1989

Runde 1

Aufgabe 1

Schneide aus Papier zwei kongruente konvexe Vierecke aus. Zerschneide das eine längs der einen, das andere längs der anderen Diagonalen.

Kannst Du die vier entstandenen Dreiecke immer zu einem Parallelogramm zusammenlegen?

Begründe Deine Antwort.

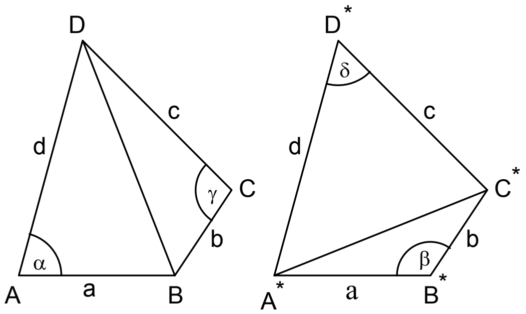
Hinweis: Ein Viereck heißt konvex, wenn seine Diagonalen vollständig im Innern verlaufen.

Behauptung

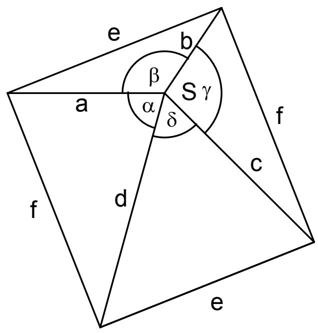
Es ist immer möglich, aus den vier bei der Zerlegung entstandenen Dreiecken ein Parallelogramm zu legen.

1. Lösung

Die beiden kongruenten Vierecke werden wie angegeben zerlegt und benannt.



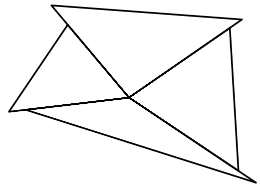
Nun legen wir die vier Dreiecke so zusammen, dass die Punkte A, B*, C und D* im Punkt S zusammenfallen.



Die neue Figur ist ein Viereck, denn es gelten die folgenden Eigenschaften.

Die Summe der Winkel bei S beträgt 360°, denn es tritt dort jeder Winkel des ursprünglichen Viereckes genau einmal auf. Die Winkelsumme in jedem Viereck beträgt 360°. Also liegen die Kanten der vier Dreiecke lückenlos und überschneidungsfrei nebeneinander.

Die aneinander stoßenden Kanten der Teildreiecke sind gleich lang, da sie bei den beiden gegebenen Vierecken einander entsprachen. Beim Zusammenfügen der Teildreiecke kann also nicht die Situation eintreten, wie sie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt ist.



Es bleibt zu zeigen, dass die neue Figur ein Parallelogramm ist.

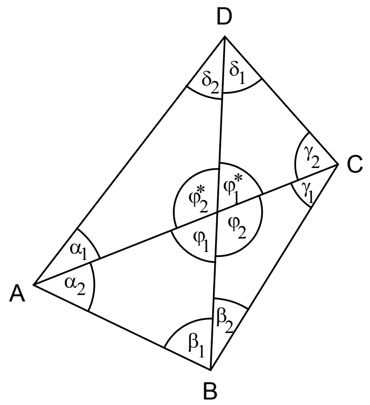
Die jeweils einander gegenüberliegenden Seiten der neuen Figur entsprechen den Diagonalen der ursprünglichen Vierecke und sind deshalb gleich lang. Ein Viereck, bei dem die Längen der gegenüberliegenden Seiten paarweise übereinstimmen, ist aber ein Parallelogramm.

2. Lösung

Entsprechend der ersten Lösung sei bereits gezeigt, dass sich die vier Teildreiecke zu einem Viereck PQRS zusammenfügen lassen.

Die Parallelogrammeigenschaft des neu gebildeten Viereckes wird nun durch den Nachweis erbracht, dass die benachbarten Innenwinkel sich zu 180° ergänzen und die einander gegenüberliegenden gleich groß sind.

Dazu betrachten wir ein beliebiges Viereck ABCD mit seinen beiden Diagonalen und dem Diagonalenschnittpunkt T.



Werden die Winkel wie in der nebenstehenden Figur unten benannt, so gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck

$$\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1=180^\circ \qquad (\Delta\ ABC)$$

$$\alpha_1+\gamma_2+\delta_1+\delta_2=180^\circ \qquad (\Delta\ ACD)$$

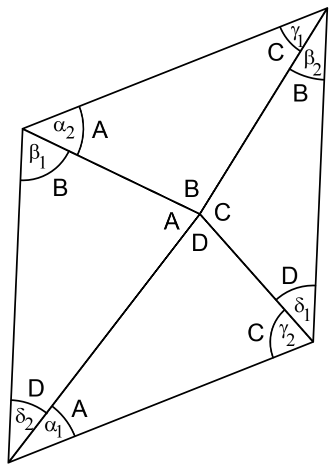
$$\alpha_2+\beta_1+\gamma_1=\gamma_2+\delta_1+\varphi_1^* \qquad (\Delta\ ABT \text{ und } \Delta\ TCD)$$

$$\beta_2+\gamma_1+\varphi_2=\delta_2+\alpha_1+\varphi_2^* \qquad (\Delta\ BCT \text{ und } \Delta\ TDA)$$

Wegen der Gleichheit der Scheitelwinkel φ_1 und φ_1^* bzw. φ_2 und φ_2^* folgt aus den letzten beiden Bedingungen

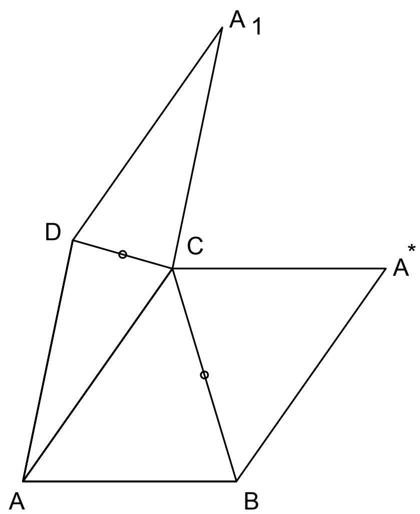
$$\alpha_2+\beta_1=\gamma_2+\delta_1 \text{ und } \alpha_1+\delta_2=\gamma_1+\beta_2 .$$

Die behaupteten Winkeleigenschaften des Vierecks PQRS ergeben sich aus der nebenstehenden Figur.



3. Lösung

Es wird gezeigt, dass die vier Teildreiecke ABC, BCD, CDA und DAB eines beliebigen Viereckes ABCD durch zwei Punktspiegelungen und eine Verschiebung auf ein Parallelogramm abgebildet werden können. Durch Spiegelung der Dreiecke ABC bzw. ACD an den Mittelpunkten der Strecken BC bzw. CD ist die nebenstehende Abbildung entstanden.



Nach Konstruktion sind die Seiten BA* und DA_1 parallel zu AC, und es gilt

$|BA^*| = |AC| = |DA_1|$.

Durch die Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ wird deshalb das Dreieck ABD auf das Dreieck CA^*A_1 abgebildet. Nach dieser Verschiebung erhalten wir ein Viereck BA^*A_1D, in dem nach den drei Abbildungen die Seiten BA* und DA_1 sowie BD und A^*A_1 paarweise parallel sind. Das Viereck ist deshalb ein Parallelogramm. Es setzt sich außerdem aus dem Teildreieck BCD und den kongruenten Bildern der Dreiecke ABC, CDA und ABD des gegebenen Viereckes zusammen.

Aufgabe 2

Die Zahlen 4 (= 2^2) und 2226064 (= 1492^2) sind Quadratzahlen mit lauter geraden Ziffern.

Bestimme alle Quadratzahlen, die nur aus ungeraden Ziffern bestehen, und weise nach, dass es keine weiteren geben kann.

Lösung

Vorbemerkung

Da das Quadrat einer geraden Zahl stets gerade ist, kann man die Untersuchung auf ungerade Zahlen beschränken. Bei den folgenden Lösungen wird deshalb stets von einer ungeraden Zahl ausgegangen.

1. Lösung

Das Quadrat einer einstelligen ungeraden Zahl ist ein- oder zweistellig. Von den fünf möglichen Fällen 1, 9, 25, 49 und 81 (*) haben nur die Quadratzahlen 1 und 9 nur ungerade Ziffern.

Betrachtet man nun eine mindestens zweistellige ungerade Zahl z, so kann man z in der Form $z = 10a + r$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $r \in \{1,3,5,7\}$ schreiben. Berechnet man z^2, so erhält man aus dieser Darstellung

$z^2 = 100a^2 + 20ar + r^2$.

Die Einerziffer von z^2 ist die Einerziffer von r^2. Sie ist stets ungerade. Die Zehnerziffer von z^2 ist die Zehnerziffer aus der Summe von $20 \cdot a \cdot r$ und r^2. Das Produkt $20 \cdot a \cdot r$ hat Vielfaches von 20 stets eine gerade Zehnerziffer besitzt. Die Zehnerziffer von r^2 ist nach (*) ebenfalls gerade ist, falls r^2 überhaupt zweistellig ist. Damit ist die Zehnerziffer von z^2 stets gerade.

Es gibt also keine mehrstelligen Quadratzahlen, die nur aus ungeraden Ziffern bestehen. Die Zahlen 1 und 9 sind also die einzigen Quadratzahlen aus ungeraden Ziffern.

2. Lösung

a) Berechnet man die Quadrate der ungeraden Zahlen kleiner als 100 oder entnimmt diese Zahlen einer Tabelle, so stellt man fest, dass mit Ausnahme der Quadratzahlen 1 und 9 alle anderen ungeraden Quadratzahlen aus diesem Bereich eine gerade Zehnerziffer haben.

b) Ist z eine ungerade und mindestens dreistellige Zahl, so lässt sie sich in der Form $z = 100a + b$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \{1,3,5,\ldots,97,99\}$ schreiben. Daraus erhält man für z^2 die Darstellung

$z^2 = 10000a^2 + 200ab + b^2$.

Die Einer- und die Zehnerziffer von z^2 werden alleine von b^2 bestimmt, da die beiden anderen Summanden keinen Einfluss auf die letzten beiden Ziffern haben. Da nach a) die Zehnerziffer von b^2 aber gerade ist, folgt dies auch für z^2. Die Zahlen 1 und 9 sind die einzigen Quadratzahlen nur aus ungeraden Ziffern.

3. Lösung

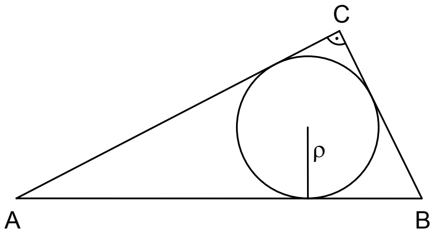
Bei jeder mehrstelligen Quadratzahl mit ungerader Einerziffer ist die Zehnerziffer gerade. Um dies nachzuweisen, betrachtet man das übliche Multiplikationsschema.

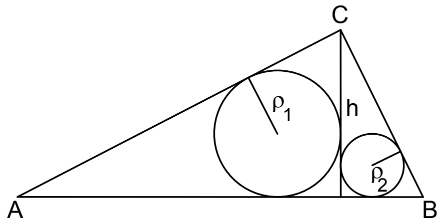
$$\begin{array}{ccccccc|c|c}
c & b & a & \cdot & & & c & b & a \\
\hline
 & & & & & & ac & ab & a^2 \\
 & & & & & bc & b^2 & ab & \\
 & & & & c^2 & bc & ac & & \\
 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & 2ab & a^2
\end{array}$$

Die Zehnerziffer des Quadrates entsteht aus der Einerziffer von 2ab und einem eventuell auftretenden Übertrag von a^2 . Die Einerziffer a kann die Werte 1, 3, 5, 7 oder 9 annehmen. Das Quadrat von a ist somit 1, 9, 25, 49 oder 81. Wenn ein Übertrag auftritt, so ist dieser gerade. Die Einerziffer von 2ab ist ebenfalls gerade, da 2ab gerade ist. Die Summe von zwei geraden Zahlen ist selbst aber gerade. Damit ist die Zehnerziffer einer mehrstelligen ungeraden Quadratzahl stets gerade. Die Zahlen 1 und 9 sind also die einzigen Quadratzahlen aus ungeraden Ziffern.

Aufgabe 3

Ein rechtwinkliges Dreieck ABC wird durch seine Höhe CD mit der Länge h in zwei Teildreiecke zerlegt.





Der Inkreis von Dreieck ABC hat den Radius ρ, die Teildreiecke ADC und CBD haben Inkreise mit den Radien ρ_1 bzw. ρ_2.

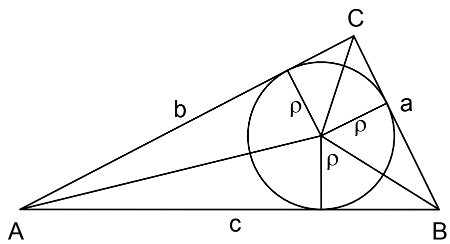
Zeige: $\rho + \rho_1 + \rho_2 = h$

Hinweis

Bei den einzelnen Lösungen wird immer wieder ausgenutzt, dass der Mittelpunkt M des Inkreises durch die Winkelhalbierenden eines Dreieckes bestimmt ist. Auf diese Eigenschaft wird in den Lösungen nicht nochmals hingewiesen.

1. Lösung

Zunächst soll eine Beziehung zwischen den Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks und dem Radius seines Inkreises hergeleitet werden. Dazu verbindet man den Mittelpunkt des Inkreises mit den Eckpunkten des gegebenen Dreieckes. Es so entstehen drei Teildreiecke mit der Höhe ρ.



Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC lässt sich mit den angegebenen Benennungen auf zweierlei Weise darstellen als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b,$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \rho + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \rho + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \rho = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) \cdot \rho .$$

Daraus folgt zunächst $\rho = \dfrac{a \cdot b}{a+b+c}$

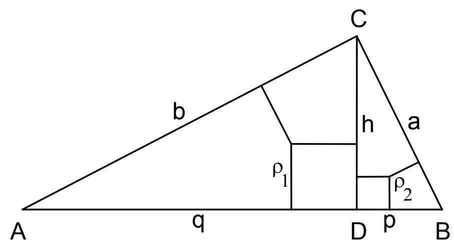
Durch Erweitern mit a + b + c und unter Berücksichtigung von $a^2 + b^2 = c^2$ erhält man

$$\rho = \frac{a \cdot b \cdot (a+b-c)}{(a+b+c) \cdot (a+b-c)} = \frac{a \cdot b \cdot (a+b-c)}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2} = \frac{a \cdot b \cdot (a+b-c)}{2ab} = \frac{1}{2} \cdot (a+b-c).$$

Entsprechend gilt in den beiden rechtwinkligen Teildreiecken ADC und DBC mit den Benennungen der folgenden Figur:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \cdot (q+h-b),$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2} \cdot (p+h-a).$$

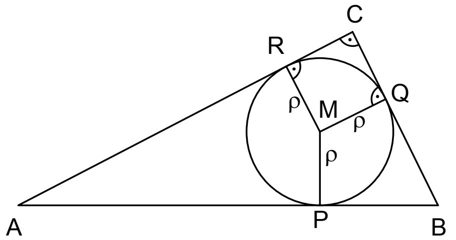


Fasst man die drei Gleichungen zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned}\rho+\rho_1+\rho_2 &= \frac{1}{2}\cdot\left(a+b-c+q+h-b+p+h-a\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(2h+p+q-c\right)\\ &= h.\end{aligned}$$

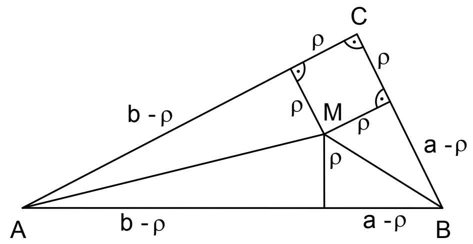
2. Lösung

In der nebenstehenden Figur sind P, Q und R die Berührpunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten. Die Strecken MP, MQ und MR sind deshalb orthogonal zu AB, BC bzw. CA. Das Viereck MQCR ist ein Quadrat mit der Seitenlänge p, denn nach Konstruktion sind drei Innenwinkel des Vierecks QCRM rechte Winkel, und die beiden benachbarten Seiten MQ und MR sind gleich lang. QCRM ist deshalb ein Quadrat.



Die beiden Vierecke APMR und BQMP sind rechtwinklige Drachen mit den Winkelhalbierenden (AM) bzw. (BM) als Symmetrieachsen.

Aus der Quadrat- und der Symmetrieeigenschaft ergeben sich die in der Abbildung eingetragenen Streckenlängen.



Daraus folgt schließlich

$$a-\rho+b-\rho=c \text{ und } \rho=\frac{1}{2}\cdot\left(a+b-c\right).$$

Entsprechend erhält man in den Teildreiecken ADC und BCD die Beziehungen

$$\rho_1 == \frac{1}{2}\cdot\left(q+h-b\right) \text{ und } \rho_2=\frac{1}{2}\cdot\left(p+h-a\right).$$

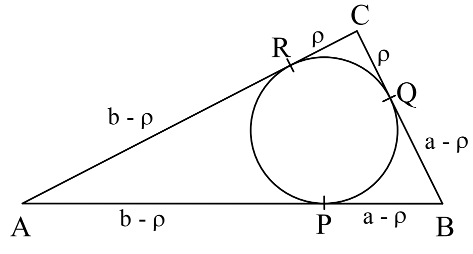
Die weitere Schlussfolgerung entspricht der ersten Lösung.

3. Lösung

Die Beziehung $\rho=\frac{1}{2}\cdot\left(a+b-c\right)$ aus den ersten beiden Lösungen erhält man auch aus der Eigenschaft, dass die beiden Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis gleich lang sind.

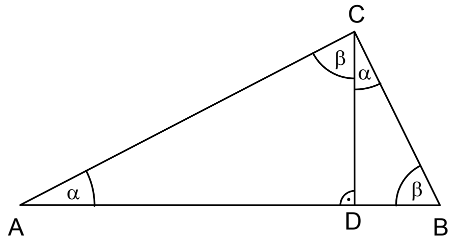
Deshalb gilt in der Figur

|AP| = |AR|, |BP| = |BQ| bzw. |CQ| = |CR|.



Wie in Lösung 2 bereits gezeigt, gilt außerdem |CQ| = |CR| = ρ. Somit erhält man die gleichen Längenbeziehungen wie sie in der Abbildung zu Lösung 2 angegeben sind.

4. Lösung



Durch die Höhe CD wird das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke ADC und BCD zerlegt, die nach dem dritten Ähnlichkeitssatz untereinander und zum vorgegebenen Dreieck ähnlich sind. Zum Nachweis betrachtet man die Winkelsumme in den Teildreiecken.
Aus der Ähnlichkeit folgt für das Verhältnis der Seitenlängen und der Inkreisradien

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, ADC \qquad \frac{\rho_2}{\rho} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c \cdot \rho_2 = b \cdot \rho\,, \qquad (1)$

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DBC \qquad \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c \cdot \rho_1 = a \cdot \rho\,. \qquad (2)$

Außerdem gilt für die Fläche des Ausgangsdreieckes

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (a + b + c)\,.$$

Daraus folgt $\qquad c \cdot h = a \cdot \rho + b \cdot \rho + c \cdot \rho\,.$

Die Summanden $a \cdot \rho$ und $b \cdot \rho$ können mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) ersetzt werden. Es ergibt sich

$$c \cdot h = c \cdot \rho_1 + c \cdot \rho_2 + c \cdot \rho$$

und damit die behauptete Beziehung.

Aufgabe 4

a) Welche der Zahlen 11, 101, 1001, 10001, 100001, 1000001 sind Primzahlen?

b) Zeige: Die Zahl $1\underbrace{0000...0000}_{1989\text{ Nullen}}1$ ist keine Primzahl.

Lösung

a) Durch direktes Nachrechnen stellt man fest, dass von den vorgegebenen Zahlen nur 11 und 101 Primzahlen sind. Für die anderen Zahlen gilt:

$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $\quad 10001 = 73 \cdot 137$,

$100001 = 11 \cdot 9091$, $\quad 1000001 = 101 \cdot 9901$.

b) Für den Nachweis, dass z = 10000...00001 (1989 Nullen) keine Primzahl ist, gibt es mehrere Möglichkeiten. Die ersten beiden gehen von der Beobachtung aus, dass nach 101, 1000001 auch die Zahlen 10000000001, 100000000000001, 1000000000000000001 usw. durch 101 teilbar sind. Man kann daraus die Vermutung ableiten, dass eine Zahl der Form 1000...0001 dann durch 101 teilbar ist, wenn die Anzahl der Nullen sich in der Form 4k+ 1 $(k \in \mathbb{N})$ darstellen lässt. Wenn dieser Nachweis gelingt, so ist 101 auch ein Teiler der Zahl z, da $1989 = 4 \cdot 497 + 1$ gilt.

1. Lösung

Bei der Division von 10^n $(n \in \mathbb{N})$ durch 101 treten die Reste 1, 10, 100, 91 periodisch in dieser Reihenfolge immer wieder auf.

```
10 | 0000 | 0000 | 0000 | 0...0 | 0000 | 1 : 101=99009900 ... 9901
 9   09
 --------
     910
     909
     ----
      10 | 00
       9   09
       --------
          910
          909
          ----
           10 | 00
            9   09
            --------
               910
               909
               ----
                10
                        10 | 00
                         9   09
                        --------
                            910
                            909
                            ----
                             10 | 1
```

Wird die Einerziffer von $10^n + 1$ dem Rest 10 angefügt, dann geht die Division auf. Der Rest 10 erscheint erstmals bei der ersten Null des Dividenden und wegen der Periodizität der Länge 4 immer bei der 4k + 1- ten Null. Wenn also 4k + 1 Nullen in der Zahl vorkommen, dann geht die Division auf.

2. Lösung

Durch Multiplikation von 990099009900...009901 (496 Blöcke "9900" mit abschließender Ziffernfolge "9901") mit 101 ergibt sich die Zahl z, wie das nachstehende Multiplikationsschema zeigt.

9900	9900	9900	99......00	$9901\cdot 101$
9900	9900	9900	9900	9901
99	0099	0099	00......99	009901
10000	0000	0000	00......00	000001

Zählt man die Anzahl der Nullen im Produkt, so erhält man den Term $4+4\cdot 495+5=1989$.

3. Lösung

Die Zahl $z=10^{1990}+1$ ist durch 101 teilbar.

Begründung

Die Zahl z ist durch 101 teilbar, wenn d = z – 101 durch 101 teilbar ist. Diese Differenz d hat die Form:
$d=10^{1990}+1-101=10^{1990}-100=10^2\cdot\left(10^{1988}-1\right)=9999\ldots999900$.

Die Ziffer "9" kommt in d 1988 mal vor. Die Zahl d lässt sich umformen zu:

$$d=\left(9999\cdot 10^{1984}+9999\cdot 10^{1980}+9999\cdot 10^{1976}+\ldots+9999\cdot 10^4+9999\right)\cdot 100$$

$$=9999\cdot\left(10^{1984}+10^{1980}+10^{1976}+\ldots+10^4+1\right)\cdot 100$$

$$=101\cdot 99\cdot\left(10^{1984}+10^{1980}+10^{1976}+\ldots+10^4+1\right)\cdot 100\ .$$

Aus dieser Produktdarstellung von d folgt unmittelbar die Teilbarkeit durch 101. Damit ist aber auch d + 101 = z durch 101 teilbar.

4. Lösung

Durch Ausmultiplizieren bestätigt man, dass für alle a, b gilt:

$$a^5+b^5=\left(a+b\right)\cdot\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right). \qquad (*)$$

Die Zahl $z=10^{1990}+1$ lässt sich auch in der Form $z=\left(10^{398}\right)^5+\left(1^{398}\right)^5$ darstellen.

Nach (*) folgt daraus

$$z=\left(10^{398}+1\right)\cdot\left(10^{398\cdot 4}-10^{398\cdot 3}+10^{398\cdot 2}-10^{398}+1\right).$$

Beide Faktoren sind von 1 und damit auch von $10^{1990}+1$ verschieden. Die gegebene Zahl ist deshalb keine Primzahl.

Die folgende Lösung verwendet das Rechnen mit Kongruenzen.

5. Lösung

Die gegebene Zahl z lässt sich in der Form $10^{1990}+1$ darstellen. Daraus ergibt sich:

$$z=10^{1990}+1=\left(10^{2}\right)^{995}+1\,.$$

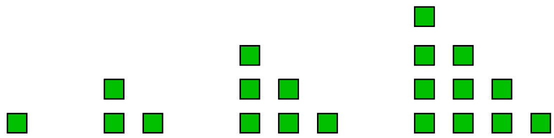
Es gilt nun:

$$100\equiv -1 \bmod 101 \;\Leftrightarrow\; 100^{995}\equiv\left(-1\right)^{995} \bmod 101 \;\Leftrightarrow\; 100^{995}\equiv -1 \bmod 101 \;\Leftrightarrow$$
$$10^{1990}+1\equiv 0 \bmod 101\,,$$

d.h. $10^{1990}+1$ ist durch 101 teilbar.

Aufgabe 5

Die Zahlen 1, 3, 6, 10,.... heißen Dreieckszahlen, da sie sich auf die nebenstehende Weise in Dreiecksform veranschaulichen lassen:



Weise nach, dass das Produkt von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen stets das Achtfache einer Dreieckszahl ist.

1. Lösung

Zunächst werden die Dreieckszahlen d(n) in Abhängigkeit von der Anzahl n der Punkte längs der Dreiecksseiten dargestellt. Die Zahlen 1, 3, 6, 10,... ergeben sich entsprechend dem Aufbau der Dreiecke durch die Addition der ersten n natürlichen Zahlen. Die Dreieckszahlen d(n) lassen sich durch

$d(n) = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$ darstellen.

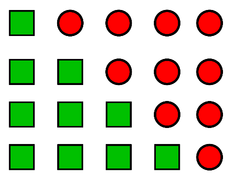
1. Begründung

Wird die Summe der ersten n natürlichen Zahlen einmal in aufsteigender und einmal in absteigender Reihenfolge notiert, so ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der folgenden Tabelle.

$$\begin{array}{rcccccccccc}
d(n) & = & 1 & + & 2 & + & ... & + & (n-1) & + & n \\
d(n) & = & n & + & (n-1) & + & ... & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2\cdot(n) & = & (n+1) & + & (n+1) & + & ... & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

2. Begründung

Nehmen wir zwei Dreiecke mit n Punkten längs einer Seite und dreht eines davon um 180°, so können wir die beiden zu einem Rechteck mit den Seitenlängen n und n + 1 zusammenfügen, wie die Abbildung am Beispiel von n = 4 zeigt.



Jedes Rechteck, das durch Aneinanderfügen von zwei identischen Dreiecken mit n Punkten längs einer Seite entsteht, weist insgesamt $n \cdot (n+1)$ Punkte auf.

Auf jedes Dreieck entfallen somit $d(n) = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$ Punkte.

Weitere Zielsetzung

Nach Aufgabenstellung ist zu zeigen, dass es für jeweils vier aufeinander folgende natürliche Zahlen k, k + 1, k + 2, k + 3 eine natürliche Zahl n so gibt, dass

$$\frac{1}{8} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \text{ gilt.}$$

1. Begründung

Durch Termumformungen der linken Seite erhalten wir

$$\frac{1}{8} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) =$$

$$\frac{1}{8} \cdot k \cdot (k+3) \cdot (k+2) \cdot (k+1) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{k^2+3k}{2} \cdot \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2+3k}{2} \cdot \left(\frac{k^2+3k}{2} + 1 \right).$$

Dieses Produkt hat die Form $\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass $\frac{k^2+3k}{2}$ und damit auch $\frac{k^2+3k}{2}+1$ natürliche Zahlen darstellen.

Diese Terme sind stets ganzzahlig, denn k^2+3k lässt sich als Produkt $k\cdot(k+3)$ schreiben. Da einer der beiden Faktoren gerade ist, gilt dies auch für das Produkt.

2. Begründung

Durch Berechnung der Produkte von vier aufeinander folgenden Zahlen für kleine Werte von k versuchen wir, eine Gesetzmäßigkeit für die zugehörige Dreieckszahl d(n) herauszufinden, die dann allgemein nachgewiesen wird.

Wird die kleinste der vier Zahlen mit k bezeichnet und die Nummer der zugehörigen Dreieckszahl mit n, so erhalten wir die folgende Tabelle.

k								n
1	$1\cdot2\cdot3\cdot4$	=	24	=	$8\cdot3$	=	$8\cdot d(2)$	2
2	$2\cdot3\cdot4\cdot5$	=	120	=	$8\cdot15$	=	$8\cdot d(5)$	5
3	$3\cdot4\cdot5\cdot6$	=	360	=	$8\cdot45$	=	$8\cdot d(9)$	9
4	$4\cdot5\cdot6\cdot7$	=	840	=	$8\cdot105$	=	$8\cdot d(14)$	14

Ein Vergleich der Zahlenfolge 2, 5, 9, 14 für n mit den Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 14,... zeigt, dass jede Zahl um eins kleiner ist als die Dreieckszahl mit der Nummer k + 1.

Für die Zahl n gilt demnach $n=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}-1=\frac{k^2+3k}{2}$. Diese Zahl n ist stets ganzzahlig, wie bereits beim ersten Nachweis gezeigt wurde.

Aus beiden Überlegungen kann für den Zusammenhang zwischen k und n die folgende Behauptung abgeleitet werden.

Ist k die kleinste der vier aufeinander folgenden Zahlen, so ist das Produkt dieser vier Zahlen das Achtfache von d(n) mit $n=\frac{k^2+3k}{2}$.

Beweis:

Einerseits gilt $d(n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2+3k}{2}\cdot\left(\frac{k^2+3k}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2+3k}{2}\cdot\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{1}{8}\cdot\left(k^4+6k^3+11k^2+6k\right)$.

Andererseits folgt durch Ausmultiplizieren

$$k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)=\left(k^2+k\right)\cdot\left(k^2+5k+6\right)=k^4+6k^3+11k^2+6k\ .$$

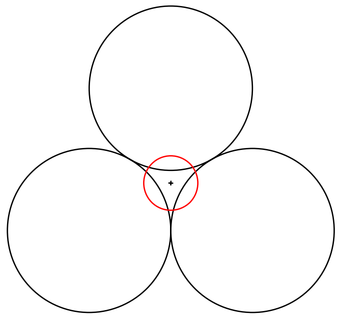
Damit ist nachgewiesen, dass das Produkt von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen das Achtfache einer Dreieckszahl ist.

Aufgabe 6

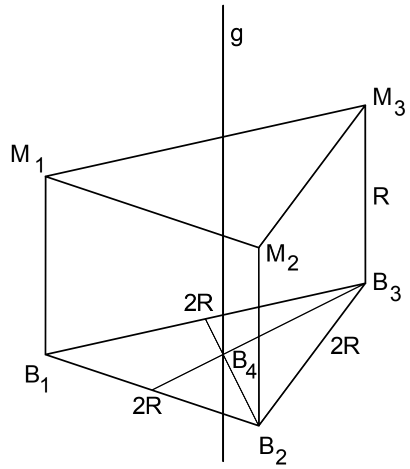
Vier Holzkugeln liegen auf einem Tisch. Jede Kugel berührt die Tischebene und die drei anderen Kugeln. Drei der vier Kugeln haben den Radius R.

Bestimme den Radius r der vierten Kugel.

Lösung



Damit alle vier Kugeln sich gegenseitig und die Tischplatte berühren können, muss die vierte Kugel kleiner sein und auf der Tischplatte zwischen den drei großen Kugeln liegen. Betrachtet man die Anordnung von oben, so bilden die Mittelpunkte der drei großen Kugeln ein gleichseitiges Dreieck $M_1M_2M_3$ mit der Seitenlänge 2R. Dieses gleichseitige Dreieck ist kongruent zum Dreieck $B_1B_2B_3$, das aus den Berührpunkten der drei großen Kugeln mit der Tischebene gebildet wird. Die beiden Dreiecke gehen durch eine Projektion senkrecht zur Tischplatte ineinander über.



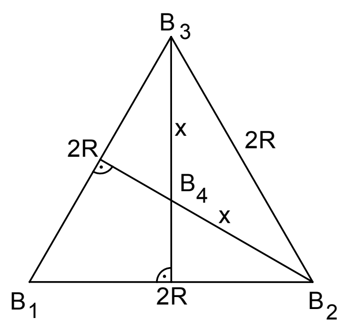
Das nebenstehende Bild zeigt das dreiseitige Prisma, dessen Grundflächen von den Mittelpunkten und den Berührpunkten der drei großen Kugeln gebildet werden. Der Mittelpunkt der vierten Kugel hat von den Mittelpunkten der drei großen Kugeln den Abstand R + r. Dieser Mittelpunkt liegt auf einer Geraden g, die senkrecht auf der Tischplatte steht und durch den Schwerpunkt des Dreieckes $M_1M_2M_3$ geht.

Begründung

Die Anordnung der drei großen Kugeln ist drehsymmetrisch zu g mit einem Drehwinkel von 120°. Da die kleine Kugel die drei großen gleichzeitig berühren soll, muss ihr Mittelpunkt auf dieser Symmetrieachse g liegen. Bei der senkrechten Projektion von oben geht der Mittelpunkt M_4 in den Schwerpunkt des Dreieckes $B_1B_2B_3$ über. Die Projektion des Mittelpunktes ist gleichzeitig auch der Berührpunkt B_4 der kleinen Kugel mit dem Tisch. In einem gleichseitigen Dreieck stimmen die Höhen und Seitenhalbierenden überein und teilen sich damit im Verhältnis 2:1.

Da für die Höhe h eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seitenlänge a die Beziehung $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ gilt, erhält man für den Abstand x des Berührpunktes B_4 von einem der anderen Berührpunkte aus der linken Zeichnung die Beziehung

$$x = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2R\sqrt{3} = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$$



Zeichnet man nun eine Schnittebene, die vertikal zur Tischplatte ist und durch den Mittelpunkt (z.B. M_3) einer großen Kugel und deren Berührpunkt mit der kleinen Kugel geht, so erhält man die rechte Abbildung. In ihr gilt nach dem Satz von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck

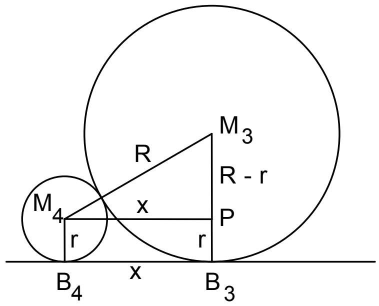
$$|M_3M_4|^2 = |PM_3|^2 + |PM_4|^2$$

$$(R + r)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}R\right)^2 + (R - r)^2$$

$$R^2 + 2rR + r^2 = \frac{4}{3}R^2 + R^2 - 2rR + r^2$$

$$4rR = \frac{4}{3}R^2$$

$$r = \frac{1}{3}R.$$



Der Radius der kleinen Kugel ist ein Drittel des Radius einer großen Kugel.