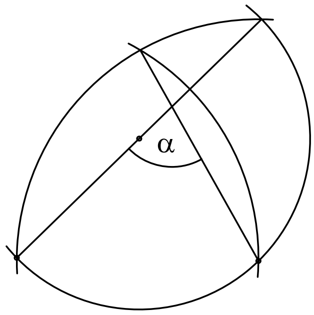
1987

Runde 1

Aufgabe 1

In der Figur sind die drei herausgehobenen Punkte die Mittelpunkte der Kreisbögen.

Bestimme durch geometrische Überlegungen die Größe des Winkels α, der von den beiden sich schneidenden Strecken gebildet wird.



Lösung

Die Punkte werden benannt und die Figur durch die Strecken AB, AD und BD ergänzt. Die Gesamtfigur besitzt folgende Eigenschaften:

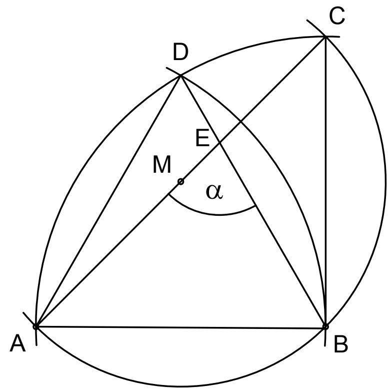
1) Da die Punkte A, C und D auf dem Kreisbogen um B liegen, gilt $|AB| = |BC| = |BD|$. Die Dreiecke ABC und ABD sind deshalb zumindest gleichschenklig.
2) Außerdem gilt $|AB| = |AD|$, da Punkte B und D auf dem Kreisbogen mit Mittelpunkt A liegen. Zusammen mit der ersten Eigenschaft erhält man daraus, dass das Dreieck ABD sogar gleichseitig ist.
3) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AC, da A und C auf einem Kreis um M liegen. Der Punkt B liegt also auf dem Thaleskreis über AC. Damit ist das Dreieck ABC rechtwinklig; nach der ersten Eigenschaft sogar gleichschenklig rechtwinklig. Für die Winkel der Dreiecke gilt demnach:

   $w(EBA) = w(DBA) = 60°$,

   $w(BAE) = w(BAC) = w(ACB) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 90°) = 45°$.

   Nach dem Winkelsummensatz gilt im Dreieck ABE:

   $\alpha = w(AEB) = 180° - (w(EBA) + w(BAE)) = 180° - (60° + 45°) = 75°$.



Aufgabe 2

Begründe, weshalb der Ausdruck $\left(a^2+b^2\right)\cdot\left[(a+1)^2+(b-1)^2\right]-(a+b)^2$ für beliebige ganze Zahlen a und b stets das Quadrat einer ganzen Zahl ergibt.

1. Lösung

Um eine Idee für den Zusammenhang zwischen den beiden gegebenen Zahlen a und b und der gesuchten Quadratzahl zu bestimmen, kann man zunächst die Sonderfälle a = 0 bzw. b = 0 betrachten.

Dafür ergeben sich die beiden folgenden Tabellen:

a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	2	3	4	5	6	–1	–2	–3
Term	0	4	36	144	400	900	4	36	144
Basis	0	2	6	12	20	30	2	6	12

a	1	2	3	4	5	6	–1	–2	–3
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Term	4	36	144	400	900	1764	0	4	36
Basis	2	6	12	20	30	42	0	2	6

In der ersten Tabelle ergibt sich kein einfacher Zusammenhang zwischen den Werten von b und dem Term selbst, wohl aber zwischen den Werten von b und den Basen der Quadratzahlen. Es fällt auf, dass in allen Beispielen die Basis das Produkt von b mit dem Vorgänger von b ist. So erhält man beispielsweise für b = 5 die Basis 20. 20 lässt sich als Produkt von 5 und 4 darstellen. Bei den anderen Spalten erhält man den gleichen Zusammenhang.

Für b = 0 beobachtet man entsprechend, dass die Basis das Produkt von a und dem Nachfolger von a ist.

Berechnet man nun noch einige Beispiele mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$, so erhält man die Vermutung

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left[(a+1)^2+(b-1)^2\right]-(a+b)^2=\left[a\cdot(a+1)+b\cdot(b-1)\right]^2$$

Diese Vermutung muss nun allgemein für alle ganzen Zahlen a und b nachgewiesen werden.

Dieser Nachweis gelingt durch Ausmultiplizieren der beiden Seiten und einen anschließenden Vergleich der beiden entstehenden Summen.

$$\begin{aligned}
&\left(a^2+b^2\right)\cdot\left[(a+1)^2+(b-1)^2\right]-(a+b)^2\\
&=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left[a^2+2a+1+b^2-2b+1\right]-\left(a^2+2ab+b^2\right)\\
&=a^4+2a^3+2a^2+2a^2b^2-2a^2b+2ab^2+2b^2-2b^3+b^4-a^2-2ab-b^2\\
&=a^4+2a^3+a^2+2a^2b^2-2ab-2a^2b+2ab^2+b^2-2b^3+b^4
\end{aligned}$$

Andererseits erhält man durch Ausmultiplizieren des Binoms

$$\begin{aligned}
&\left[a\cdot(a+1)+b\cdot(b-1)\right]^2\\
&=\left[a^2+a+b^2-b\right]^2\\
&=a^4+2a^3+2a^2b^2-2a^2b+a^2+2ab^2-2ab+b^4-2b^3+b^2
\end{aligned}$$

Mit Ausnahme der Reihenfolge der Summanden stimmen die Terme überein. Damit ist die Gleichheit der beiden Terme nachgewiesen. Da der Term $\left[a^2+a+b^2-b\right]$ für alle ganzen Zahlen a und b selbst eine ganze Zahl darstellt, ist auch der Nachweis erbracht, dass der vorgegebene Term das Quadrat einer <u>ganzen</u> Zahl ist.

2. Lösung

Durch Äquivalenzumformungen erhält man aus dem vorgegebenen Term:

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left[(a+1)^2+(b-1)^2\right]-(a+b)^2=$$

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left[a^2+2a+1+b^2-2b+1\right]-\left(a^2+2ab+b^2\right)=$$

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\cdot(2a-2b)+2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2=$$

$$\left(a^2+b^2\right)^2+2\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot(a-b)+a^2-2ab+b^2=$$

$$\left(a^2+b^2\right)^2+2\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot(a-b)+(a-b)^2=$$

$$\left[\left(a^2+b^2\right)+(a-b)\right]^2.$$

Sind a und b ganze Zahlen, so gilt dies auch für a^2, b^2 und für die Summe a^2+b^2+a-b. Das Quadrat dieses Terms ist damit das Quadrat einer ganzen Zahl.

Aufgabe 3

Fünf Seitenflächen eines Würfels mit der Kantenlänge n cm $\left(n \in \{3,4,5,...\}\right)$ werden rot angemalt.

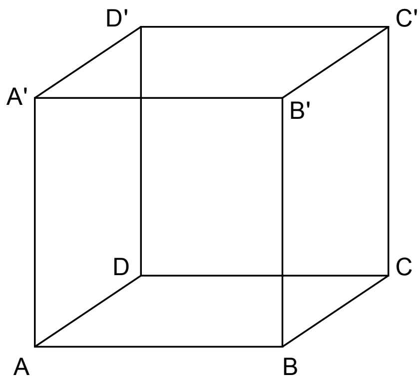
Anschließend wird dieser Würfel in kleinere Würfel mit der Kantenlänge 1 cm zerlegt.

Wie viele Würfelchen haben drei (zwei, eine, keine) rote Seitenflächen?

Gib das Ergebnis als Zahl bzw. als Formel mit n an und begründe.

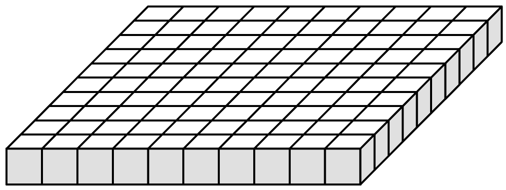
Lösung

Für die Beschreibung der Lösung wird angenommen, dass die Seitenfläche ABCD des Würfels nicht rot gefärbt ist. Zerlegt man den Würfel parallel zur Grundfläche ABCD in Teilkörper von 1 cm Höhe und nummeriert sie von unten nach oben von 1 bis n durch, so stimmen die Teilkörper 1 bis n – 1 in ihrer Färbung überein.



Farbverteilung in den Schichten 1 bis n- 1

Nur die Würfelchen längs der Kanten dieser n – 1 Schichten können rote Flächen haben.



Insgesamt gibt es $4 \cdot (n-1)$ Würfelchen an den Kanten. Von diesen besitzen die vier Eckwürfel jeweils zwei gefärbte Seitenflächen.

Die restlichen 4n – 8 Einheitswürfel längs der Kanten sind an einer Seite rot. Nimmt man diese Würfelchen weg, so bleibt ein Restkörper mit quadratischer Grundfläche, längs deren Kanten jeweils n – 2 Würfelchen liegen.

In diesen n – 1 Schichten gibt es insgesamt $(n-1)\cdot 4$ Einheitswürfel mit zwei,

$(n-1)\cdot(4n-8)$ Würfelchen mit einer und $(n-1)\cdot(n-2)^2$ Würfelchen mit keiner roten Seitenfläche.

Farbverteilung in der oberen Schicht

In dieser Schicht besitzen die vier Eckwürfel drei gefärbte Seitenflächen. Die restlichen 4n – 8 Würfelchen längs der Kanten haben zwei gefärbte Seiten. Die verbleibenden Würfelchen bilden den einen Teilkörper mit quadratischer Grundfläche aus $(n-2)^2$ Einheitswürfelchen.

Zusammenfassung

Aus diesen Überlegungen folgt für die Gesamtzahl der Würfelchen:

drei rote Seitenflächen: 4 (unabhängig von n)

zwei rote Seitenflächen: $(4n-8)+(4n-4)=8n-12$

eine rote Seitenfläche: $(n-2)^2+(n-1)\cdot(4n-8)=5n^2-16n+12$

keine rote Seitenfläche: $(n-1)\cdot(n-2)^2=n^3-5n^2+8n-4$

Aufgabe 4

Es gibt natürliche Zahlen, für die die Summe s aller Teiler ungerade ist.

Beispiel: $n = 18$ $T_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ $s = 39$

Beschreibe möglichst viele natürliche Zahlen mit ungerader Teilersumme.
Begründe, weshalb die Teilersumme dieser Zahlen jeweils ungerade ist.

Lösung

Die Zahlen mit der geforderten Eigenschaft können auf verschiedene Weisen beschrieben werden.

Alle Zweierpotenzen, alle ungeraden Quadratzahlen und alle Produkte von ungeraden Quadratzahlen mit einer Zweierpotenz besitzen eine ungerade Teilersumme.

Alle Quadratzahlen und das Doppelte von Quadratzahlen besitzen eine ungerade Teilersumme.

Beide Beschreibungen kennzeichnen die gleiche Menge von Zahlen.

Der Nachweis für die erste Beschreibung erfolgt durch Fallunterscheidung. Bei diesem Beweis wird ausgenutzt, dass die Summe von zwei geraden Zahlen bzw. von zwei ungeraden Zahlen gerade, die Summe einer ungeraden und einer geraden Zahl aber ungerade ist.

Zweierpotenzen

Mit Ausnahme der Zahl 1 ist jeder Teiler einer Zweierpotenz gerade. Die Summe aller Teiler ist deshalb ungerade.

Ungerade Quadratzahlen

Jede Quadratzahl n^2 hat eine ungerade Anzahl von Teilern, denn bei der Zerlegung der Teilermenge in Teiler und Komplementärteiler bleibt n als einzige Zahl ohne echten Partner. Bei einer ungeraden Quadratzahl ist jeder Teiler ungerade, denn sie enthält in ihrer Primfaktorzerlegung den Primfaktor 2 nicht. Die Summe einer ungeraden Anzahl von ungeraden Zahlen ist selbst ungerade.

Produkte aus ungeraden Quadratzahlen und Zweierpotenzen

Multipliziert man eine ungerade Quadratzahl n^2 mit einer Zweierpotenz, so kommen zu deren Teilern nur gerade Zahlen als weitere Teiler hinzu. Durch die Addition von geraden Zahlen zu einer ungeraden Zahl bleibt die Gesamtsumme ungerade.