le a, b \le 1990$. Jeder dieser Teiler besitzt die Einerziffer 1. Die Summe der Einerziffern aller Teiler ist deshalb gleich der Anzahl der Teiler von 1991^{1990}. Um diese Anzahl der Teiler zu bestimmen, kann man verschiedene Wege einschlagen.

1. Lösung

Man weiß, dass für eine Zahl n mit der Primfaktorzerlegung $n = p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot p_3^{r_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{r_k}$ die Anzahl T(n) der Teiler $T(n) = (r_1+1)\cdot(r_2+1)\cdot(r_3+1)\cdot\ldots\cdot(r_k+1)$ beträgt.

Durch Vergleich mit $1991^{1990} = 11^{1990}\cdot 181^{1990}$ erhält man dann $r_1 = r_2 = 1990$ und damit $T\left(1991^{1990}\right) = 1991\cdot 1991$.

Die Summe der Einerziffern aller Teiler ist also das 1991-fache von 1991.

2. Lösung

Folgende Aufstellung enthält alle Teiler von 1991^{1990}

1	181	181^2	$\ldots$	181^{1990}
11	$11\cdot 181$	$11\cdot 181^2$	$\ldots$	$11\cdot 181^{1990}$
11^2	$11^2\cdot 181$	$11^2\cdot 181^2$	$\ldots$	$11^2\cdot 181^{1990}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11^{1990}	$11^{1990}\cdot 181$	$11^{1990}\cdot 181^2$	$\ldots$	$11^{1990}\cdot 181^{1990}$

Diese Tabelle besteht aus 1991 Zeilen mit 1991 Spalten. Sie enthält also 1991^2 Zahlen. Jede dieser Zahlen hat eine andere Primfaktorzerlegung. Deshalb sind alle Zahlen verschieden. Als Produkte von Faktoren mit der Einerziffer 1 hat jede dieser Zahlen die Einerziffer 1. Deshalb beträgt die Summe aller Einerziffern 1991^2.

Aufgabe 3

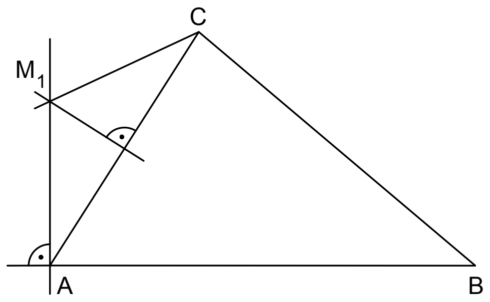
Gegeben ist ein Dreieck ABC. Der Kreis k_1 geht durch C und berührt die Gerade (AB) in A. Der Kreis k_2 geht durch C und berührt die Gerade (AB) in B.

Für welche Dreiecke ABC liegen C und die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 auf einer Geraden?

Lösung

Vorüberlegungen

Nach der Aufgabenstellung sind Bedingungen für das Dreieck ABC so zu bestimmen, dass die beiden Kreismittelpunkte M_1, M_2 und C auf einer Geraden liegen. Sind solche Bedingungen gefunden, so ist zu zeigen, dass bei allen Dreiecken mit diesen Eigenschaften die drei genannten Punkte auch tatsächlich auf einer Geraden liegen. Bei der Suche nach den Bedingungen ist darauf zu achten, dass auch alle möglichen Ausgangsfiguren berücksichtigt werden.



Damit der Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 die Gerade (AB) im Punkt A berührt, muss die Gerade (AM_1) orthogonal zu (AB) sein.

Damit der Kreis k_1 durch die Punkte A und C geht, muss sein Mittelpunkt Mi auf der Mittelsenkrechten von AC liegen. Das Dreieck ACM_1 ist dann gleichschenklig.

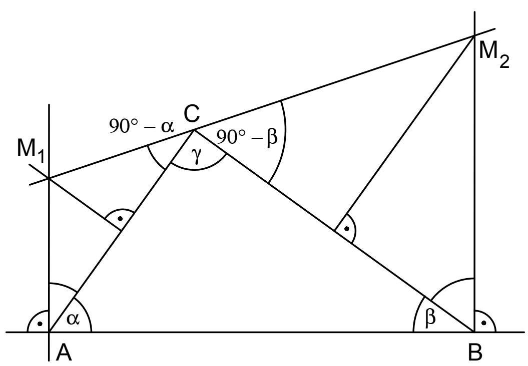
Der Mittelpunkt M_1 ist also der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC mit der Orthogonalen zur Geraden (AB) im Punkt A. Entsprechendes gilt für den Mittelpunkt M_2 des Kreises k_2.

1. Fall ($\alpha, \beta < 90°$)

Aus diesen Vorüberlegungen ergeben sich für die Winkel in den gleichschenkligen Dreiecken ACM_1 und BM_2C die Eigenschaften:

$w(CAM_1) = w(M_1CA) = 90° - \alpha$

$w(M_2BC) = w(BCM_2) = 90° - \beta$



Die Punkte M_1, C und M_2 liegen genau dann auf einer Geraden, wenn der Winkel $\measuredangle M_1CM_2$ ein gestreckter Winkel ist, d.h. wenn gilt:

$90° - \alpha + \gamma + 90° - \beta = 180°$.

Daraus folgt $\gamma = \alpha + \beta$.

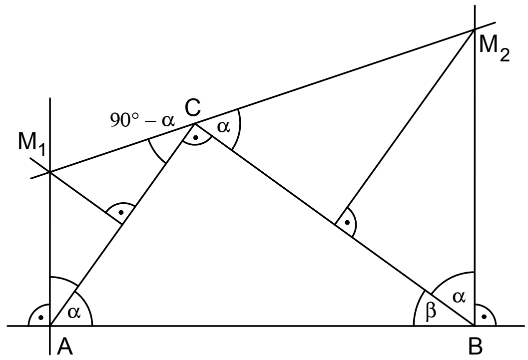
Da andererseits wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC auch $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ gilt, erhält man

$\gamma = \alpha + \beta = 90°$.

Nachweis der Umkehrung

Hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so liegen die Punkte M_1, M_2 und C auf einer Geraden.

In der nebenstehenden Figur sind die Dreiecke ACM_1 und BM_2C wieder gleichschenklig mit den Basen AC bzw. BC.



Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung rechtwinklig ist, gilt $\beta = 90° - \alpha$. Daraus ergeben sich die in der nebenstehenden Figur eingetragenen Winkelmaße. Die drei Teilwinkel bei C ergänzen sich zu 180°. Die drei Punkte M_1, M_2 und C liegen also auf einer Geraden. Damit ist gezeigt, dass für $0° < \alpha, \beta < 90°$ die drei Punkte genau dann auf einer Geraden liegen, wenn das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat.

2. Fall ($\alpha = 90°$ oder $\beta = 90°$)

Die Punkte C und M_1 liegen auf der Orthogonalen o_A zu (AB) im Punkt A. Da der Kreis um M_1 durch die Punkte A und C geht, sind die Punkte M_1 und C verschieden. Die Gerade (CM_1) stimmt also mit der Orthogonalen o_A überein. Der Punkt M_2 liegt auf der Orthogonalen o_A zu (AB) im Punkt B. Diese beiden Orthogonalen sind parallel zueinander und verschieden. Deshalb können M_1, C und M_2 nicht auf einer Geraden liegen.

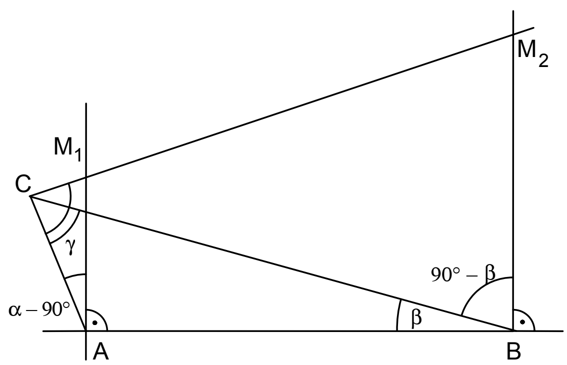
3. Fall ($\alpha > 90°$ oder $\beta > 90°$)

Anmerkung

Im Folgenden wird nachgewiesen, dass dieser Fall nicht eintreten kann. Die verwendete Zeichnung kann nur als Skizze angesehen werden. Die Dreiecke AM_1C und BM_2C sind nach Voraussetzung gleichschenklig, auch wenn dies in der Figur nicht zum Ausdruck gebracht werden kann.

Es sei $\alpha > 90°$.

Der Punkt M_1 liegt dann zwischen C und M_2, wenn $w(ACM_1) = w(ACM_2)$ gilt.



Entsprechend der nebenstehenden Skizze muss dann die Bedingung

$$\alpha - 90° = 90° - \beta + \gamma$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 180°$$

erfüllt sein.

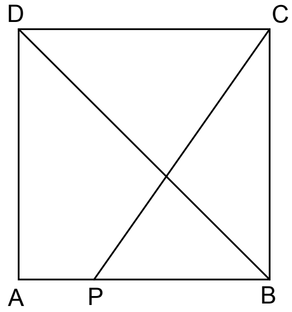
Dies steht aber im Widerspruch zu $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ als Winkelsumme im Dreieck ABC.

Entsprechend zeigt man, dass auch $\beta > 90°$ zum Widerspruch führt.

Aufgabe 4

Ein Quadrat ABCD wird in vier Teilflächen zerlegt (siehe Figur).

Kann man den Punkt P auf der Strecke AB so wählen, dass sich die Inhalte der vier Teilflächen wie 1:2:3:4 verhalten?



Behauptung

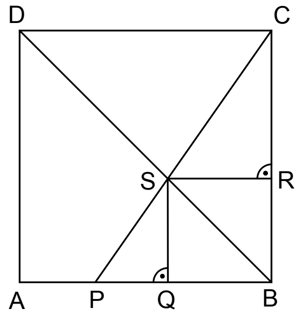
Die Lage des Punkte P kann nicht in der gewünschten Weise festgelegt werden.

Vorüberlegungen

Da die Diagonale BD die Winkelhalbierende im Quadrat ist, gilt

w(PBS) = w(SBC) = 45° .

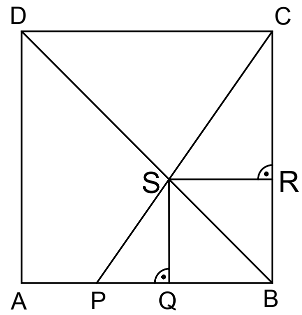
Zeichnet man vom Schnittpunkt S der Strecken PC und BD die Lote auf die Quadratseiten AB und BC, so entsteht ein Rechteck SQBR. Dieses Rechteck ist sogar ein Quadrat, da die Teildreiecke SQB und BRS jeweils gleichschenklig-rechtwinklig sind.



Liegt P zwischen A und B, so zeigt ein Vergleich der vier Teilflächen mit den vier Teildreiecken, in die das Quadrat durch die beiden Diagonalen geteilt wird, dass für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_4 der Flächen PBS, BCS, SCD und APSD gilt: $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$.

1. Lösung

Zunächst wird die Lage des Punktes P so bestimmt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks BCS doppelt so groß wie der Inhalt des Dreiecks PBS ist. Es wird nachgewiesen, dass diese Eigenschaft nur dann erfüllt ist, wenn P der Mittelpunkt der Strecke AB ist.

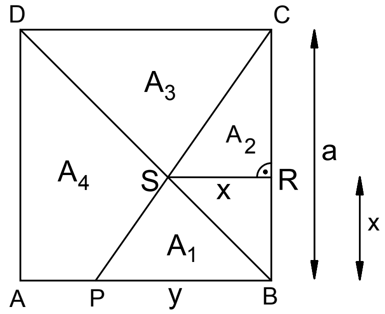


Die Höhen SQ und SR in den Dreiecken PBS und BCS über den Grundseiten PB bzw. BC sind gleich lang, da QBRS ein Quadrat ist. Das Dreieck BCS hat den doppelten Flächeninhalt wie das Dreieck PBS, wenn die Seite BC doppelt so lang wie PB ist. Also ist P der Mittelpunkt der Strecke AB. Der Flächeninhalt des Dreiecks PBC ist dann ein Viertel der Quadratfläche. Auf das Teildreieck PBS entfällt ein Drittel dieser Fläche. Der Flächeninhalt des Dreiecks PBS ist damit ein Zwölftel der Quadratfläche.

Da das Dreieck PBS und das Viereck APSD zusammen halb so groß sind wie der Flächeninhalt des Quadrats, bleibt für den Flächeninhalt des Vierecks noch 5 Zwölftel der Quadratfläche. Der Inhalt des Vierecks APSD ist also fünfmal so groß wie der des Dreiecks PBS, im Widerspruch zur Aufgabenstellung.

Man kann den Teilpunkt P auf der Strecke AB nicht so wählen, dass gleichzeitig das Dreieck SBC doppelt und das Viereck APSD viermal so groß ist wie das Dreieck PBS.

2. Lösung



Es seien A_i (i = 1, 2, 3, 4) die Flächeninhalte der Teilfiguren in der nebenstehenden Figur. Fällt man von S das Lot auf die Seite BC, so sind die beiden Geraden (AB) und (SR) parallel.

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

$$\frac{x}{y} = \frac{a-x}{a}.$$

Für die Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 folgt dann

$$A_1 = \frac{1}{2}\cdot x \cdot y = \frac{1}{2}\cdot\frac{ax^2}{a-x},\quad A_2 = \frac{1}{2}\cdot a \cdot y,\quad A_3 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot(a-x).$$

Aus $A_4 = \frac{1}{2}\cdot a^2 - A_1$ folgt durch Einsetzen und Vereinfachen $A_4 = \frac{1}{2}\cdot\left(a^2 - \frac{ax^2}{a-x}\right)$.

Nach Aufgabenstellung soll der Flächeninhalt A_2 doppelt so groß wie A_1 sein.

Aus dieser Bedingung folgt:

$$2\cdot\frac{ax^2}{a-x} = ax \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x}{a-x} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{3}a.$$

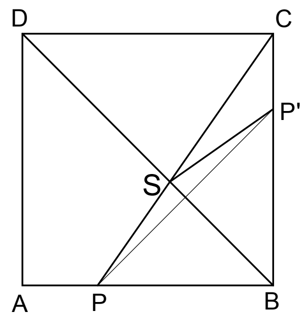
Setzt man diesen Wert in die Gleichungen für die Flächeninhalte A_i ein, so erhält man:

$$A_1 = \frac{1}{12}a^2,\ A_2 = \frac{1}{6}a^2,\ A_3 = \frac{1}{3}a^2,\ A_4 = \frac{5}{12}a^2.$$

Aus $A_1 : A_2 = 1 : 2$ folgt also $A_1 : A_3 = 1 : 4$ und $A_1 : A_4 = 1 : 5$.

Die letzten beiden Flächenverhältnisse stehen im Widerspruch zur Aufgabenstellung.

3. Lösung



Spiegelt man das Dreieck PBS an der Diagonalen BD, so fällt der Bildpunkt P von P auf die Quadratseite BC. Der Flächeninhalt des Dreiecks BP'S stimmt mit dem Flächeninhalt A_1 des Dreiecks PBS überein und soll nach Aufgabenstellung halb so groß wie der Inhalt A_2 des Dreiecks BCS sein.

Da die Dreiecke BCS und BP'S den Abstand des Punktes S von der Geraden (BC) als gemeinsame Höhe haben, muss die Grundseite BP' des Dreiecks BP'S halb so groß wie BC sein. Der Punkt P und damit auch P' ist also Mittelpunkt der Quadratseite. Die weitere Lösung stimmt mit der ersten überein.

Aufgabe 5

Zeige: Für jede natürliche Zahl n (n > 0) lässt sich 9^n als Summe von 3^n aufeinander folgenden Zahlen darstellen.

1. Lösung

Versucht man einen Nachweis der Behauptung für kleine natürliche Zahlen n, so erhält man gegebenenfalls durch Probieren

n = 1	2 + 3 + 4	=	9
n = 2	5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13	=	81
n = 3	14 + 15 + ... + 26 + 27 + 28 + ...+ 39 + 40	=	729

Aus diesen Beispielen kann man die Idee für die folgende allgemeine Lösung ableiten:

Die Zahl 9^n ist stets durch 3^n teilbar, denn es gilt $9^n : 3^n = 3^n$. Die Zahl 9^n lässt sich also als Summe von 3^n Summanden darstellen, wobei jeder Summand den Wert 3^n hat.

Da 3^n für alle natürlichen Zahlen n ungerade ist, besteht die Summe aus einer ungeraden Anzahl von Summanden. Geht man von dem mittleren Summanden 3^n aus, so kann man die restlichen jeweils zu Paaren zusammenfassen.

Vermindert man die Summanden links von 3^n um 1, 2, 3,... und vermehrt gleichzeitig den Wert der Summanden rechts von 3^n um 1, 2, 3,..., so wird der Wert der Gesamtsumme nicht verändert, und man erhält eine Summe von 3^n aufeinander folgenden ganzen Zahlen.

$$\ldots+\left(3^n-3\right)+\left(3^n-2\right)+\left(3^n-1\right)+3^n+\left(3^n+1\right)+\left(3^n+2\right)+\left(3^n+3\right)+\ldots$$

Die Anzahl der Zahlen kleiner als 3^n und größer als 3^n ist jeweils $\frac{1}{2}\cdot\left(3^n-1\right)$. Der kleinste Summand ist also $3^n-\frac{1}{2}\cdot\left(3^n-1\right)=\frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(3^n+1\right)>0$.

Die Zahl 3^n+1 ist für alle natürlichen Zahlen n gerade. Deshalb ist der kleinste Summand eine ganze Zahl größer als 0, und alle Summanden sind natürliche Zahlen.

2. Lösung

Die Behauptung der Aufgabenstellung lässt sich auch in folgender Form schreiben:

Zu jeder natürlichen Zahl n (n > 0) gibt es eine ganze Zahl a so, dass

$$a+\left(a+1\right)+\left(a+2\right)+\ldots\left(a+3^n-1\right)=9^n$$

ist.

Nun kann man den Nachweis für die Existenz der ganzen Zahl a führen.

$$a+\left(a+1\right)+\left(a+2\right)+\ldots\left(a+3^n-1\right)=9^n\,,$$

$$3^n\cdot a+\left(1+2+3+\ldots+3^n-1\right)=9^n\,.$$

Nach der Summenformel von Gauß gilt für die Summe der ersten k natürlichen Zahlen

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{1}{2}\cdot k\cdot(k+1).$$

Wendet man diese Formel auf die Summe $1+2+3+\ldots+3^n-1$ an, so erhält man

$$3^n\cdot a+\frac{1}{2}\cdot\left(3^n-1\right)\cdot 3^n=9^n$$

$$3^n\cdot\left(a+\frac{1}{2}\cdot\left(3^n-1\right)\right)=9^n$$

$$a+\frac{1}{2}\cdot 3^n-\frac{1}{2}=3^n$$

$$a=\frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{2}\cdot\left(3^n+1\right).$$

Da für alle natürlichen Zahlen n die Potenz 3^n ungerade ist, wird $3^n + 1$ eine gerade Zahl. Damit ist a eine natürliche Zahl.

Zu jedem n existiert also die natürliche Anfangszahl $\frac{1}{2}\cdot\left(3^n+1\right)$, so dass die Summe der nachfolgenden natürlichen Zahlen den Wert 9^n besitzt.

Aufgabe 6

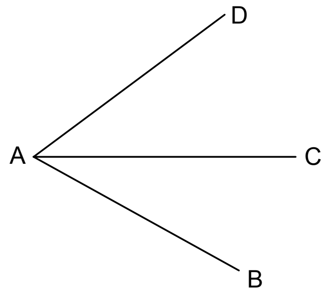
Gegeben sind sechs Punkte. Je drei dieser Punkte bilden ein Dreieck. Die Seiten dieser Dreiecke sollen rot oder grün angemalt werden.

Kann man vermeiden, dass eines dieser Dreiecke nur gleichfarbige Seiten hat?

Vorbemerkungen

Wenn "je drei dieser Punkte ein Dreieck bilden " sollen, so dürfen keine drei oder mehr Punkte auf einer Geraden liegen. Mit Ausnahme dieser Einschränkung kann man die Lage der sechs Punkte beliebig wählen. Streckenlängen und Winkel zwischen den Verbindungsstrecken spielen keine Rolle. Man kann also z.B. von einem regelmäßigen Sechseck ausgehen.

1. Lösung



Von jedem der sechs Punkte gehen fünf Verbindungsstrecken zu den übrigen Punkten aus. Greift man sich z.B. den Punkt A heraus, so gibt es mindestens drei Strecken, die gleich gefärbt sind. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass dies die Farbe "rot" ist und die anderen Endpunkte dieser rot gefärbten Strecken die Punkte B, C und D sind.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

Färbt man eine oder mehrere der Verbindungsstrecken BC, BD und CD rot, so entsteht mindestens ein vollständig rot gefärbtes Dreieck ABC, ABD oder ACD. Färbt man keine dieser Verbindungsstrecken rot, sondern alle drei grün, so entsteht das vollständig grün gefärbte Dreieck BCD.

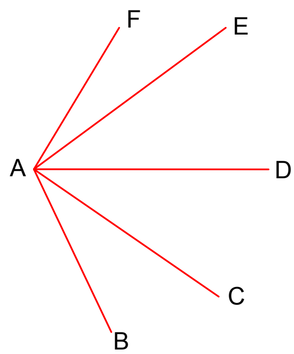
Da einer dieser beiden Fälle eintreten muss, lässt es sich nicht vermeiden, dass ein gleich gefärbtes Dreieck entsteht.

Diese Lösung ist durch die Kürze bestechend. Gerade für Wettbewerbsteilnehmer, die sich zum ersten Mal mit einer derartigen Aufgabenstellung beschäftigen, bleibt dabei jedoch die Frage offen, wie eine solche Lösung entsteht. Wie man auf sie durch systematisches Probieren kommen kann, soll durch die folgende Lösung gezeigt werden. Sie ließe sich durch eine Reihe von Lösungen ergänzen, die durch teilweise umfangreiche Fallunterscheidungen zum Ziel kommen.

2. Lösung

Man betrachtet verschiedene Verteilungen der Farben für die fünf Strecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt z.B. A.

Fall 1

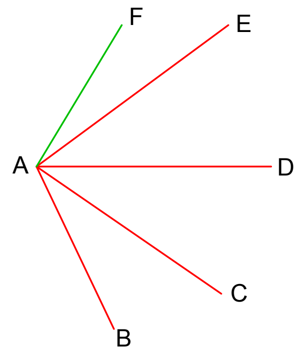


Alle Strecken haben die gleiche Farbe (z.B. rot). Keine der anderen Verbindungsstrecken kann rot gefärbt werden, da dadurch ein vollständig rot gefärbtes Dreieck entstehen würde. Also müssten alle anderen Strecken grün eingefärbt werden, wodurch dann mehrere grün gefärbte Dreiecke entstehen.

Fall 2

Von A gehen vier rote und eine grüne Strecke aus (oder umgekehrt). Die anderen Endpunkte der rot gefärbten Strecken seien B, C, D und E. Ist mindestens eine der Verbindungsstrecken dieser Punkte ebenfalls rot eingefärbt, so liegt ein vollständig rotes Dreieck vor.

Ist keine dieser Strecken rot gefärbt, so müssen alle Verbindungsstrecken BC, BD, BE, CD, CE und DE grün eingefärbt sein. In diesem Fall wären die Dreiecke BCD, BCE, BDE und CDE gleichfarbig.



Fall 3

Von A gehen drei Strecken der einen Farbe und zwei Strecken der anderen Farbe aus (z.B. drei rote).

Dieser Fall wurde bereits in der ersten Lösung behandelt.

Rückblickend kann man nun feststellen, dass die Untersuchung des dritten Falls genügt hätte, da von jedem der sechs Punkte mindestens drei gleich gefärbte Strecken ausgehen.