1990

Runde 1

Aufgabe 1

Wie heißen die beiden letzten Ziffern von 7^{1990}?

1. Lösung

Die ersten acht Potenzen von 7 sind:

7	49	343	2401
16807	117649	823543	5764801

Die beiden letzten Ziffern wiederholen sich mit der Periodenlänge vier. Multipliziert man nämlich eine mehrstellige Zahl n mit 7, so entscheidet über die letzten beiden Stellen des Produkts $7 \cdot n$ die Multiplikation der letzten beiden Stellen von n mit 7. Deshalb wiederholt sich die Endziffernfolge 07, 49, 43, und 01.

Immer wenn der Exponent n von 7 durch vier teilbar ist, erhält man die Endziffern 01. Da 1990 bei Division durch 4 den Rest 2 ergibt, besitzt 7^{1990} dann die Endziffern 49.

2. Lösung

Betrachtet man die Potenzen von 7 modulo 100, so erhält man wegen $7^4 = 2401$

$$7^4 \equiv 1 \bmod 100 \text{ und } \left(7^4\right)^n \equiv 1^n \equiv 1 \bmod 100$$

Mit $1988 = 4 \cdot 497$ folgt daraus

$$7^{1988} \equiv 1 \bmod 100 \text{ und } 7^{1990} \equiv 7^{1988} \cdot 7^2 \equiv 1 \cdot 49 \bmod 100$$

Die letzten beiden Ziffern von 7^{1990} sind 4 und 9.

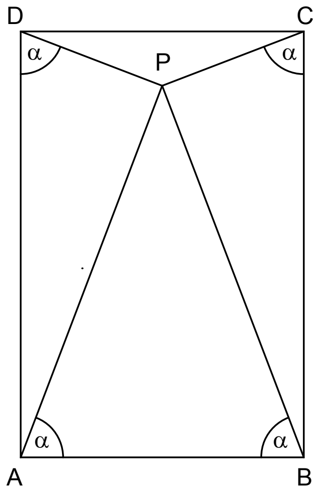
Aufgabe 2

Im Innern eines Rechtecks ABCD ist ein Punkt P gesucht, so dass die Winkel BAP, PBA, ADP und PCB gleich groß sind.

Für welche Rechtecke gibt es mindestens einen solchen Punkt?

Lösung

Wie kann man solche Punkte konstruieren?



Nach der Aufgabenstellung sind die Winkel $\measuredangle$ BAP und $\measuredangle$ PBA gleich groß. Aus Symmetriegründen liegt der Punkt P deshalb auf der Mittelsenkrechten von AB. In der Planfigur sind die Winkel mit dem gleichen Winkelmaß jeweils durch α gekennzeichnet. Die Winkel $\measuredangle$ PAD und $\measuredangle$ BAP ergänzen sich zu 90°.

Deshalb gilt $\measuredangle PAD = 90° - \alpha$.

Da die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt, muss der Winkel $\measuredangle$ DPA im Dreieck APD ein rechter Winkel sein. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt P also auf dem Thaleskreis über AD.

(Aus Symmetriegründen liegt P auch auf dem Thaleskreis über BC.)

Konstruktion

P ist der Schnittpunkt des Thaleskreises über AD und der Mittelsenkrechten auf AB. Ein Schnittpunkt kann nur dann existieren, wenn der Radius r des Thaleskreises mindestens so groß ist wie die halbe Länge der Strecke AB.

Demnach gibt es	zwei Punkte, wenn	$\lvert AD\rvert > \lvert AB\rvert$
	einen Punkt, wenn	$\lvert AD\rvert = \lvert AB\rvert$
	keinen Punkt, wenn	$\lvert AD\rvert < \lvert AB\rvert$ ist.

Aufgabe 3

Die Lose einer Lotterie haben die Nummern 000001 bis 999999. Jede Nummer kommt nur einmal vor. Ein abergläubischer Spieler hält Nummern für ***glückbringend***, wenn die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern ist.

Zeige, dass die Summe aller ***glückbringenden*** Losnummern durch 13 teilbar ist.

Vorbemerkung und Benennungen

Da offenbar nicht jede glückbringende Nummer (z.B. 123321) durch 13 teilbar ist, versucht man, möglichst geschickt glückbringende Nummern zusammenzufassen, deren Summe durch 13 teilbar ist. Bei dieser Zusammenfassung muss jedoch sichergestellt sein, dass jede Glückszahl genau einmal berücksichtigt wird.

Die Ziffern eines Glücksloses werden mit a, b, c, d, e, f bezeichnet. Mit dieser Benennung gilt $n = \overline{abcdef}$ und $a + b + c = d + e + f$. Dabei können unterschiedliche Buchstaben auch für gleiche Ziffern stehen. Die Nummer eines Glücksloses wird als Glückszahl bezeichnet.

1. Lösung

Man unterscheide die beiden Fälle $\overline{abc} = \overline{def}$ und $\overline{abc} \neq \overline{def}$.

Fall I $\left(\overline{abc} = \overline{def}\right)$

Die Glückszahl n lässt sich dann in der Form $n = \overline{abcdef} = \overline{abcabc} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}$ schreiben.

Da der Faktor 1001 durch 13 teilbar ist, ist jede Glückzahl mit der Eigenschaft $\overline{abc} = \overline{def}$ durch 13 teilbar.

Fall II $\left(\overline{abc} \neq \overline{def}\right)$

Zu jeder Glückszahl $n = \overline{abcdef}$ gibt es dann eine von ihr verschiedene Glückszahl $m = \overline{defabc}$. Addiert man diese beiden, so erhält man:

$$\begin{aligned} n + m &= 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{def} + 1000 \cdot \overline{def} + \overline{abc} \\ &= 1001 \cdot \left(\overline{abc} + \overline{def}\right) \\ &= 13 \cdot 77 \cdot \left(\overline{bc} + \overline{def}\right) \end{aligned}$$

Bildet man die Summe aller Glückszahlen, so sind entweder bereits die einzelnen Summanden (Fall I) durch 13 teilbar, oder man kann jeweils zwei Summanden zu einer durch 13 teilbaren Teilsumme zusammenfassen (Fall II). Damit ist aber auch die Summe dieser Zahlen durch 13 teilbar.

2. Lösung

Nimmt man die Losnummer 000000 als Glücksnummer hinzu, wodurch die Summe der Glückszahlen nicht verändert wird, so gibt es zu jeder Glückszahl $n = \overline{abcdef}$ genau eine Zahl $n' = \overline{a'b'c'd'e'f'}$ so, dass sich die entsprechenden Ziffern von n und n' jeweils zu 9 ergänzen. Diese Partnerzahl n' ist ebenfalls eine Glückszahl, wie die folgende Umformung zeigt:

Voraussetzung:	$a + b + c = d + e + f$
Behauptung:	$a' + b' + c' = d' + e' + f'$
Beweis:	

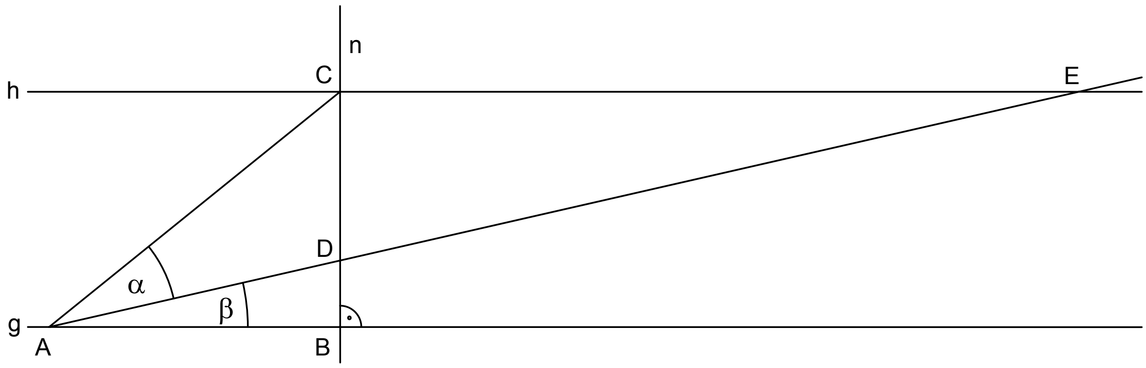
$$\begin{aligned} a'+b'+c' &= (9-a)+(9-b)+(9-c) \\ &= 27-(a+b+c) \\ &= 27-(d+e+f) \\ &= (9-d)+(9-e)+(9-f) \\ &= d'+e'+f' \end{aligned}$$

Die Summe von n und n' ergibt jeweils 999999 und ist wegen $999999 = 13 \cdot 76923$ durch 13 teilbar. Fordert man zusätzlich n < 500000, so ist n' > 500000 und man erhält jede Glückszahl entweder als n oder n* genau einmal. Da die Summe aus Glückszahl und Partnerzahl jeweils durch 13 teilbar ist, gilt dies auch für die Gesamtsumme.

Aufgabe 4

In der Figur gelte:

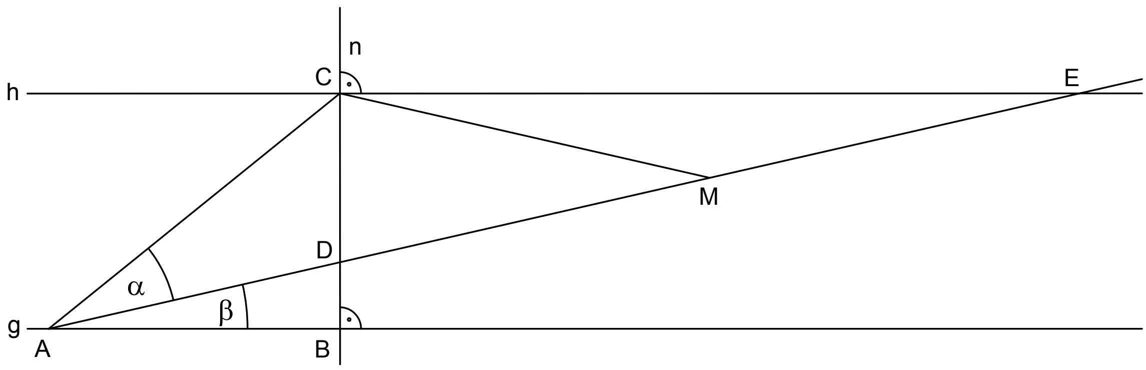
g und h sind parallel
g und n sind orthogonal
ED ist doppelt so lang wie AC
$\alpha = 26°$



Bestimme β durch geometrische Überlegungen.

Planfigur

M sei der Mittelpunkt de Strecke DE.



Nach Aufgabenstellung gilt dann $|DM| = |ME| = \frac{1}{2} \cdot |DE| = |AC|$ (*)

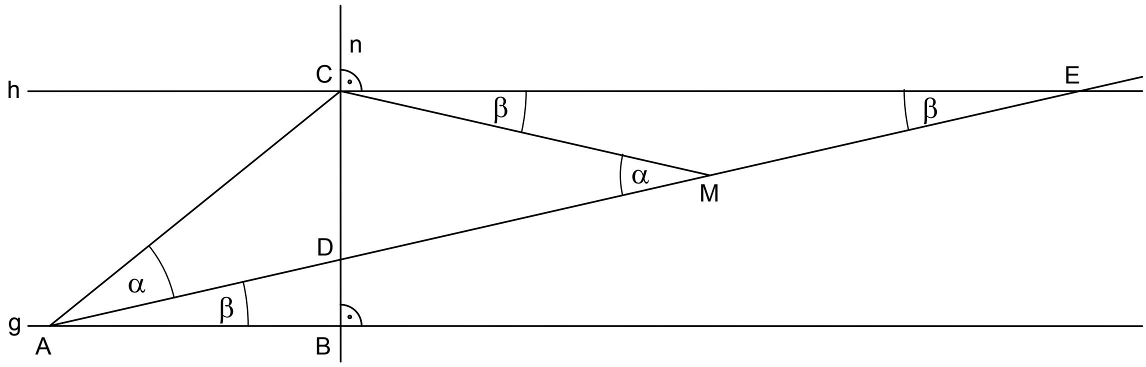
1. Lösung

Da der Winkel $\measuredangle$ DCE ein rechter Winkel ist, liegt C nach der Umkehrung des Satzes von Thales auf dem Halbkreis über der Strecke DE mit dem Mittelpunkt M. Deshalb gilt zusammen mit (*)

$|AC| = |DM| = |ME| = |MC|$

Die Dreiecke AMC und ECM sind deshalb gleichschenklig mit den Basen AM und EC. Als Wechselwinkel an den Parallelen g und h sind die Winkel $\measuredangle$ BAD und $\measuredangle$ CEM gleich groß. Es gelten deshalb die in der folgenden Figur eingetragenen Winkelmaße.

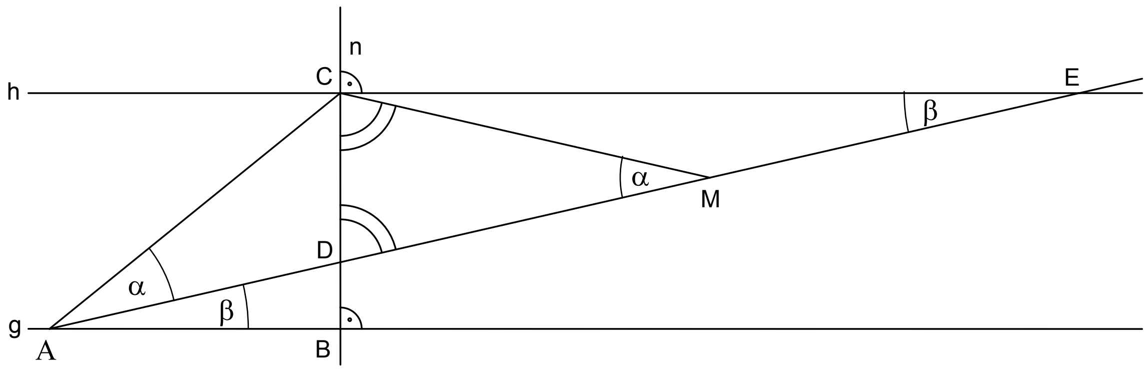
Der Kreis um M mit Radius MD geht durch die Punkte C und E. Betrachtet man die Strecke CD als Sehne in diesem Kreis, so ist der Mittelpunktswinkel $\measuredangle$ CMD doppelt so groß wie der Randwinkel $\measuredangle$ CED.



Es gilt deshalb $\alpha = 2\beta$ und damit $\beta = 13°$.

2. Lösung

Wie bei der ersten Lösung zeigt man, dass die Strecken EM, CM und AC gleich lang sind. Deshalb sind die Dreiecke AMC und EMC gleichschenklig mit den Basen AM bzw. EC. Als Scheitelwinkel zum Winkel $\measuredangle$ ADB ist der Basiswinkel $\measuredangle$ MDC ebenfalls $90° - \beta$. Damit gelten in den gleichschenkligen Dreiecken die eingetragenen Winkelmaße.

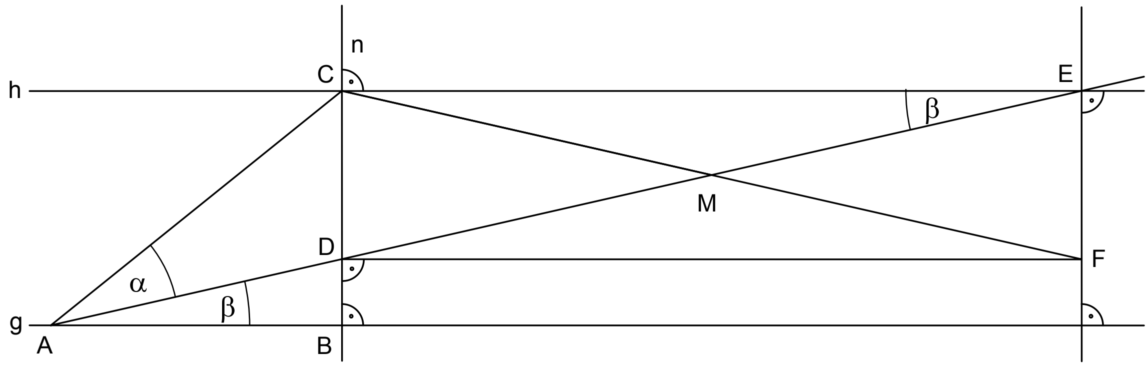


Aus der Winkelsumme im Dreieck DMC folgt die Bedingung $90° - \beta + 90° - \beta + \alpha = 180°$ und damit wieder $\alpha = 2\beta$.

Daraus folgt $\beta = 13°$.

3. Lösung

Die Orthogonale zu n durch D und die Orthogonale zu h durch E schneiden sich im Punkt F. Es entsteht



das Rechteck DFEC mit der Diagonalen DE.

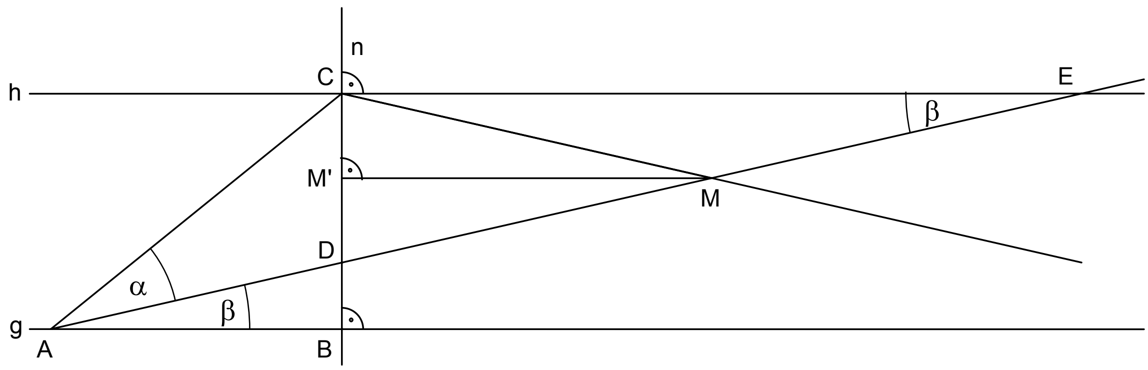
Da die Diagonalen eines Rechtecks gleich lang sind und sich gegenseitig halbieren, gilt

$$|FM| = |EM| = |CM| = |DM| = \frac{1}{2}|DE| = |AC|$$

Damit hat man die Gleichschenkligkeit der Dreiecke AMC, DMC und ECM gezeigt. Die Berechnung von β kann dann wie in den beiden vorhergehenden Lösungen erfolgen.

4. Lösung

Durch den Mittelpunkt M der Strecke ED wird die Parallele zu EC gezeichnet. Sie schneidet CD im Punkt M'. Diese Parallele ist wegen der Orthogonalität der Geraden h und n auch orthogonal zu CD.



Nach dem ersten Strahlensatz ist dann M' der Mittelpunkt der Strecke CD und MM' damit auch die Mittelsenkrechte der Strecke CD.

Das Dreieck CDM ist deshalb gleichschenklig und es gilt |MD| = |MC|. Nach Aufgabenstellung ist dann auch

|MC| = |MD| = |ME| = |AC|.

Aus der Gleichschenkligkeit der Dreiecke AMC und CDM sowie den Stufenwinkeln ∡ BAE und ∡ CEM an den Parallelen g und h folgt wie in den Lösungen 1 und 2 die Eigenschaft $\alpha = 2\beta$.

Aufgabe 5

Weise für alle natürlichen Zahlen n einschließlich 0 nach:

Wenn 3n + 1 eine Quadratzahl ist, dann lässt sich n + 1 als Summe von drei Quadratzahlen darstellen.

Vorbemerkung

Alle Variablen stehen für Zahlen aus N_o.

1. Lösung

Für kleine Werte von n ergeben sich die in der Tabelle zusammengefassten Möglichkeiten für die Darstellung als Summe von drei Quadratzahlen.

In dieser Tabelle fällt auf:

jeweils zwei der drei Quadrate in der Zerlegung sind gleich;
die Basen der drei Quadrate unterscheiden sich um 1;
addiert man die drei Basen aus jeder Zerlegung und quadriert die Summe, so erhält man 3n + 1.

n	3n + 1	n + 1	Zerlegung in Quadrate
0	$1 = 1^2$	1	$0^2 + 0^2 + 1^2$
1	$4 = 2^2$	2	$0^2 + 1^2 + 1^2$
5	$16 = 4^2$	6	$1^2 + 1^2 + 2^2$
8	$25 = 5^2$	9	$1^2 + 2^2 + 2^2$
16	$49 = 7^2$	17	$2^2 + 2^2 + 3^2$

Die Beobachtung legt die Vermutung nahe, dass sich der Term n +1 in der Form $a^2 + a^2 + (a+1)^2$ bzw. $a^2 + a^2 + (a-1)^2$ darstellen lässt und gleichzeitig $(a + a + (a+1))^2 = 3n + 1$ bzw. $(a + a + (a-1))^2 = 3n + 1$ gilt.

Zum Nachweis dieser Eigenschaft werden zwei Fälle unterschieden. Gilt $3n + 1 = q^2$, so kann q nicht durch 3 teilbar sein, weil dies sonst auch für q^2 gelten müsste. Die Zahl q lässt sich dann in der Form 3r + 1 oder 3r – 1 darstellen.

Fall 1 $(q = 3r + 1,\ r \geq 0)$

$$\begin{aligned}
3n+1 &= (3r+1)^2 \\
3n+1 &= 9r^2 + 6r + 1 \\
3n &= 9r^2 + 6r \\
n &= 3r^2 + 2r \\
n+1 &= 3r^2 + 2r + 1 \\
n+1 &= r^2 + r^2 + (r+1)^2
\end{aligned}$$

Fall 2 $(q = 3r - 1,\ r \geq 1)$

$$\begin{aligned}
3n+1 &= (3r-1)^2 \\
3n+1 &= 9r^2 - 6r + 1 \\
3n &= 9r^2 - 6r \\
n &= 3r^2 - 2r \\
n+1 &= 3r^2 - 2r + 1 \\
n+1 &= r^2 + r^2 + (r-1)^2
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass sich n + 1 in beiden Fällen als Summe von drei Quadratzahlen darstellen lässt.

2. Lösung

Voraussetzung:

3n + 1 ist eine Quadratzahl. Es gibt also eine Zahl $m \in \mathbb{N}_o$ mit $3n+1=m^2$.

Behauptung:

n + 1 lässt sich als Summe von drei Quadratzahlen a^2, b^2 und c^2 darstellen.

Beweis:

Aus $3n+1=m^2$ folgt $n=\frac{m^2-1}{3}=\frac{(m-1)\cdot(m+1)}{3}$

Von den beiden Faktoren m + 1 und m – 1 ist genau einer durch 3 teilbar, weil sonst n keine natürliche Zahl wäre. Die Zahl m lässt sich also in der Form 3k + 1 (k > 0) oder 3k – 1 (k > 1) darstellen.

Setzt man diese Terme für m ein, so erhält man $n=\frac{9k^2+6k}{3}$ bzw. $n=\frac{9k^2-6k}{3}$.

Für n+1 ergibt sich daraus die Darstellung

$$n+1=3k^2+2k+1 \quad \text{bzw.} \quad n+1=3k^2-2k+1$$

und $$n+1=k^2+k^2+(k+1)^2 \quad \text{bzw.} \quad n+1=k^2+k^2+(k-1)^2$$

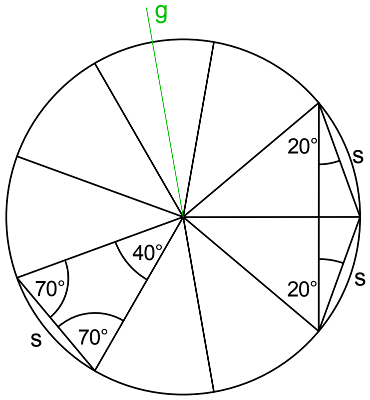
Damit ist die Zahl n + 1 in beiden Fällen als Summe von drei Quadratzahlen aus N_o dargestellt.

Aufgabe 6

In einem regelmäßigen Neuneck seien s die Seitenlänge, d die Länge der kürzesten und D die Länge der längsten Diagonalen.

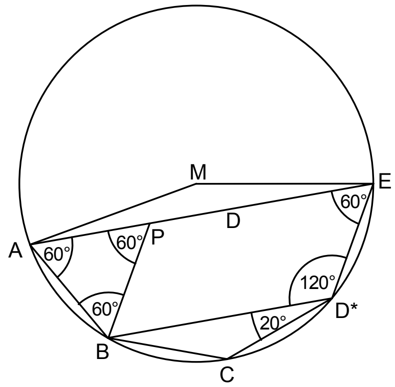
Beweise: s = D – d .

Vorüberlegungen



1) Verbindet man in einem regelmäßigen Neuneck den Mittelpunkt M des Umkreises mit den neun Eckpunkten, so entstehen neun gleichschenklige Dreiecke mit einem 40° Winkel an der Spitze und zwei Basiswinkeln von jeweils 70°.
2) Die Maße der Innenwinkel des Neunecks betragen jeweils 140°.
3) Drei aufeinander folgende Punkte des Neunecks bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Seitenlänge s als Schenkellänge, einem Winkel von 140° an der Spitze und Basiswinkeln von 20°.
4) Das regelmäßige Neuneck ist achsensymmetrisch zu jeder Geraden durch einen der neun Eckpunkte und den Mittelpunkt des Umkreises.

1. Lösung



Im regelmäßigen Neuneck betrachten wir die Teilfigur aus den Punkten A, B, C, D* und E. Spiegelt man diese Figur an der Geraden (CM), so werden A und E bzw. B und D* aufeinander abgebildet.

Die Verbindungsstrecken AE und BD* sind deshalb orthogonal zu (CM) und damit zueinander parallel.

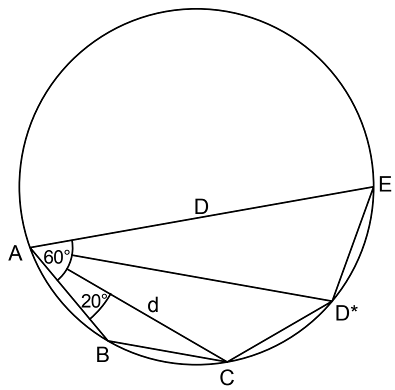
Die Parallele zu (D*E) durch den Punkt B schneidet die Strecke AE im Punkt P. Das Viereck BD*EP ist damit ein Parallelogramm.

Aus den Vorbemerkungen 1) bis 3) und den Parallelogrammeigenschaften von BD*EP ergeben sich außerdem die in die Figur eingetragenen Winkelmaße. Das Dreieck ABP ist gleichseitig mit der Seitenlänge s, da es bei A und B zwei 60°-Winkel besitzt und wegen der Winkelsumme von 180° auch das dritte Winkelmaß 60° beträgt.

Daraus ergibt sich weiter:

$$|AE| = |AP| + |PE| \quad \Leftrightarrow \quad D = s + d \quad \Leftrightarrow \quad s = D - d.$$

2. Lösung



Nach der Erweiterung des Randwinkelsatzes sind die Winkel $\measuredangle$ BAC, $\measuredangle$ CAD* und $\measuredangle$ D*AE gleich groß, da sie Randwinkel über den gleichlangen Sehnen BC, CD* bzw. D*E sind.

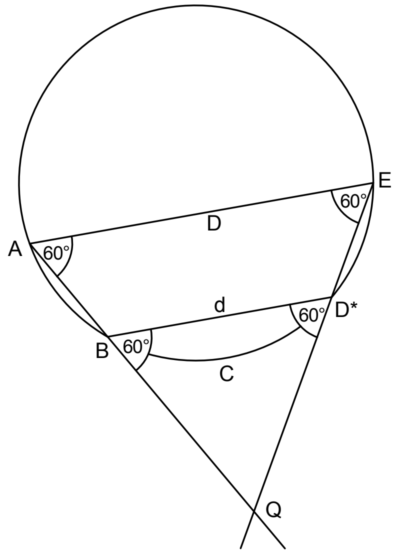
Nach Eigenschaft 3) ist $\measuredangle$ BAC ein 20°-Winkel. Damit beträgt das Winkelmaß von $\measuredangle$ BAE 60°.

Entsprechend folgt, dass auch $\measuredangle$ AED* ein 60°-Winkel ist. Zusammen mit der Achsensymmetrie des Vierecks ABD*E folgert man wie bei der 1. Lösung die Beziehung s = D – d.

Bei den beiden folgenden Lösungen wird vorausgesetzt, dass die Innenwinkelmaße von 60° bzw. 120° des gleichschenkligen Trapezes ABD*E bereits bekannt sind. Diese Winkeleigenschaften lassen sich entsprechend der ersten Lösung herleiten.

3. Lösung

Die Geraden (AB) und (ED) schneiden sich im Punkt Q. Aus den Winkeleigenschaften des gleichschenkligen Trapezes ABDE folgt unmittelbar, dass die Dreiecke AQE und BQD* gleichseitig mit den Seitenlängen D bzw. d sind.



In der Figur gilt |AQ| = |AB| + |BQ| = s + d. Andererseits gilt auch |AQ| = |AE| = D.

Daraus folgt wieder D = s + d und damit s = D – d.

4. Lösung

Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck ABD*

$$\begin{aligned} |AD^*|^2 &= |AB|^2 + |BD^*|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BD^*|\cdot\cos 120° \\ &= s^2 + d^2 - 2\cdot s\cdot d\cdot(-0,5) \\ &= s^2 + d^2 + s\cdot d \end{aligned}$$

Im Dreieck AD*E gilt nach dem Kosinussatz

$$\begin{aligned} |AD^*|^2 &= |AE|^2 + |D^*E|^2 - 2\cdot|AE|\cdot|D^*E|\cdot\cos 60° \\ &= D^2 + s^2 - 2\cdot D\cdot s\cdot 0,5 \\ &= s^2 + d^2 - D\cdot s \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$\begin{aligned} s^2 + d^2 + s\cdot d &= D^2 + s^2 - D\cdot s \\ D\cdot s + s\cdot d &= D^2 - d^2 \\ (D+d)\cdot s &= (D+d)\cdot(D-d) \end{aligned}$$

Da $D + d \neq 0$ ist, erhält man durch Division s = D – d.