1988

Runde 1

Aufgabe 1

Die neun Ziffern 1, 2, 3,...., 9 werden jeweils auf eine Karte geschrieben. Aus diesen neun Karten wird ein 3x3 Quadrat gelegt.
Dadurch entsteht in jeder Zeile und in jeder Spalte eine dreistellige Zahl (Zeilenzahlen bzw. Spaltenzahlen).

a) Gib eine Verteilung so an, dass die Summe der drei Zeilenzahlen 1989 ergibt.

b) Gib eine Verteilung so an, dass die Summe der drei Zeilenzahlen und zugleich die Summe der drei Spaltenzahlen 1989 ergeben.

c) Weise nach, dass es keine Verteilung geben kann, bei der die Summe der drei Zeilenzahlen 1988 ist.

Lösung

a, b) Durch Probieren erhält man z.B. die nebenstehende Anordnung, für die sowohl die Summe der Zeilenzahlen als auch die Summe der Spaltenzahlen den Wert 1989 ergibt.

7	9	2
8	4	6
3	5	1

c) Beim Nachweis, dass 1988 nicht darstellbar ist, wird jeweils von der nebenstehenden Anordnung ausgegangen.
Dabei stellt jeder der Buchstaben a, b, ..., i genau eine der Zahlen 1, 2, ..., 9 dar.

Nachweis der Unmöglichkeit durch systematische Fallunterscheidung

Wenn es eine Möglichkeit geben soll, die Zahl 1988 darzustellen, so müssen die Summen der Einerziffern 8 oder 18, die Summe der Zehnerziffern 7, 8, 17 oder 18 und die Summe der Hunderterziffern 18 oder 19 ergeben. Dabei ist zu berücksichtigen, dass einige dieser Summenwerte wegen des Übertrags nicht gleichzeitig auftreten können.

Wenn jede der Ziffern genau einmal auftreten soll, so muss andererseits die Summe der Einer-, der Zehner- und der Hunderterziffern $1+2+3+...+9 = 45$ betragen.

Es wird gezeigt, dass dies nicht möglich ist.

Die möglichen Fälle sind:

$$\begin{array}{l cccc c cccc c cccc c cccc}
c+f+i = & & & & 8 & & & & & 8 & & & & 1 & 8 & & & & 1 & 8 \\
b+e+h = & & 1 & 8 & & & & & 8 & & & & & 7 & & & & 1 & 7 & \\
a+d+g = & 1 & 8 & & & & 1 & 9 & & & & 1 & 9 & & & & 1 & 8 & & \\
\hline
 & 1 & 9 & 8 & 8 & & 1 & 9 & 8 & 8 & & 1 & 9 & 8 & 8 & & 1 & 9 & 8 & 8 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\text{Ziffernsumme} & & 44 & & & & & 35 & & & & & 44 & & & & & 53 & &
\end{array}$$

Nachweis der Unmöglichkeit mit Hilfe von Teilbarkeitseigenschaften

Behauptung

Bei jeder Anordnung der geforderten Form ist die Summe der Zeilenzahlen $\overline{abc}$, $\overline{def}$ und $\overline{ghi}$ durch 9 (3) teilbar.

Da 1988 nicht durch 9 (3) teilbar ist, folgt dann, dass es keine Anordnung der neun Ziffern 1 bis 9 geben kann, bei der die Summe der Zeilenzahlen 1988 ergibt.

1. Beweis

Für die Summe S der drei Zahlen $\overline{abc}$, $\overline{def}$ und $\overline{ghi}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} S &= 100\cdot(a+d+g)+10\cdot(b+e+h)+c+f+i \\ &= 99\cdot(a+d+g)+9\cdot(b+e+h)+a+b+c+d+e+f+g+h+i \end{aligned}$$

Da die Summe der Ziffern von 1 bis 9 den Wert 45 ergibt, kann S für jede Anordnung der neun Ziffern in der Form

$$\begin{aligned} S &= 99\cdot(a+d+g)+9\cdot(b+e+h)+45 \\ &= 9\cdot\left[11\cdot(a+d+g)+b+e+h+5\right] \end{aligned}$$

geschrieben werden. S ist deshalb für alle Anordnungen der neun Ziffern durch 9 teilbar.

2. Beweis

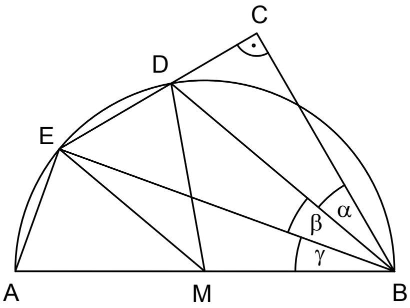
Der Neunerrest einer dreistelligen Zahl $\overline{abc} = 100a+10b+c$ stimmt wegen

$$100a+10b+c = 99a+9b+a+b+c$$

mit dem Neunerrest der Quersumme a + b + c überein.

Anstelle der Neunerreste von $\overline{abc}$, $\overline{def}$ und $\overline{ghi}$ kann man deshalb auch die Neunerreste der Quersummen betrachten. Da in der Summe der drei Quersummen jede der Ziffern 1, 2,..., 9 genau einmal vorkommt und $1+2+3+...+9=45$ ist, ist die Summe der drei Quersummen durch 9 teilbar. Damit ist aber auch die Summe der drei Zahlen $\overline{abc}$, $\overline{def}$ und $\overline{ghi}$ durch 9 teilbar.

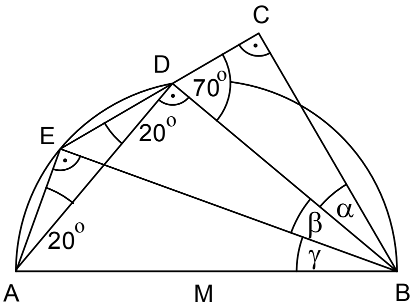
Aufgabe 2



In der nebenstehenden Figur gilt $\overline{AE} = \overline{ED}$ und $\alpha = 20°$.
Der Punkt D liegt auf EC. Berechne β und γ.

Behauptung: Es gilt $\beta = \gamma = 20°$.

Vorüberlegungen



Ergänzt man die gegebene Figur in der nebenstehenden Weise, so erhält man zusammen mit den Voraussetzungen in der Aufgabenstellung unmittelbar die folgenden Eigenschaften:

a) Das Dreieck ADE ist gleichschenklig.
b) w(AEB) = w(ADB) = 90° (Satz des Thales)
c) $|MA| = |MB| = |ME| = |MD|$
d) Die Dreiecke AME; EMD, DMB und EMB sind gleichschenklig.
e) Die Dreiecke AME und EMD sind außerdem nach dem Kongruenzsatz sss kongruent.

Aus der Gleichschenkligkeit und der Kongruenz der Dreiecke AME und EMD folgt außerdem

f) w(MAE) = w(AEM) = w(MED) = w(EDM)
g) w(BDC) = 70° ($\alpha = 20°$, w(DCB) = 90° und Winkelsumme im Dreieck BCD)
h) w(EDA) = 180° – 70° – 90° (gestreckter Winkel bei D, da $D \in EC$)
w(EDA) = 20°
i) w(DAE) = w(EDA) = 20° (gleichschenkliges Dreieck ADE)

Diese Winkelmaße sind nochmals in der Figur eingetragen.

1. Beweis von $\beta = \gamma = 20°$

w(AED) = $180° - 2 \cdot 20°$ (Winkelsumme im Dreieck AED)
w(AED) = 140°
w(BED) = w(AED) – w(AEB) = 50°

Aus w(AEM) = w(MED, w(AED) = 140° und f) folgt w(AEM) = w(MED) = w(MAE) = w(EDM) = 70°.

Nach den Berechnungen der Basiswinkel in den gleichschenkligen Dreiecken AME und EMD können jetzt die gesuchten Winkelmaße bestimmt werden.

γ = 180° – 70° – 90° = 20° (Winkelsumme im Dreieck ABE)
ß = 180° – 50° – 20° – 90° = 20° (Winkelsumme im Dreieck EBD)
w(EDA) = 20°

2. Beweis   (Umfangswinkel am Kreis)

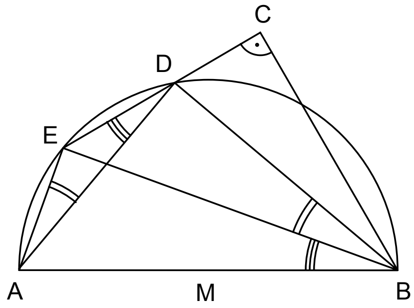
Nach Eigenschaft i) gilt

$w(DAE) = w(EDA) = 20°$.

Nach dem Satz über die Umfangswinkel im Kreis gilt:

$\gamma = w(EBA) = w(EDA) = 20°$ (Umfangswinkel über der Sehne AE)

$\beta = w(DBE) = w(DAE) = 20°$ (Umfangswinkel über der Sehne DE)



Aufgabe 3

In einer elfstelligen Zahl n wird die mittlere Ziffer gestrichen. Dadurch entsteht eine zehnstellige Zahl m.

Wie viele Zahlen n gibt es, die durch die zugehörige Zahl m teilbar sind?

Lösung

Vorüberlegungen

Bezeichnet man die elf Ziffern von n mit $a_{10}, a_9, \dots, a_1, a_o$ und $a_{10} \neq 0$, , so lassen sich n und m in der Form

$$n = \overline{a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_o}$$

$$= a_{10} \cdot 10^{10} + a_9 \cdot 10^9 + \ldots + a_6 \cdot 10^6 + a_5 \cdot 10^5 + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_o$$

und

$$m = \overline{a_{10}a_9a_8a_7a_6a_4a_3a_2a_1a_o}$$

$$= a_{10} \cdot 10^{10} + a_9 \cdot 10^9 + \ldots + a_6 \cdot 10^6 + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_o$$

darstellen.

Setzt man für die Zahlen $\overline{a_{10}a_9a_8a_7a_6} = a$, $a_5 = b$ und $\overline{a_4a_3a_2a_1a_o} = c$, so gilt:

$$10000 \leq a \leq 99999,$$
$$0 \leq b \leq 9,$$
$$0 \leq c \leq 99999$$

und $\quad n = a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c, \qquad (1)$

$$m = a \cdot 10^5 + c \qquad (2)$$

Nach Aufgabenstellung gilt $n = k \cdot m, \quad k \in \mathbb{N}$, d.h.

$$a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c = \left(a \cdot 10^5 + c\right) \cdot k \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \left(k \cdot 10^5 - 10^6\right) - b \cdot 10^5 + c \cdot (k-1) = 0 \qquad (*)$$

Behauptung

Diese Bedingung ist höchstens für k = 10 erfüllbar.

1. Beweis

Beweis durch Ausschluss der Fälle $k \geq 11$ und $k \leq 9$

a) Für $k \geq 11$ gilt:

$$a \cdot \left(k \cdot 10^5 - 10^6\right) - b \cdot 10^5 + c(k-1) \geq$$

$$a \cdot \left(11 \cdot 10^5 - 10^6\right) - b \cdot 10^5 + c(11-1) =$$

$$a \cdot 10^5 - b \cdot 10^5 + 10c =$$

$$10^5 \cdot (a-b) + 10c > 0$$

da nach Voraussetzung $a - b > 0$ ist.

Die Gleichung (*) ist also für $k > 11$ nicht erfüllbar.

b) Für $k \le 9$ folgt:

$$a \cdot \left(k \cdot 10^5 - 10^6\right) - b \cdot 10^5 + c\left(k-1\right) \ge$$

$$a \cdot \left(9 \cdot 10^5 - 10^6\right) - b \cdot 10^5 + c\left(9-1\right) =$$

$$-a \cdot 10^5 - b \cdot 10^5 + 8c =$$

$$-10^5 \cdot \left(a+b\right) + 8c$$

Da nach Festlegung von a und b die Summe von a und b größer als 10^4 ist, ist $\left(a+b\right) \cdot 10^5$ größer als 10^9 und $-\left(a+b\right) \cdot 10^5 + 8c$ negativ.

Es ist also auch für $k \le 9$ keine Lösung der Gleichung (*) möglich. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Beweis

Da n ein Vielfaches von m ist, muss die Polynomdivision von $n = a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c$ durch $m = a \cdot 10^5 + c$ den Rest Null ergeben.

Man erhält

$$\begin{array}{l} \left(a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c\right) \quad : \left(a \cdot 10^5 + c\right) = 10 + \dfrac{b \cdot 10^5 - 9c}{a \cdot 10^5 + c} \\ \underline{-\left(a \cdot 10^6 \qquad + 10c\right)} \\ \qquad\qquad b \cdot 10^5 - 9c \end{array}$$

Da nach Festlegung der Zahlen a, b und c der Nenner $a \cdot 10^5 + c \ge 10^9$ und der Zähler $\left|b \cdot 10^5 - 9c\right| < 10^6$ ist, folgt $0 \le \left|b \cdot 10^5 - 9c\right| : \left(a \cdot 10^5 + c\right) < 1$.

Die Zahl 10 ist also der einzig mögliche Quotientenwert.

3. Beweis

Da nach Voraussetzung n ein Vielfaches von m ist, ist m ein gemeinsamer Teiler von n und $k \cdot m$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist m ein Teiler von n und $10 \cdot m$.

Die Zahl m ist damit auch ein Teiler der Differenz von n und $10 \cdot m$. Aus den Darstellungen (1) und (2) erhält man

$$n - 10 \cdot m = a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c - 10 \cdot \left(a \cdot 10^5 + c\right) = b \cdot 10^5 - 9c .$$

Der Betrag von $b \cdot 10^5 - 9c$ ist kleiner als m. Deshalb ist die Differenz $n - 10 \cdot b$ nur dann durch m teilbar, wenn $b \cdot 10^5 - 9c$ gleich Null ist.

Damit gilt aber $n = 10 \cdot m$. Nachfolgend wird für diesen Fall die Anzahl der möglichen Zahlen bestimmt.

Aus dieser Gleichung folgt nun, dass n ein Vielfaches von 10 ist und seine Einerziffer a_o Null sein muss. Die Zahlen n und m haben somit die Form

$$n = \overline{a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1 0} \text{ und } m = \overline{a_{10}a_9a_8a_7a_6a_4a_3a_2a_1 0} .$$

Multipliziert man m mit 10, so folgt weiter, dass auch die Zehnerziffer a_1 von n gleich Null sein muss.

Führt man dieses Verfahren fort, so erhält man schließlich

$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$.

Damit gilt b = c = 0 als notwendige Bedingung für $n = k \cdot m$.

Für alle Zahlen $10000 \le a \le 99999$ gilt aber andererseits, dass $n = a \cdot 10^6$ das Zehnfache von $m = a \cdot 10^5$ ist.

Die Ziffern a_6 bis a_9 können aus {0, 1, 2,..., 9} frei gewählt werden. Die Ziffer a_{10} darf eine der neun Ziffern 1,..., 9 annehmen.

Somit gibt es $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ verschiedene Zahlen, welche die gestellten Bedingungen erfüllen.

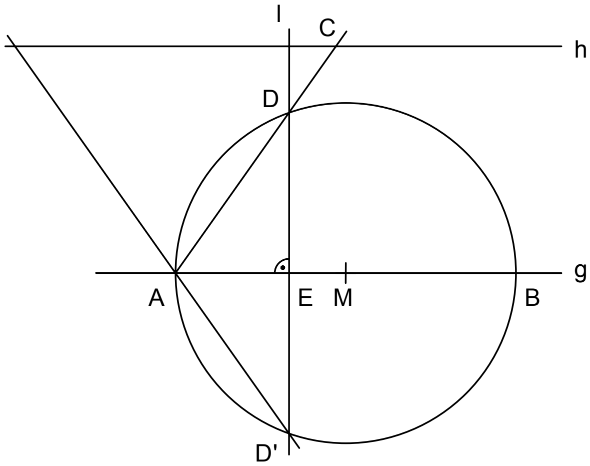
Aufgabe 4

Die Parallelen g und h haben den Abstand 6 cm. Auf g liegen Punkte A und B mit $|AB| = 9\text{cm}$. Konstruiere den Punkt C auf h so, dass die Strecke AC die gleiche Länge hat, wie das Lot von B auf (AC).

Weise nach, dass die konstruierte Figur die geforderte Eigenschaft besitzt.

1. Lösung

Konstruktion der angegebenen Figur

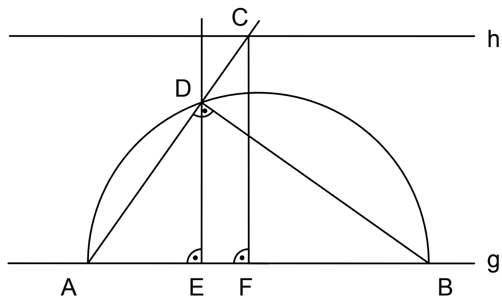


1. Konstruiere zwei parallele Geraden g und h mit einem Abstand von 6 cm.
2. Wähle auf g einen Punkt A und konstruiere einen Punkt B auf g mit |AB| = 9 cm.
3. Konstruiere auf der Strecke AB einen Punkt E so, dass |BE| = 6 cm ist.
4. Konstruiere die Orthogonale l zu g im Punkt E.
5. Der Thaleskreis über AB schneidet 1 in den Punkten D und D'.

Behauptung:

Der Schnittpunkt von (AD) (bzw. (AD')) mit h erfüllt die Bedingungen für den Punkt C.

Beweis:



Zum Nachweis fällt man das Lot von C auf die Gerade g. Der Lotfußpunkt sei F. Die beiden Dreiecke AFC und EBD sind nach Konstruktion rechtwinklig.

Da D auf dem Thaleskreis über AB liegt, ist w(ADB) = 90° und BD das Lot auf AC.

Für die beiden Winkel α und β im rechtwinkligen Dreieck ABD gilt $\alpha + \beta = 90°$.

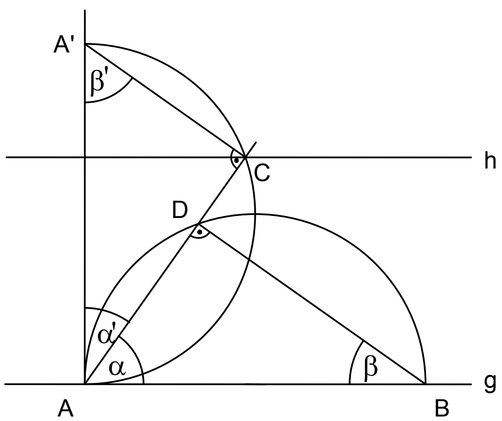
Für die nicht benannten Winkel in den Dreiecken AFC und BDE gilt:

w(ACF) = $90° - \alpha = \beta$ und w(EDB) = $90° - \beta = \alpha$

Die beiden Dreiecke AFC und BDE stimmen deshalb paarweise in ihren Winkeln überein. Außerdem gilt nach Konstruktion |FC| = |BE|. Die beiden Dreiecke sind deshalb nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent zueinander. Insbesondere sind deshalb die Seiten gleich lang, die den rechten Winkeln gegenüberliegen. Also gilt |AC| = |BD|.

2. Lösung

Konstruktion der nebenstehenden Figur



1. Die beiden Parallelen g und h sowie die beiden Punkte A und B seien wie bei der ersten Lösung konstruiert.
2. Konstruiere die Orthogonale g' zu g im Punkt A.
3. Konstruiere auf g' einen Punkt A' so, dass |AA'| = |AB| gilt.

4. Der Punkt C ist einer der Schnittpunkte des Thaleskreises über AA' mit der Geraden h.
5. Konstruiere den Thaleskreis über AB.
6. Die Strecke AC schneidet den Thaleskreis über AB im Punkt D.

Behauptung:

Die Strecken AC und BD sind orthogonal zueinander und gleich lang.

Beweis:
Die Orthogonalität folgt daraus, dass C auf dem Thaleskreis über AA' liegt. Nach Konstruktion besitzen die beiden Dreieck ABD und ACA' bei D bzw. C jeweils einen rechten Winkel. Für die Winkel α, α', β und β' in der konstruierten Figur gilt:

$$\begin{array}{rcllll} \alpha+\beta+90^\circ & = & 180^\circ & \Rightarrow & \alpha+\beta=90^\circ & \text{[Winkelsumme im } \Delta \text{ ABD]} \\ \alpha'+\beta'+90^\circ & = & 180^\circ & \Rightarrow & \alpha'+\beta'=90^\circ & \text{[Winkelsumme im } \Delta \text{ ACA']} \\ \alpha'+\alpha & = & 90^\circ & & & \text{[(AA')} \perp \text{(AB) nach Konstruktion\}} \end{array}$$

Aus diesen drei Eigenschaften folgt: $\beta = \alpha'$ und $\alpha = \beta'$

Die beiden Dreiecke ABD und ACA' stimmen also paarweise in allen drei Winkeln überein. Da nach Konstruktion auch die beiden Seiten AB und AA' gleich lang sind, sind die beiden Dreiecke nach wsw kongruent zueinander. Deshalb sind auch die einander entsprechenden Seiten BD und AC gleich lang.

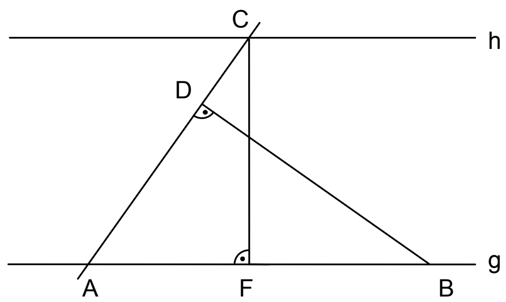
Vorüberlegungen zu den weiteren Lösungen
Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, die Länge der Strecke AC aus dem gegebenen Abstand der Parallelen g und h sowie der Streckenlänge |AB| = 9 cm zu konstruieren. Die folgenden zwei Lösungen sind mit der Kenntnis des Katheten-, des Höhensatzes und des Satzes von Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke aus der Klassenstufe 9 möglich. Die Konstruktionen der Streckenlängen stehen in jedem Geometriebuch der Klassenstufe 9 und werden deshalb hier nicht ausgeführt.

Für die nachfolgenden Planfiguren wird angenommen, dass der Punkt C mit der geforderten Eigenschaft konstruiert sei. Der Punkt D sei der Lotfußpunkt von B auf die Gerade (AC).

Es gelte also |AC| = |BD|.

3. Lösung

Planfigur
In der nachstehenden Figur gilt |AB| = 9 cm.



Die Strecke FC sei senkrecht zu g.

Es gilt deshalb |FC| = 6 cm.

In der Planfigur gilt w(ACF) = w(ABD), denn die Winkel ∡ AFC und ∡ ADB sind nach Konstruktion jeweils 90° und der Winkel ∡ BAD ist in beiden Dreiecken gemeinsam.

Somit gilt |FC| : |AC| = |BD| : |AB|.

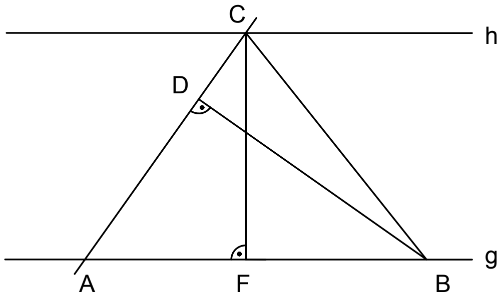
Da nach Aufgabenstellung |AC| = |BD| gelten soll, ergibt sich die Bedingung

$$|FC| : |AC| = |AC| : |AB| \quad \Leftrightarrow \quad |AC|^2 = |FC| \cdot |AB|$$

Da sowohl FC als auch AB gegeben sind, lässt sich die gesuchte Strecke AC mit Hilfe des Höhensatzes oder des Kathetensatzes konstruieren.

4. Lösung

Planfigur



Der Flächeninhalt A des Dreieckes ABC kann auf zwei verschiedene Weisen dargestellt werden, wobei zusätzlich die Eigenschaft |AC| = |BD| ausgenutzt wird.

$$A = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CF| = 27\text{cm}^2$$

und

$$A = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2}|AC|^2$$

Die Streckenlänge $|AC| = \sqrt{54}$ cm kann nach einem der genannten Sätze leicht konstruiert werden. Mit der so konstruierten Streckenlänge AC bestimmt man dann den Punkt C als einen der Schnittpunkte des Kreises um A mit dem Radius $\sqrt{54}$ cm mit der Geraden h.

Aufgabe 5

In der Gleichung $x^2 + 2ax + 2b = 0$ sind a und b ungerade ganze Zahlen.

Zeige: Wenn die quadratische Gleichung lösbar ist, so sind die Lösungen keine natürlichen Zahlen.

Vorbemerkung

Bei den nachfolgenden Beweisen handelt es sich jeweils um einen "Beweis durch Widerspruch". Dabei wird gezeigt, dass die Annahme von natürlichen Lösungszahlen für die quadratische Gleichung auf einen Widerspruch zur Voraussetzung "a und b ungerade" führt.

1. Lösung

Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man als Lösungszahlen

$$x = -a + \sqrt{a^2 - 2b} \quad \vee \quad x = -a - \sqrt{a^2 - 2b}\,.$$

Die Lösungszahlen sind ganzzahlig, wenn $a^2 - 2b$ das Quadrat einer ganzen Zahl k ist, d.h. $a^2 - 2b = k^2$. Mit a ist auch a^2 ungerade und damit auch die Differenz $a^2 - 2b$. Aus einer ungeraden Quadratzahl k^2 folgt weiter, dass auch k ungerade ist.

Setzt man nun a = 2u + 1 und k = 2v + 1 $(u, k \in \mathbb{Z})$, so erhält man:

$$a^2 - k^2 = 4u^2 + 4u + 1 - 4v^2 - 4v - 1 = 4 \cdot \left(u^2 + u - v^2 - v\right)$$

Andererseits gilt $\quad a^2 - k^2 = 2b$.

Daraus folgt: $\quad b = 2 \cdot \left(u^2 + u - v^2 - v\right)$

Damit wäre b eine gerade Zahl im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Lösung

Nach dem Satz von Vieta gilt für die beiden Lösungszahlen x_1 und x_2:

$x_1 + x_2 = -2a$ und $x_1 \cdot x_2 = 2b$

Die Summe der beiden ganzen Lösungszahlen x_1 und x_2 soll nach Aufgabenstellung gerade sein, d.h. dass beide Zahlen gerade oder beide Zahlen ungerade sein müssen. Da das Produkt der beiden Zahlen nach der zweiten Bedingung ebenfalls gerade ist, kommt nur die erste Möglichkeit in Frage, d.h. $x_1 = 2u$ und $x_2 = 2v$ mit u, v $\in \mathbb{Z}$. Daraus folgt aber $x_1 \cdot x_2 = 4uv$. Da außerdem $x_1 \cdot x_2 = 2b$ gilt, würde daraus folgen, dass b = 2uv und damit im Widerspruch zur Aufgabenstellung gerade ist.

3. Lösung

u sei eine Lösung der gegebenen quadratischen Gleichung und u sei aus $\mathbb{N}$. u kann gerade oder ungerade sein.

Fall 1 (u gerade)

Setzt man u = 2k $\quad (k \in \mathbb{N})$, so erhält man durch Einsetzen in die gegebene Gleichung

$4k^2 - 4ak + 2b = 0$.

Nach Division durch 2 und Auflösen nach b ergibt sich daraus $b = 2ak - 2k^2$. Daraus folgt, dass b gerade ist im Widerspruch zur Aufgabenstellung.

Fall 2 (u ungerade)
Formt man die Gleichung $u^2 + 2a \cdot u + 2b = 0$ um, so erhält man $u^2 = 2 \cdot (au - b))$. woraus sich ein Widerspruch zu "u ungerade" ergibt.

Aufgabe 6

Bei einem Achteck mit Umkreis haben vier Seiten die Länge 6 cm und vier Seiten die Länge 4 cm. Berechne bei einem solchen Achteck den Flächeninhalt.

1. Lösung

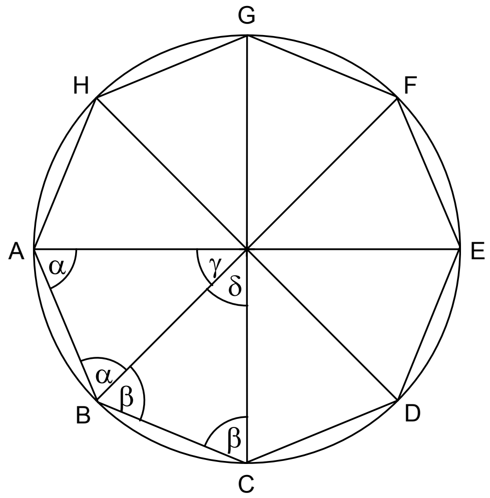
Verbindet man die acht Eckpunkte mit dem Mittelpunkt M des Umkreises, so erhält man zwei Klassen von jeweils vier kongruenten Dreiecken. Diese Dreiecke seien abwechselnd angeordnet.

Die Benennung der Winkel in den gleichschenkligen Dreiecken ergibt sich aus der Figur.

Aus $4\gamma + 4\delta = 360°$ folgt $\gamma + \delta = 90°$.

Im Viereck ABCM gilt für die Winkelsumme $2\alpha + 2\beta + 90° = 360°$ und damit $\alpha + \beta = 135°$.

Diese Überlegung gilt für alle Innenwinkel des Achteckes.



Verlängert man die Seiten BC, DE, FG und HA bis zum Schnitt, so entsteht das Viereck PQRS. Die ergänzenden Dreiecke sind wegen $\alpha + \beta = 135°$ gleichschenkligrechtwinklig und wegen der übereinstimmenden Hypotenusenlänge zueinander kongruent.

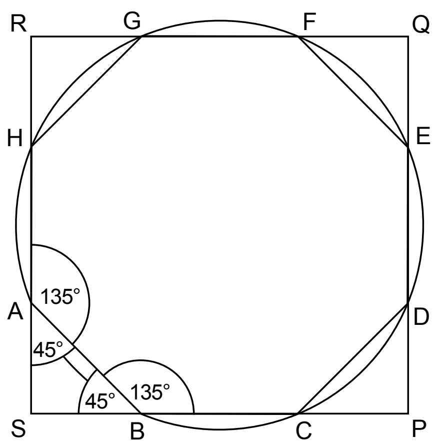
Da jede Seite des Viereckes PQRS die Länge 2x + 4 cm aufweist, ist dieses Viereck sogar ein Quadrat.

Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Seitenlängen |CP|, |PD|,...

$$|CP|^2 + |PD|^2 = |CD|^2 .$$

Zusammen mit |CP| = |PD| = |EQ| = ... folgt

$$2 \cdot |CP|^2 = 36 \text{ cm}^2 \text{ und } |CP| = |PD| = |EQ| = 3 \cdot \sqrt{2}\text{cm} .$$



Für den Flächeninhalt des Achteckes gilt:

$$A_{\text{Achteck}} = A_{\text{Quadrat}} - 4 \cdot A_{\Delta CPD}$$

$$A_{\text{Achteck}} = \left[\left(4 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}\right]\text{cm}^2$$

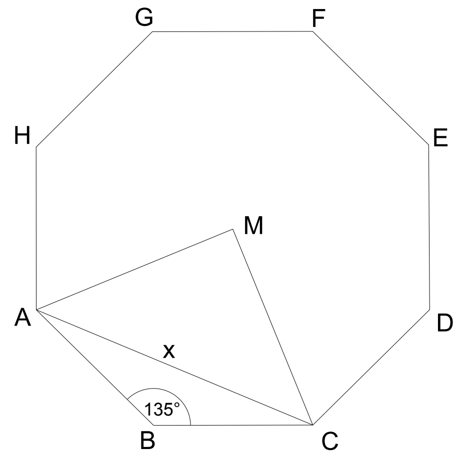
$$= \left[\left(4 + 6\sqrt{2}\right)^2 - 36\right]\text{cm}^2$$

$$= \left[52 + 48\sqrt{2}\right]\text{cm}^2$$

Entsprechend der Ergänzung der obigen Figur zu einem Quadrat hätte man auch mit einer Zerlegung in Teilfiguren arbeiten können.

2. Lösung

Bei der folgenden Lösung mit Hilfe der Trigonometrie wird angenommen, dass die Eigenschaften über die Innenwinkel des Achteckes und die Mittelpunktswinkel bereits entsprechend der ersten Lösung begründet sind.



Die Dreiecke ABC, CDE, EFG und GHA weisen jeweils eine Seite der Länge 4 cm und eine Seite der Länge 6 cm auf und stimmen im eingeschlossenen Winkel überein. Sie sind deshalb kongruent.

Daraus folgt $|AC| = |CE| = |EG| = |GA|$. Da die Punkte A und C auf einem Kreis um M liegen, ist das Dreieck ACM gleichschenklig und wegen w(AMC) = 90° sogar gleichschenklig-rechtwinklig.

Gleiches gilt für die Dreiecke CEM, EGM und GAM. Alle vier Dreiecke sind zueinander kongruent, da sie in den gemeinsamen Schenkeln und im eingeschlossenen rechten Winkel übereinstimmen.

Da an jedem Eckpunkt zwei 45° Winkel anliegen, ist das Viereck ACEG ein Quadrat. Für dessen Seitenlänge x gilt nach dem Kosinussatz im Dreieck ABC

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 135°$$

$$x^2 = \left(16 + 36 - 48 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right) \mathrm{cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Quadrates ist deshalb $A_{\text{Quadrat}} = \left(52 + 24\sqrt{2}\right) \mathrm{cm}^2$.

Der Flächeninhalt jedes der vier anliegenden Dreiecke ergibt sich aus der allgemeinen Flächenformel

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi$ zu $A_{\text{Dreieck}} = 6\sqrt{2}\mathrm{cm}^2$.

Für den Flächeninhalt A des Achteckes folgt daraus

$$A_{\text{Quadrat}} = \left(52 + 24\sqrt{2}\right)\mathrm{cm}^2 + 4 \cdot 6\sqrt{2}\mathrm{cm}^2 = \left(52 + 48\sqrt{2}\right)\mathrm{cm}^2.$$