1989

Runde 2

Aufgabe 1

Weise nach, dass $2^1 + 2^9 + 2^8 + 2^9 + 2^n$ für keine natürliche Zahl n eine Quadratzahl ist.

1. Lösung

Für n = 1 erhält man den Summenwert 1284. Diese Zahl liegt zwischen den aufeinander folgenden Quadratzahlen $35^2 = 1225$ und $36^2 = 1296$. Sie kann somit selbst keine Quadratzahl sein.

Für $n \geq 2$ kann man den Term $2^1 + 2^9 + 2^8 + 2^9 + 2^n$ durch Ausklammern von 2 in der Form $2 \cdot \left(1 + 2^8 + 2^7 + 2^8 + 2^{n-1}\right)$.

Für $n \geq 2$ sind mit Ausnahme des ersten Summanden alle anderen in der Klammer gerade. Der Summenwert ist also ungerade. Das Produkt $2 \cdot \left(1 + 2^8 + 2^7 + 2^8 + 2^{n-1}\right)$ ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar und kann deshalb keine Quadratzahl sein.

2. Lösung

Stellt man die angegebenen Zahlen im Zweiersystem dar, so erhält man

$2^1 = 10_2$; $2^8 = 100000000_2$ und $2^9 = 1000000000_2$.

Die Summe $2^1 + 2^9 + 2^8 + 2^9$ hat dann im Zweiersystem die Darstellung 10100000010_2. Vor der Berücksichtigung von 2^n betrachtet man noch die Darstellung von Quadratzahlen im Zweiersystem.

Alle im Zweiersystem vorkommenden Zahlen enden mit ...00, ...01, ...10 oder ...11. Betrachtet man die Quadrate dieser Zahlen, so können folgende Situationen eintreten. Alle Quadrate enden im Zweiersystem also entweder mit ...00 oder mit ...01.

$$\begin{array}{r} \ldots 00 \cdot \ldots 00 \\ \hline \ldots 00 \\ \ldots 00 \\ \hline \ldots 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots 01 \cdot \ldots 01 \\ \hline \ldots 00 \\ \ldots 01 \\ \hline \ldots 01 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots 10 \cdot \ldots 10 \\ \hline \ldots 10 \\ \ldots 00 \\ \hline \ldots 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots 11 \cdot \ldots 11 \\ \hline \ldots 11 \\ \ldots 11 \\ \hline \ldots ?01 \end{array}$$

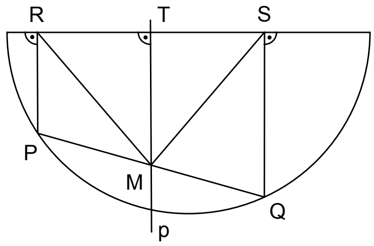
Ist bei 2^n der Exponent größer oder gleich 2, so sind die letzten beiden Ziffern von 2^n im Zweiersystem 0. Die Addition von 2^n beeinflusst die letzten beiden Ziffern von 10100000010_2 nicht und kann somit keine Quadratzahl sein.

Aufgabe 2

In einem Halbkreis mit dem Durchmesser AB ist eine Sehne PQ mit Mittelpunkt M eingezeichnet. Fällt man die Lote von P und Q auf AB, so erhält man die Lotfußpunkte R und S.

Weise nach, dass die Winkel ∠PRM und ∠MSQ gleich groß sind. Zeichnung!!!

1. Lösung



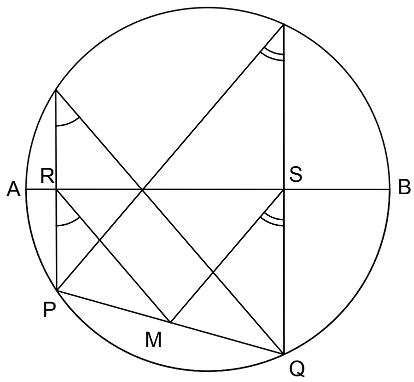
Aus der Aufgabenstellung folgt, dass die Geraden (PR) und (QS) orthogonal zu (AB) und damit zueinander parallel sind. Als Mittelpunkt der Strecke PQ liegt M auf der Mittelparallele p von (PR) und (QS), da die Mittelparallele jede Querstrecke halbiert. Aus diesem Grund ist auch der Schnittpunkt T von p mit RS der Mittelpunkt dieser Strecke. Die Mittelparallele p ist damit gleichzeitig die Mittelsenkrechte der Strecke RS.

Der Punkt M hat als Punkt der Mittelsenkrechten von R und S den gleichen Abstand. Betrachtet man die Dreiecke TRM und STM, so stimmen diese Dreiecke paarweise in allen drei Seitenlängen überein und sind deshalb kongruent zueinander.

Aus dieser Kongruenz folgt insbesondere w(MRT) = w(TSM) und damit w(PRM) = w(MSQ).

2. Lösung

Vorüberlegungen



Zunächst wird der gegebene Halbkreis zu einem Vollkreis ergänzt und die Strecken PR und QS bis zum Schnittpunkt mit dem Kreis verlängert.

Da die Geraden (PR) und (QS) nach Voraussetzung die Gerade (AB) orthogonal schneiden, liegen die Punkte D und C achsensymmetrisch zu P und Q bzgl. der Spiegelungsachse (AB).

Deshalb sind die Punkt R und S die Mittelpunkte der Strecken PD und QC.

Beweis von w(PRM) = w(MSQ)

1) w(PDQ) = w(PCQ) als Umfangswinkel über der gleichen Sehne PQ.
2) Da M und R Mittelpunkte der Seiten PQ und QD im Dreieck PQD sind, ist die Strecke MR eine Mittellinie in diesem Dreieck und damit parallel zu DQ.
   Deshalb gilt w(PRM) = w(PDQ) (Stufenwinkel an Parallelen).
3) Entsprechend begründet man w(MSQ) = w(PCQ) als Stufenwinkel an den parallelen Geraden (PC) und (MS).

Aus den Eigenschaften 1) bis 3) folgt w(PRM) = w(PDQ) =w(PCQ) = w(MSQ).

Aufgabe 3

Zeige, dass es unter den ersten 1989 Zahlen 9, 99, 999, ... mindestens eine gibt, die durch 1989 teilbar ist.

Lösung

Die Zahl 1989 hat die Primfaktorzerlegung $1989 = 9 \cdot 13 \cdot 17$. Da jede Zahl, die nur aus der Ziffer 9 besteht, sicher durch 9 teilbar ist, genügt der Nachweis, dass es unter den ersten 1989 Zahlen der Form 1, 11, 111, ... mindestens eine Zahl gibt, die gleichzeitig durch 13 und durch 17 teilbar ist.

Betrachtet man die Zahlen 1, 10, 100, ... jeweils modulo 13 bzw. mod 17, so erhält man:

$1 \equiv 1 \text{ mod } 13 \qquad 10 \equiv 10 \text{ mod } 13$

$100 \equiv 9 \text{ mod } 13 \qquad 1000 \equiv -1 \text{ mod } 13$

Die Zahl 111111 lässt sich in der Form $100 \cdot 10^3 + 111 = 111 \cdot \left(10^3 + 1\right)$ darstellen. Betrachtet man dies modulo 13, so folgt

$$111 \cdot \left(10^3 + 1\right) \equiv 111 \cdot \left(-1 + 1\right) \text{ mod } 13 \equiv 0 \text{ mod } 13$$

Jede Zahl der Form 111... 111, bei der die Anzahl der Ziffern 1 ein Vielfaches von 6 ist, lässt sich als Summe

$$111111 \cdot 10^{6k-6} + 111111 \cdot 10^{6k-12} + \ldots + 111111 \cdot 10^6 + 111111 \qquad (*)$$

schreiben. Daraus wird ersichtlich, dass eine Zahl, die nur aus Ziffern 1 besteht, sicherlich dann durch 13 teilbar ist, wenn die Anzahl der Ziffern durch 6 teilbar ist.

Entsprechend gilt

$1 \equiv 1 \text{ mod } 17 \qquad 10 \equiv 10 \text{ mod } 17 \qquad 10^2 \equiv -2 \text{ mod } 17$

$10^4 \equiv 4 \text{ mod } 17 \qquad 10^8 \equiv 16 \text{ mod } 17 \equiv -1 \text{ mod } 17$

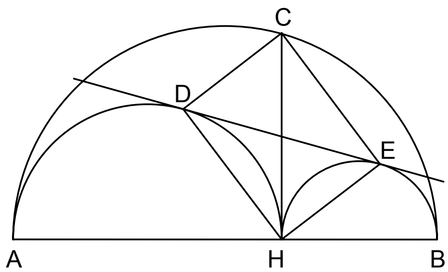
Wie bei der Teilbarkeit durch 13 kann man daraus folgern, dass eine Zahl 111... 111, die sechzehnmal die Ziffer 1 enthält durch 17 teilbar ist. Ist die Anzahl der Ziffern 1 in der Zahl 111.. .111 ein Vielfaches von 16, so kann man die Zahl entsprechend (*) wieder in eine Summe zerlegen, in der jeder einzelne Summand durch 17 teilbar ist.
Betrachtet man nun die Zahl z' = 111... 111 aus 48 (= ggT(6,16)) Ziffern 1, so ist sie durch 13 und durch 17 teilbar. Da 13 und 17 teilerfremd sind, ist z' auch durch das Produkt von 13 und 17 teilbar.

Aufgabe 4

Auf einem Halbkreis über AB wird ein Punkt C beliebig gewählt. Die Senkrechte zu AB durch C schneidet AB in H. Über AH und HB werden erneut Halbkreise gezeichnet.

Die gemeinsame Tangente berührt die beiden Halbkreise in den Punkten D und E.

Zeige: Das Viereck DHEC ist ein Rechteck.



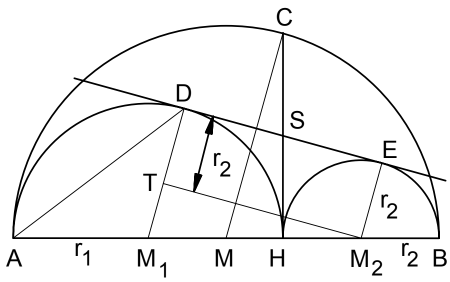
Vorüberlegungen

Für die folgenden Lösungen wird stets vorausgesetzt, dass |AH| > |HB| gilt.

Ist dies nicht der Fall, so kann man diese Eigenschaft durch eine Spiegelung der Gesamtfigur an der Mittelsenkrechten von AB bzw. eine Umbenennung der Punkte A und B erreichen. Bei manchen Lösungen ist eine Fallunterscheidung erforderlich. Für die Radien r_1 und r_2 der beiden eingezeichneten Halbkreise gilt nach Aufgabenstellung $2r_1 + 2r_2 = 2r$, d.h. $r = r_1 + r_2$.

1. Lösung

Es wird nachgewiesen, dass die Strecken DE und HC gleich lang sind und sich gegenseitig halbieren. Dieser Nachweis erfolgt in zwei Schritten.



a) Zeichnet man in die Figur eine Parallele zu DE durch M_2 ein, so schneidet diese Parallele die Strecke M_1D im Punkt T. (Für |AH| = |HB| fällt T mit M_1 zusammen.)

   Da diese Parallele orthogonal zu M_2E und M_1D ist, entsteht ein Rechteck TM_2ED mit $|TD| = r_2$.

   Trägt man noch die Verbindungsstrecke MC ein, so sind die Dreiecke M_1M_2T und MHC kongruent, denn es gilt:

   $$\left|M_1M_2\right| = 2r - r_1 - r_2 = 2\cdot\left(r_1 + r_2\right) - r_1 - r_2 = r_1 + r_2 = \left|MC\right|, \qquad (1)$$

   $$\left|M_1T\right| = r_1 - r_2 = r_1 + r_2 - 2r_2 = r + \left|HB\right| = \left|MH\right|, \qquad (2)$$

   Der Winkel gegenüber der längeren Seite ist jeweils ein rechter. (3)

   Die Kongruenz folgt aus (1) bis (3) und dem Kongruenzsatz Ssw.

   Aus dieser Kongruenz folgt dann auch die Gleichheit der dritten Seitenlänge $|TM_2|$ und |HC|.

   Damit gilt: $|DE| = |TM_2| = |HC|$.

b) Nach Konstruktion ist die Gerade (HC) orthogonal zu (AB) und damit Tangente an die beiden Halbkreise über AH bzw. HB. Da die Tangentenabschnitte von einem Punkt S außerhalb eines Kreises gleich lang sind, gilt

   |SH| = |SD| und |SH| = |SE| also $\left|SH\right| = \left|SD\right| = \left|SE\right| = \frac{1}{2}\left|DE\right|$.

   Zusammen mit $\left|SC\right| + \left|SH\right| = \left|DE\right| = 2\cdot\left|SH\right|$ folgt dann |SC| = |SH|.

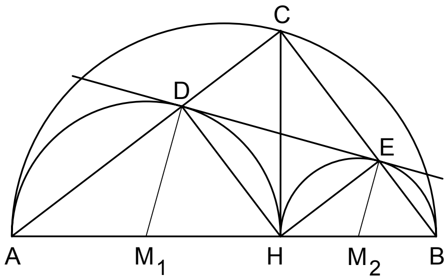
   Zeichnet man einen Kreis um S mit dem Radius $\frac{1}{2}\left|HC\right|$, so liegen die vier Punkte H, E, C und D auf diesem Kreis. Nach dem Satz des Thales sind deshalb alle vier Innenwinkel des Viereckes HECD rechte Winkel.

2. Lösung

Die Gleichheit der Streckenlängen DE und HC wird mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bzw. des Höhensatzes bewiesen. Die weitere Lösung entspricht der 1. Lösung.

3. Lösung

Der Nachweis der Rechteckeigenschaft erfolgt allein durch Winkelbetrachtungen.



Die nebenstehende Figur ist entsprechend der Konstruktionsanweisung der Aufgabenstellung entstanden. Zusätzlich wurden noch die Strecken AD, M_1D, M_2E und BE eingezeichnet.

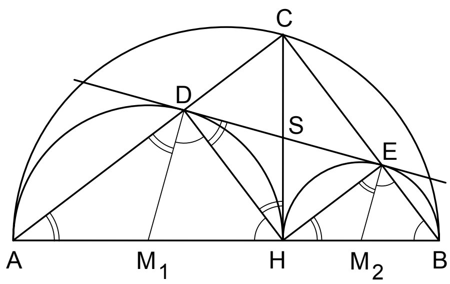
Auf Grund dieser Konstruktion sind die Geraden (M_1D) und (M_2E) orthogonal zu (DE) und somit parallel zueinander.

In dieser Figur gilt nun:

1) $w(BM_2E) = w(HM_1D)$ (Stufenwinkel).

2) Die beiden Dreiecke AHD und HBE sind nach dem Satz des Thales rechtwinklig.

3) Die Strecken M_1D und M_2E zerlegen die Dreiecke AHD und HBE jeweils in zwei gleichschenklige Dreiecke, da $|M_1H| = |M_1D| = |M_1A|$ und $|M_2H| = |M_2B| = |M_2E|$ gilt.



Aus den Eigenschaften 2) und 3) folgt die Gleichheit der in der Abbildung gleich markierten Winkelmaße. Bezeichnet man $\measuredangle M_1AD$ mit α und $\measuredangle EBM_2$ mit β, so folgt aus Eigenschaft 1:

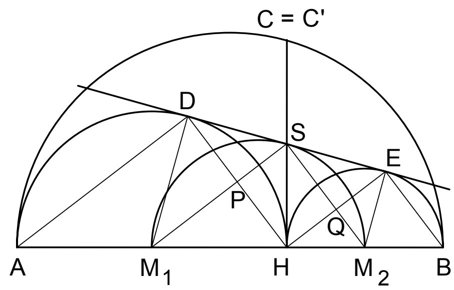
$$2\alpha = 180° - 2\beta \text{ also } \alpha + \beta = 90° .$$

Damit folgt aber auch, dass der Winkel $\measuredangle$ EHD ein rechter Winkel ist.

Die Vierecke M_1HSD und M_2ESH sind rechtwinklige Drachen. Die Strecken M_1S und M_2S stehen deshalb orthogonal auf DH bzw. HE und halbieren diese.

Da diese Strecken gleichzeitig die Winkelhalbierenden der Winkel bei S sind, gilt

$$w(M_1SM_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(w(DSH) + w(HSE)\right) = 90° .$$



Das Dreieck M_1M_2S ist deshalb rechtwinklig.

Bezeichnet man die Halbierungspunkte mit P und Q, so ist das Viereck HQSP ein Rechteck, da alle Winkel jeweils 90° betragen. Durch eine zentrische Streckung mit Zentrum H und Streckfaktor 2 wird M_1 auf A, M_2 auf B, der Halbkreis über M_1M_2 auf den Halbkreis über AB, P auf D, Q auf E und S auf einen Punkt C abgebildet.

Dieser Punkt C liegt also einerseits auf der Halbgeraden HS und andererseits auf dem Halbkreis über AB. Deshalb gilt C' = C.

Das Rechteck HQSP wird also auf das Viereck HECD abgebildet. Da bei einer zentrischen Streckung die Winkelmaße erhalten bleiben, ist auch HECD ein Rechteck.