1990

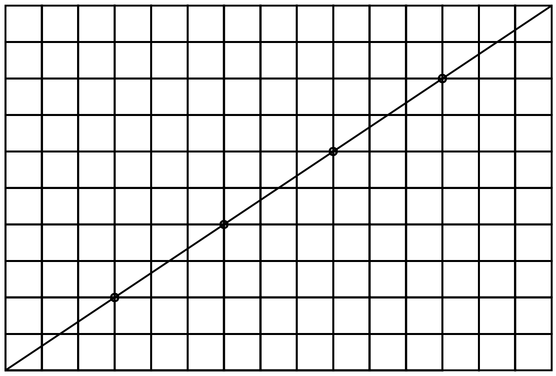
Runde 2

Aufgabe 1

Ein Rechteck mit den Seitenlängen n cm und m cm wird in $n \cdot m$ Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt. In dieses Rechteck wird eine Diagonale eingezeichnet.

a) Durch wie viele innere Gitterpunkte geht diese Diagonale?

b) Wie viele Einheitsquadrate werden durch diese Diagonale in Teilflächen zerlegt?

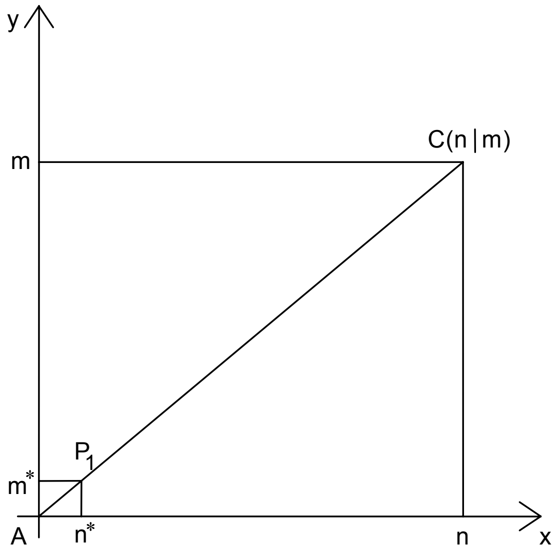


Diagonale mit vier inneren Gitterpunkten

1. Lösung

Vorbemerkung

Das Rechteck lässt sich so in ein Koordinatensystem eintragen, dass die linke untere Ecke A mit dem Ursprung des Koordinatensystems übereinstimmt. Die rechte obere Ecke C hat dann die Koordinaten (n/m). Die Gitterpunkte des Rechtecks sind bei dieser Festlegung die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.



a) Die Diagonale AC wird dann durch die Gleichung $y = \frac{m}{n} \cdot x$ mit $0 \le x \le n$ beschrieben.

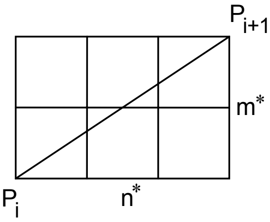
Ist d der größte gemeinsame Teiler von m und n, so gibt es natürliche Zahlen m* und n* mit $m = d \cdot m^*$, $n = d \cdot n^*$ und ggT(m*,n*) = 1.

Die Gleichung der Diagonalen lässt sich dann auch in der Form $y = \frac{m^*}{n^*} \cdot x$ schreiben, wobei der Bruch $\frac{m^*}{n^*}$ nicht mehr gekürzt werden kann.

Ist $P(x_0/y_0)$ ein innerer Punkt der Diagonalen mit ganzzahliger x-Koordinate, so ist $y_o = \frac{m^*}{n^*} \cdot x_o$ nur dann ganzzahlig, wenn x_0 ein Vielfaches von n* ist. Wegen $\frac{n}{n^*} = d$ gibt es genau d – 1 Vielfache von n*, die kleiner als n sind.

Nur die Punkte $P_1\left(n^*/m^*\right), P_2\left(2n^*/2m^*\right), \ldots, P_{d-1}\left((d-1) \cdot n^*/(d-1) \cdot m^*\right)$ sind dann innere Gitterpunkte der Diagonalen. Die Anzahl der inneren Gitterpunkte der Diagonalen beträgt dann ggT(m,n) – 1. Ist der größte gemeinsame Teiler gleich 1, so gibt es keinen inneren Gitterpunkt.

b) Betrachtet man die Diagonale zwischen zwei aufeinander folgenden inneren Gitterpunkten, so ist diese die Diagonale in einem kleineren Rechteck mit den Seitenlängen m* und n*. Durch die vertikalen Gitterlinien wird die Diagonale in n* – 1 Punkten und durch die horizontalen Gitterlinien in m* – 1 Punkten geschnitten. Insgesamt gibt es auf diesem Teilstück der Diagonalen m* + n* – 2 Schnittpunkte mit den Gitterlinien. Diese Schnittpunkte zerlegen die Diagonale in m* + n* – 1 Teilstrecken. Jede Teilstrecke zerlegt ein Einheitsquadrat in zwei Teilflächen.



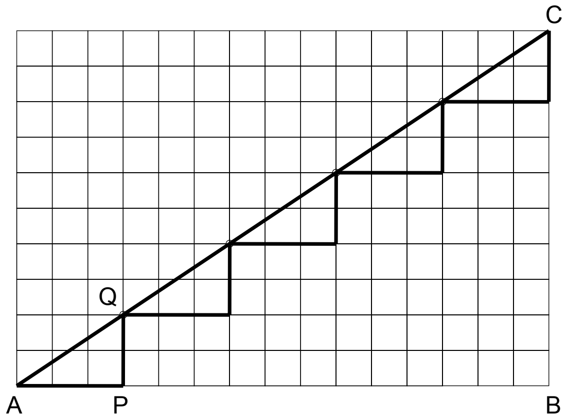
Betrachtet man nun die gesamte Diagonale, die sich aus d Teilen zusammensetzt, so werden insgesamt

$$d \cdot (m^* + n^* - 1) = d \cdot m^* + d \cdot n^* - d = m + n - \text{ggT}(m, n)$$

Einheitsquadrate in Teilflächen zerlegt.

2. Lösung

Es sei Q derjenige innere Gitterpunkt der Diagonalen, der am nächsten bei A liegt. Das Steigungsdreieck APQ ist ähnlich zum Steigungsdreieck ABC, da die Innenwinkel der Dreiecke paarweise übereinstimmen.



Deshalb gilt |AB| : n = |PQ| : m.

Da nach Voraussetzung das Steigungsdreieck APQ das kleinste Steigungsdreieck mit ganzzahligen Kathetenlängen ist, sind die Maßzahlen n* und m* teilerfremd, und es gibt eine natürliche Zahl d mit $n = d \cdot n^*$ und $m = d \cdot m^*$. Dabei ist d der größte gemeinsame Teiler von m und n.

Die Strecke AQ lässt sich insgesamt d-mal auf AC abtragen, wobei jeder Endpunkt ein Gitterpunkt ist. Es gibt deshalb d – 1 innere Gitterpunkte auf der Diagonalen. Die weitere Lösung entspricht dem ersten Lösungsweg.

Aufgabe 2

In einem Sechseck seien alle Innenwinkel gleich groß. Die Längen von jeweils drei aufeinander folgenden Seiten dieses Sechsecks werden addiert.

Zeige, dass diese sechs Summen höchstens zwei verschiedene Werte annehmen.

Lösung

Da die Winkelsumme in einem beliebigen Sechseck 720° beträgt und alle Innenwinkel nach Voraussetzung gleich groß sind, beträgt das Winkelmaß jeweils 120°.

Verlängert man die Seiten des Sechsecks wie in der Figur, so entstehen über jeder Seite Dreiecke mit jeweils zwei 60°-Winkeln, so dass diese entstandenen Dreiecke gleichseitig sind. Daraus ergeben sich die in der nebenstehenden Figur eingetragenen Seitenlängen. Die Dreiecke PRT und QSU sind ebenfalls gleichseitig, woraus sich

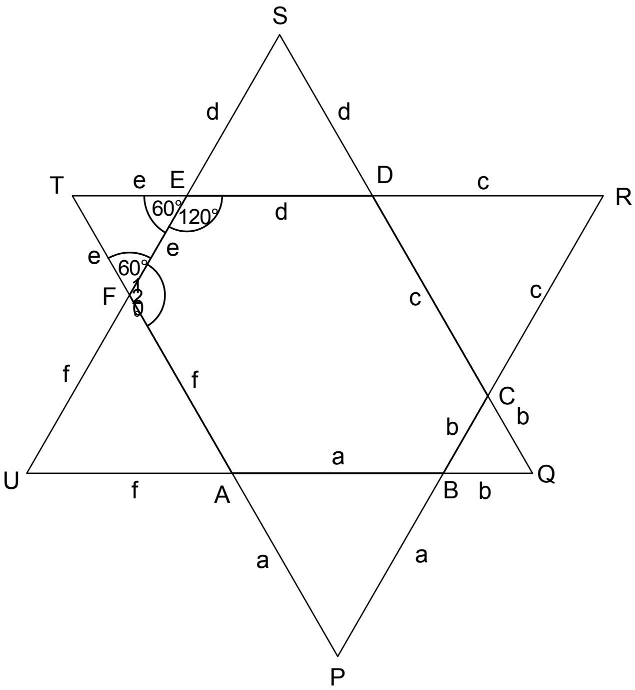
$a + b + c = c + d + e = e + f + a$

und

$b + c + d = d + e + f = f + a + b$

ergibt.

Damit ist die behauptete Eigenschaft nachgewiesen, da jede mögliche der sechs Summen aus drei aufeinander folgenden Seitenlängen einmal vorkommt.



2. Lösung

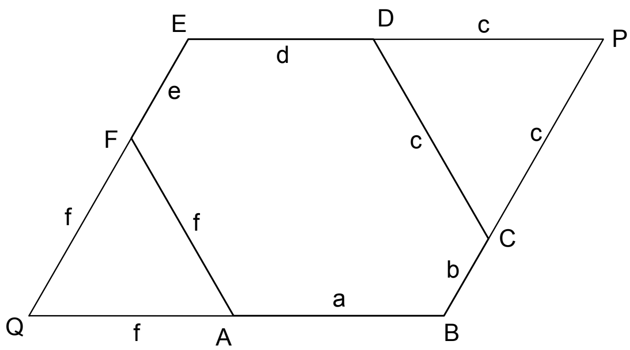
Verlängert man in einem Sechseck mit den geforderten Eigenschaften die Seiten BC und ED bis zum Schnittpunkt P, bzw. die Seiten AB und EF bis zum Schnittpunkt Q, so gilt in den Dreiecken CPD und AFQ:

w(PCD) = w(CDP) = 60°

und

w(FAQ) = w(QFA) = 60°

Die Dreiecke CPD und AFQ sind deshalb gleichseitig.



Im Viereck BPEQ ergänzen sich benachbarte Innenwinkel jeweils zu 180°. Es ist deshalb ein Parallelogramm. Für seine Seitenlängen folgt aus der Konstruktion

$f + a = c + d$ (*)

und

$b + c = e + f.$ (**)

Um die Summen von drei aufeinander folgenden Seitenlängen zu erhalten, kann man noch jeweils die Längen der benachbarten Seiten addieren und erhält aus

(*) die Bedingungen $f + a + b = b + c + d$ (1)

und $e + f + a = c + d + e$ (2)

bzw. (**) $a + b + c = e + f + a$ (3)

und $b + c + d = d + e + f$ (4)

Diese vier Gleichungen lassen sich zu

$$f + a + b = b + c + d = d + e + f \quad \text{und} \quad a + b + c = e + f + a = c + d + e$$

zusammenfassen.

Aufgabe 3

a) Zeige, dass n^4+4 nur für n = 1 eine Primzahl ergibt ($n \in \mathbb{N}$).

b) Bestimme eine Zahl a so, dass n^4+a für kein n eine Primzahl ergibt ($a, n \in \mathbb{N}$).

Lösung

a) Setzt man in den Term für n den Wert 1 ein, so erhält man die Primzahl 5.

Durch eine geeignete Zerlegung in Faktoren soll nun gezeigt werden, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ der Term n^4+1 keine Primzahl darstellt.

Dazu kann man folgende Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned} n^4+4 &= n^4+4n^2+4-4n^2 \\ &= \left(n^2+2\right)^2-4n^2 \\ &= \left(n^2+2+2n\right)\cdot\left(n^2+2-2n\right). \end{aligned}$$

Für die beiden Faktoren und $n > 1$ gilt

$$n^2+2n+2=\left(n+1\right)^2+1 \geq 10 \text{ bzw. } n^2-2n+2=\left(n-1\right)^2+1 \geq 2 .$$

Damit hat man eine Zerlegung des Terms in zwei Faktoren gefunden, die für alle natürliche Zahlen $n > 1$ nur ganzzahlige Werte größer als 1 annehmen.

b) Wie bei Teilaufgabe a) versucht man, den Term n^4+1 durch eine geeignete Ergänzung in eine Summe aus einem Binom und einem Quadrat zu zerlegen.

Setzt man $a=4b^4$ mit $b \in \mathbb{N}$, so erhält man

$$\begin{aligned} n^4+4b^4 &= n^4+4b^2n^2+4b^4-4b^2n^2 \\ &= \left(n^2+2b^2\right)^2-4b^2n^2 \\ &= \left(n^2+2b^2+2bn\right)\cdot\left(n^2+2b^2-2bn\right). \end{aligned}$$

Die beiden Faktoren stellen für alle natürlichen Zahlen b und n selbst ganze Zahlen dar. Es ist nun zu überprüfen, unter welchen Voraussetzungen die Terme $n^2+2b^2 \pm 2bn$ natürliche Zahlen größer als 1 sind.

Nach Abspaltung eines Binoms erhält man

$$n^2+2bn+b^2+b^2=\left(n+b\right)^2+b^2 > b^2 \quad \text{bzw.} \quad n^2-2bn+b^2+b^2=\left(n-b\right)^2+b^2 \geq b^2 .$$

Wählt man b größer als 1, so sind beide Faktoren der Zerlegung von n^4+4b^4 natürliche Zahlen größer als 1. Somit stellt der Term n^4+a für alle natürlichen Zahlen a, die das Vierfache einer vierten Potenz größer als 1 sind, keine Primzahl dar. Als kleinste Zahl erhält man a = 64.

Aufgabe 4

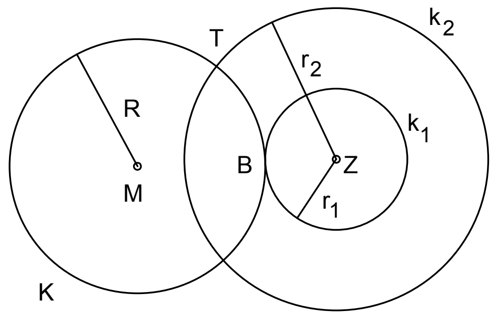
Gegeben sind zwei konzentrische Kreise.

Konstruiere einen Kreis, der den kleineren berührt und den größeren rechtwinklig schneidet.

Begründe die Konstruktion.

Benennungen

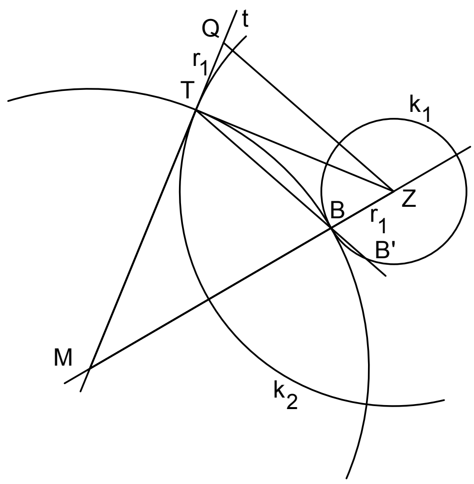
Die Kreise k_1 und k_2 mit den Radien r_1 und r_2 ($r_1 < r_2$) und dem Mittelpunkt Z seien vorgegeben. In der Figur sei der Kreis K um M mit Radius R bereits so konstruiert, dass er den Kreis k_1 im Punkt B berührt und den Kreis k_2 im Punkt T orthogonal scheidet. In den folgenden Lösungen wird jeweils ein Konstruktionsverfahren mit seiner Begründung vorgestellt.



1. Lösung

Konstruktion

1. Wähle T auf k_2 beliebig.
2. Konstruiere die Tangente t an k_2 im Punkt T.
3. Bestimme Q auf t so, dass $|TQ| = r_1$ gilt.
4. Die Parallele zu (QZ) durch T schneidet k_1 in den Punkten B und B'.
5. Die Gerade (ZB) schneidet die Tangente t im Punkt M.



Der Kreis um M mit dem Radius |MB| ist der gesuchte Kreis.

Begründung

Die ersten drei Punkte der Konstruktion sind immer durchführbar. Die Existenz der Schnittpunkte aus den Konstruktionsschritten 4) und 5) muss jedoch begründet werden.

Die Parallele zu QZ durch T schneidet den Kreis k_1 immer in zwei Punkten, denn der Abstand des Punktes Z von dieser Parallelen ist kleiner als r_1, denn die Strecke QT hat die Länge r_1 und ist nicht zur Geraden QZ orthogonal.

Nach Konstruktion besitzen die Vierecke ZQTB und ZQTB' die parallelen Seiten ZQ und TB bzw. TB '. Außerdem gilt $|ZB'| = |ZB| = |QT| = r_1$.

Eines der Vierecke ist deshalb ein gleichschenkliges Trapez, in dem sich die Verlängerung der Schenkel schneiden. Das andere Viereck ist ein Parallelogramm.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Kreis um M mit Radius |MB| auch durch den Punkt T geht.

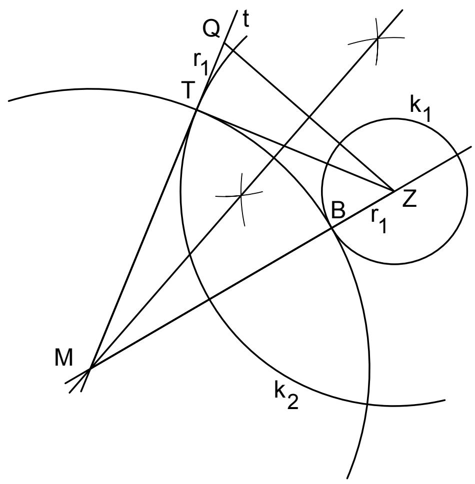
Dazu genügt der Nachweis, dass die Strecken MB und MT gleich lang sind. Die Punkte M, Q, T, Z und B bilden eine Strahlensatzfigur mit den parallelen Geraden (QZ) und (TB). Da die Strecken TQ und ZB nach Konstruktion gleich lang sind, gilt dies nach dem ersten Strahlensatz auch für die Strecken MT und MB.

2. Lösung

Konstruktion

Die ersten drei Konstruktionsschritte stimmen mit denen der ersten Lösung überein.

4) Die Mittelsenkrechte von ZQ schneidet die Tangente t im Punkt M.



Der Kreis um M mit dem Radius |MT| ist der gesuchte Kreis.

Begründung

Die Existenz des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten von ZQ mit der Tangenten t ist gesichert, da ZQ und t nach Konstruktion nicht parallel sein können.

Es bleibt zu zeigen, dass der Kreis um M mit dem Radius |MT| den Kreis k_1 berührt, d.h. dass |MT| = |MB| gilt.

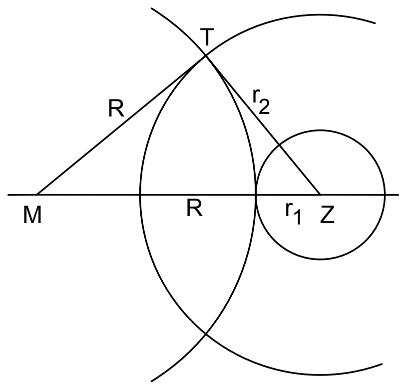
Nach Konstruktion ist das Dreieck ZMQ gleichschenklig, da M auf der Mittelsenkrechten von ZQ liegt. Deshalb gilt

$$|MT| = |MQ| - r_1 = |MZ| - r_1 = |MB|.$$

3. Lösung

In der nebenstehenden Planfigur gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$r_2^2 + R^2 = (r_1 + R)^2 \quad \Leftrightarrow \quad r_2^2 - r_1^2 = 2r_1R$$



Gilt umgekehrt diese Beziehung zwischen den Radien der drei Kreise, so ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das Dreieck ZMT rechtwinklig. Der Kreis um M mit Radius R schneidet dann den Kreis um Z mit Radius r_2 orthogonal und berührt den Kreis um Z mit Radius r_1.

Konstruktion

1. B sei ein beliebiger Punkt auf k_1.
2. Konstruiere die Tangente an k_1 im Punkt B.
3. Die Tangente schneidet den Kreis k_1 in den Punkten U und U'.
4. Die Tangenten an k_2 in den Punkten U und U' schneiden sich in einem Punkt S.

Der Kreis mit dem Durchmesser BS ist der gesuchte Kreis.

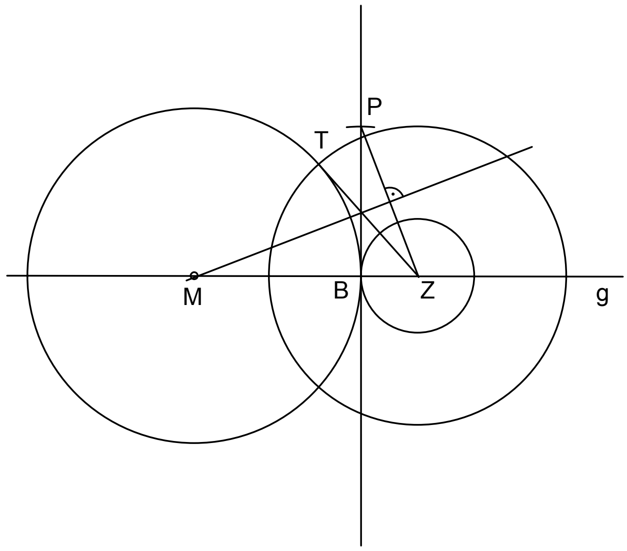
Begründung

Nach dem Satz von Pythagoras hat die Strecke BU die Länge $\sqrt{r_2^2 - r_1^2}$. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit dem Durchmesser BS mit R, so gilt nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck SZU genau die Beziehung $r_2^2 - r_1^2 = 2r_1R$, die an der Planfigur als notwendige und hinreichende Bedingung für die geforderten geometrischen Eigenschaften gefunden wurde.

4. Lösung

Konstruktion

1. Zeichne eine beliebige Gerade g durch den Mittelpunkt Z der beiden konzentrischen Kreise.
2. Der Punkt B sei einer der beiden Schnittpunkte von g mit dem kleineren Kreis k_1.
3. Konstruiere die Tangente an k_1 im Punkt B und trage auf dieser Tangente von B aus nach einer Seite eine Strecke ab, deren Länge mit dem größeren Radius r_2 übereinstimmt. Der Endpunkt dieser Strecke sei P.
4. Konstruiere die Mittelsenkrechte der Strecke ZP.
5. Diese Mittelsenkrechte schneidet die Gerade g aus 1) im Punkt M.



Der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius MB ist der gesuchte Kreis.

Begründung

Nach Konstruktion berührt der Kreis um M mit dem Radius |MB| den kleineren Kreis im Punkt B. Es genügt also nachzuweisen, dass dieser Kreis den größeren der konzentrischen Kreise im Punkt T orthogonal schneidet.

T sei einer der beiden Schnittpunkte. Dazu soll gezeigt werden, dass die Dreiecke ZPB und ZPT kongruent sind.

Da das Dreieck ZPB nach Konstruktion bei B rechtwinklig ist, gilt dies dann auch für den entsprechenden Innenwinkel des Dreiecks ZPT beim Punkt T.

Die Kongruenz der Dreiecke ZPB und ZPT folgt aus dem Kongruenzsatz sss.

a) Die Strecke ZP gehört zu beiden Dreiecken.
b) Nach Konstruktionsschritt 3) gilt $|PB| = r_1 = |ZT|$.
c) Nach den Konstruktionsschritten 4) und 5) ist das Dreieck ZPM gleichschenklig, da M auf der Mittelsenkrechten der Strecke ZP liegt. Deshalb gilt $|MZ| = |MP|$. Da außerdem auch $|MB| = |MT|$ ist, folgt dann auch die Gleichheit der Streckenlängen $|ZB|$ und $|TP|$. Damit ist die Gültigkeit dieser Konstruktion nachgewiesen.

Anmerkung

Wegen der Übersichtlichkeit der Zeichnungen wurde auf die Konstruktion der Mittelsenkrechten und Tangenten mit Zirkel und Lineal verzichtet.