

Bundeswettbewerb Mathematik

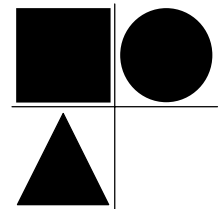
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn

Fon: 0228 - 3727 411 • Fax: 0228 - 3727 413

e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de

www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert



Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2004

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email-Adresse s.o.

Stand: Mai 2004



Aufgabe 1: Zu Beginn eines Spiels stehen an der Tafel die Zahlen 1, 2, ... , 2004.

Ein Spielzug besteht daraus, dass man

- eine beliebige Anzahl der Zahlen an der Tafel auswählt,
- den Elferrest der Summe dieser Zahlen berechnet und an die Tafel schreibt,
- die ausgewählten Zahlen löscht.

Bei einem solchen Spiel standen irgendwann noch zwei Zahlen an der Tafel. Eine davon war 1000; man bestimme die andere Zahl.

Ergebnis: In jedem Fall steht noch die Zahl 4 an der Tafel.

1. Beweis: Wir überlegen, wie sich die Gesamtsumme G aller Zahlen an der Tafel bei einem Spielzug verändert: Die Summe der ausgewählten Zahlen bezeichnen wir mit S , ihren Elferrest mit E . Dann ist $G_{\text{neu}} = G_{\text{alt}} - S + E = G_{\text{alt}} - (S - E)$.

Die Zahl $(S - E)$ ist durch 11 teilbar; dies folgt unmittelbar aus der Definition des Elferrestes einer Zahl. In jedem Fall verringert sich also bei einem Spielzug die Summe der Zahlen an der Tafel um ein Vielfaches von 11. Damit hat der Elferrest der Gesamtsumme aller Zahlen an der Tafel nach jedem Spielzug den gleichen Wert, nämlich denjenigen Wert, den er zu Beginn des Spieles hatte.

Von hier kann geschlossen werden:

Variante 1: Nun berechnen wir diesen Wert: Nach bekannter Formel¹ ist $1+2+3+ \dots +2004 = \frac{1}{2} \cdot 2004 \cdot 2005 = 2009010 = 11 \cdot 182637 + 3$. Also hat der Elferrest der Summe aller Zahlen an der Tafel nach jedem Spielzug den Wert 3.

Nach jedem Zug wird ein Elferrest – also eine Zahl aus der Menge $\{0,1,2,\dots,10\}$ – an die Tafel geschrieben. Damit steht nach jedem Spielzug eine Zahl aus dieser Menge an der Tafel; insbesondere ist also die Zahl, die zum Schluss außer der 1000 an der Tafel steht – wir bezeichnen sie mit X –, eine Zahl aus dieser Menge. Also muss X folgende Anforderungen erfüllen: (1) X ist eine Zahl aus $\{0,1,2,\dots,10\}$ und (2) $1000 + X$ hat den Elferrest 3.

Es ist $1000 + 4 = 1001 + 3 = 91 \cdot 11 + 3$; gleichzeitig ist die Zahl 4 die einzige Zahl aus $\{0,1,2,\dots,10\}$, die zusammen mit 1000 den Elferrest 3 erzeugt. Die gesuchte Zahl ist also 4.

Variante 2: Der Elferrest der Summe der letzten beiden Zahlen ist also unabhängig von der Reihenfolge und Auswahl der weggenommenen Zahlen. Jede beliebige Zugfolge führt zum gleichem Ergebnis, z.B. diese: Wir wählen in jedem Spielzug zwei Zahlen, deren Summe 2002 ergibt, und zwar zuerst 1 und 2001, danach 2 und 2000, 3 und 1999 usw. und zuletzt 999 und 1003. Weil $2002 = 11 \cdot 182$, ist der Elferrest jeder dieser Summen null. Nach diesen 999 Spielzügen stehen also an der Tafel außer der Zahl 1000 noch viele Nullen sowie die Zahlen 1001, 1002, 2002, 2003 und 2004. Diese nehmen wir einzeln weg und erhalten noch die Reste 0, 1, 0, 1 und 2. In einem letzten Schritt wählen wir diese fünf Zahlen zusammen mit allen anderen Nullen aus und schreiben den Elferrest ihrer Summe, also 4 an die Tafel.

Jede andere Zugfolge kommt zum gleichen Ergebnis: Zum Schluss steht nämlich an der Tafel außer der Zahl 1000 ein Elferrest, also eine Zahl aus der Menge $\{0,1,2,\dots,10\}$. Aus dieser Menge gibt es aber keine andere Zahl, die mit 1001 eine Summe mit gleichem Elferrest bildet.

¹ Auch wenn diese Formel angeblich vom jungen Gauß schon in der Grundschule selbst gefunden wurde - sie war schon lange vor ihm bekannt und sollte m.E. deswegen nicht nach ihm benannt werden.



Aufgabe 2: Die Seitenlängen a , b , c eines Dreiecks seien ganzzahlig, ferner sei eine der Höhen des Dreiecks gleich der Summe seiner beiden anderen Höhen.

Man beweise, dass dann $a^2 + b^2 + c^2$ eine Quadratzahl ist.

1. Beweis (über Flächenformeln): O.B.d.A. sei $h_c = h_a + h_b$ (andernfalls benennen wir um); wie üblich sei der Flächeninhalt des Dreiecks mit A bezeichnet. Aus der bekannten Identität $2A = ah_a = bh_b = ch_c$ folgt sofort

$$h_c = h_a + h_b \Leftrightarrow \frac{2A}{c} = \frac{2A}{a} + \frac{2A}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow ab - (bc + ac) = 0.$$

Dies verwenden wir für die Umformung

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + 2[ab - (bc + ac)] + c^2 = (a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2 = (a+b-c)^2.$$

Da nach Voraussetzung a , b und c alle ganzzahlig sind, ist auch $(a+b-c)$ ganzzahlig; es ist also wie behauptet $a^2 + b^2 + c^2$ das Quadrat einer ganzen Zahl.

Variante 1: (mit Koordinaten und Geradengleichung in Hesse-Normalenform): O.B.d.A. sei $h_c = h_a + h_b$ (andernfalls benennen wir um). Wir legen ein Koordinatensystem so auf die Figur, dass der Ursprung auf die Ecke A und die positive x -Achse auf die Seite AB zu liegen kommen. Mit x_c bezeichnen wir dann die x -Koordinate von C ; es ist damit $B(c|0)$ und $C(x_c|h_c)$; o.B.d.A. ist $h_c > 0$ (andernfalls spiegeln wir an der x -Achse). Eine mögliche Gleichung der Geraden (AC) ist dann $h_c x - x_c y = 0$, eine der Geraden (BC) ist $h_c x + (c - x_c) y - ch_c = 0$; dies wird durch Einsetzen der Koordinaten der sie bestimmenden Punkte sofort bestätigt. Für h_a und h_b gilt dann unter Verwendung der Hesse-Normalenform dieser Geradengleichungen ($c > 0$, $h_c > 0$ nach Konstruktion!):

$$h_a = d(A, (BC)) = \frac{ch_c}{\sqrt{h_c^2 + (c - x_c)^2}} \quad \text{sowie} \quad h_b = d(B, (AC)) = \frac{ch_c}{\sqrt{h_c^2 + x_c^2}}.$$

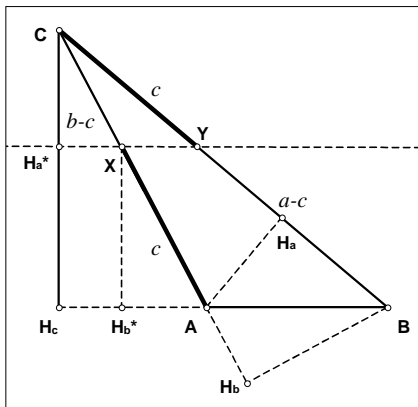
Die Voraussetzung $h_c = h_a + h_b$ ist dann äquivalent zu $h_c = \frac{ch_c}{\sqrt{h_c^2 + (c - x_c)^2}} + \frac{ch_c}{\sqrt{h_c^2 + x_c^2}}$.

Nach Pythagoras ist zusätzlich $a = \sqrt{h_c^2 + (c - x_c)^2}$ und $b = \sqrt{h_c^2 + x_c^2}$. Damit ist

$$h_c = h_a + h_b \Leftrightarrow h_c = \frac{ch_c}{a} + \frac{ch_c}{b} \Leftrightarrow ab = c \cdot (a + b). \quad \text{Ab hier schließen wir wie im 1. Beweis.}$$

Variante 2: O.B.d.A. sei $h_c = h_a + h_b$, dies führt mit $h_c = a \sin \beta$, $h_a = c \sin \beta$ sowie $h_b = c \sin \alpha = c \frac{a}{b} \sin \beta$ sofort zu $a \sin \beta = c \sin \beta + c \frac{a}{b} \sin \beta$, also nach Kürzen von $\sin \beta$ und Multiplikation mit b zu $ab = c \cdot (a + b)$. Ab hier schließen wir wie im 1. Beweis.

2. Beweis (elementargeometrisch, vgl. Figur): O.B.d.A. sei $h_c = h_a + h_b$ (andernfalls benennen wir um); die Höhenfußpunkte seien wie üblich mit H_a , H_b , H_c bezeichnet. Wir betrachten diejenige Parallele zu (AB) im Abstand h_b , die die Höhe CH_c sowie die beiden Seiten CA und CB schneidet. Die Schnittpunkte nennen wir H_a^* bzw. X bzw. Y . Nach Voraussetzung ist $h_b < h_c$, also existiert diese Parallele und es gilt zusätzlich $\overline{CH_a^*} = h_a$ und $\overline{H_a^*H_c} = h_b$. Schließlich benennen wir den Fußpunkt des Lotes von X auf (AB) mit H_b^* ; es ist dann auch $\overline{BH_b^*} = h_b = \overline{XH_b^*}$.



Nun sind die Dreiecke $\triangle ABH_b$ und $\triangle AXH_b^*$ nach "sww" kongruent (Scheitelwinkel bei A , rechte Winkel bei H_b^* bzw. H_b , sowie $\overline{BH_b} = h_b = \overline{XH_b^*}$). Ebenfalls nach "sww" sind die Dreiecke $\triangle ABH_a$ und $\triangle CYH_a^*$ kongruent (Stufenwinkel bei B bzw. Y , rechte Winkel bei H_a bzw. H_a^* , sowie $\overline{AH_a} = h_a = \overline{CH_a^*}$). (Diese Beziehungen gelten auch, wenn $\triangle ABC$ spitzwinklig ist oder



stumpfwinklig bei B; ebenso, wenn $H_b = A$ oder $H_a = B$, d.h. die betrachteten Hilfsdreiecke entartet sind.) Insbesondere ist also $c = \overline{AB} = \overline{AX} = \overline{CY}$, hieraus folgt sofort $\overline{CX} = b-c$ und $\overline{YB} = a-c$.

Mit Strahlensatz (Zentrum C, $XY \parallel AB$) folgt sofort $c : (b-c) = (a-c) : c$ oder äquivalent $(a-c)(b-c) = c^2$. Dies verwenden wir in der Umformung

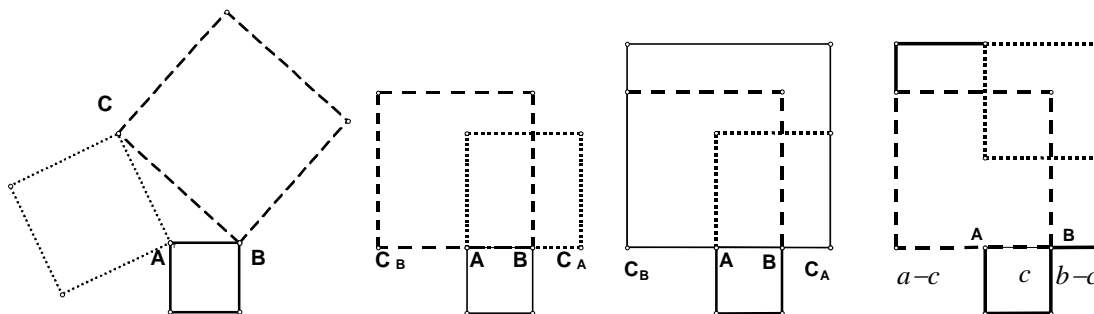
$$\begin{aligned} (a+b-c)^2 &= a^2 + 2a(b-c) + b^2 - 2bc + c^2 + (c^2 - c^2) = a^2 + b^2 - c^2 + 2a(b-c) - 2c(b-c) \\ &= a^2 + b^2 - c^2 + 2(a-c)(b-c) = a^2 + b^2 - c^2 + 2c^2 = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Wenn a, b, c alle ganzzahlig sind, ist auch $(a+b-c)$ ganzzahlig; damit steht links – wie zu zeigen – das Quadrat einer ganzen Zahl.

Bemerkungen: Obige Überlegung ist umkehrbar: Zunächst wählt man auf AC und BC Teilpunkte X bzw. Y so, dass AX und CY (oder auch CX und BY) beide die Länge c haben. Dann gilt: $XY \parallel AB \Leftrightarrow h_c = h_a + h_b$. Damit haben wir eine zweite, äquivalente Charakterisierung der betrachteten Dreiecke gefunden.

Eine einfache Beschreibung der Ortslinie für alle Punkte C, für die bei festem A und B die Beziehung $h_c = h_a + h_b$ gilt, ist nicht bekannt.

Variante (Skizze; elementargeometrisch mit Flächenumformungen): O.B.d.A. sei $h_c = h_a + h_b$; damit ist h_c längste Höhe und es folgt aus $ch_c = ah_a = bh_b$, dass dann c die kürzeste Seite ist.

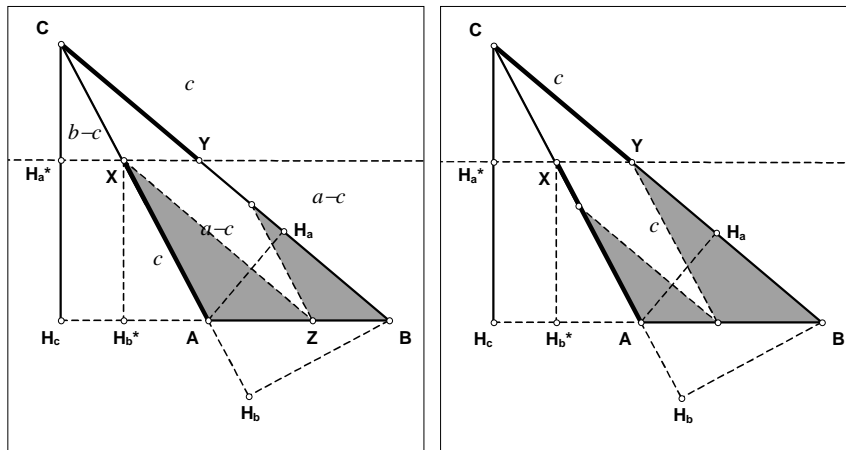


Wir errichten über den drei Seiten des Dreiecks nach außen je ein Quadrat; die Maßzahlen der Flächeninhalte entsprechen dann den Werten a^2, b^2 und c^2 .

Wir drehen das Quadrat über AC um die Ecke A um den Winkel α im Uhrzeigersinn; dabei wird die Ecke C in einen Punkt auf der Geraden (AB) überführt, den wir C_A nennen. Entsprechend drehen wir das Quadrat über BC um die Ecke B um den Winkel β gegen den Uhrzeigersinn; dabei wird die Ecke C in einen Punkt auf der Geraden (AB) überführt, den wir C_B nennen. Da c die kürzeste Seite ist, liegen die Punkte A und B zwischen C_A und C_B . Die Strecke $C_A C_B$ hat dann die Länge $a+b-c$, da sich die Strecken der Länge a und b auf einer Strecke der Länge c überlappen; die Strecke BC_A hat die Länge $b-c$, die Strecke AC_B die Länge $a-c$. Nun errichten wir über $C_A C_B$ ein Quadrat und schieben das Quadrat über AC_A "nach oben". Damit liegen in dem großen Quadrat zwei Rechtecke mit Kantenlängen $(a-c)$ und $(b-c)$, ein Quadrat mit Kantenlänge b und ein Quadrat mit Kantenlänge a ; dabei überlappen sich die beiden letzten Quadrate um ein Quadrat der Kantenlänge c . Unmittelbar aus der Figur lässt sich damit die in jedem Dreieck mit $c \leq a, c \leq b$ geltende Identität $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 - c^2 + 2(a-c)(b-c)$ ablesen.

Wenn wir noch zeigen, dass $(a-c)(b-c) = c^2$ ist, dann ist $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 - c^2 + 2c^2 = a^2 + b^2 + c^2$ und wir sind fertig. Hierzu verwenden wir die Bedingung $h_c = h_a + h_b$ wie im zweiten Beweis und ergänzen dessen Figur: Die Parallele zu CB durch X schneidet AB in einem Punkt, den wir Z nennen; das Dreieck $\triangle CXZ$ wird durch einen (eindeutig bestimmten) Punkt auf CB zu einem Parallelogramm ergänzt, dessen Kantenlängen $(b-c)$ und $(a-c)$ sind. Ferner bestimmt dieses Parallelogramm eine Zerlegung von $\triangle ABC$ in eben dieses Parallelogramm, $\triangle AZX$ und ein weiteres Dreieck.

Da $XY \parallel AB$ und $XZ \parallel CB$, bewirkt eine Verschiebung von $\triangle AZX$ um \overline{ZB} und eine Verschiebung des anderen Dreiecks um \overline{ZA} erneut eine Zerlegung von $\triangle ABC$ in diese beiden Dreiecke und ein Parallelogramm, dessen beiden Seiten diesmal die Länge c haben.



Nach dem Prinzip der Ergänzungsgleichheit haben die beiden Parallelogramme den gleichen Inhalt; da zusätzlich beide Parallelogramme den gleichen Innenwinkel γ besitzen, ist $c^2 = (a-c)(b-c)$.

Bemerkung: Zu einem vollständigen Beweis fehlt noch eine Betrachtung darüber, ob bei einem nicht-stumpfwinkligen Dreieck die verwendeten Lagebeziehungen erhalten bleiben.

3. Beweis: O.B.d.A. sei $h_c = h_a + h_b$ (andernfalls benennen wir um). Aus der Flächeninhaltsformel folgt sofort $ah_a = bh_b = ch_c$, also $a = c \frac{h_c}{h_a}$ und $b = c \frac{h_c}{h_b}$ sowie $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. Mit $h_c = h_a + h_b$ gilt dann

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \left(c \frac{h_c}{h_a}\right)^2 + \left(c \frac{h_c}{h_b}\right)^2 + c^2 = c^2 \left(\left(\frac{h_c}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{h_b}\right)^2 + 1 \right) = c^2 \left(\left(\frac{h_a + h_b}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{h_a + h_b}{h_b}\right)^2 + 1 \right) \\ &= \frac{c^2}{(h_a h_b)^2} \left((h_a + h_b)^2 h_b^2 + (h_a + h_b)^2 h_a^2 + h_a^2 h_b^2 \right) = \frac{c^2}{(h_a h_b)^2} (3h_a^2 h_b^2 + 2h_a h_b^3 + h_b^4 + 2h_a^3 h_b + h_a^4) \\ &= \frac{c^2}{(h_a h_b)^2} (h_a^2 + h_a h_b + h_b^2)^2 = \left(c \left(\frac{h_a}{h_b} + 1 + \frac{h_b}{h_a} \right) \right)^2 = \left(c \left(\frac{b}{a} + 1 + \frac{a}{b} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Wenn a , b und c ganzzahlig sind, ist der Inhalt der rechten Klammer eine rationale Zahl und die Gleichung besagt, dass die ganze Zahl $a^2 + b^2 + c^2$ das Quadrat der rationalen Zahl $\left(c \left(\frac{b}{a} + 1 + \frac{a}{b} \right) \right)$ ist. Bekanntlich ist dies nur möglich, wenn diese rationale Zahl ebenfalls ganz ist.

Bemerkung: Um die Gesamtheit aller Dreiecke mit der Eigenschaft $h_c = h_a + h_b$, $a \geq b > c$ zu bestimmen, verwenden wir die hierfür notwendigen und hinreichenden Bedingung (vgl. 2. Beweis)

$$(A) \quad (a-c)(b-c) = c^2 \quad \text{und} \quad (B) \quad b+c > a.$$

Der Parameter r sei definiert über die Gleichung $a = rb$; wegen (B) ist dann $r \geq 1$. Wir setzen dies in (A) ein und erhalten

$$(A) \quad \Leftrightarrow (rb-c)(b-c) = c^2 \quad \Leftrightarrow rb^2 - rbc - bc + c^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow c = \frac{r}{r+1} b.$$

Nun müssen wir r noch so beschränken, dass (B) erfüllt ist:

$$b+c > a \quad \Leftrightarrow b + \frac{r}{r+1} b > rb \quad \Leftrightarrow 0 > r^2 - r - 1 \quad \Leftrightarrow r \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$$

Zusammen mit $r \geq 1$ erhalten wir die notwendige Bedingung $r \in [1; \varphi]$ mit $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nun beschränken wir uns auf Dreiecke, deren Seitenlängen in rationalem Verhältnis stehen; offensichtlich ist hierfür notwendig und hinreichend, dass r rational ist. Damit können wir also zu jedem Parameter $r \in [1; \varphi] \cap \mathbb{Q}$ mittels $(a', b', c') = (r(r+1); r+1; r)$ und anschließend "Erweitern" mit einem ganzzahligen Vielfachen des



kleinsten gemeinsamen Nenners ein Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen konstruieren; und zu jedem solchen Dreieck mit den ganzzahligen Seitenlängen (a,b,c) gibt es einen solchen Parameter $r := c/(b-c)$.

Beispiele: $r = 1$ führt zum Seitentripel $(2,2,1)$; $r = 4/3$ führt über $(2^8/9; 7/3; 4/3)$ zum Seitentripel $(28, 21, 12)$.

Interessanterweise haben wir hier eine Brücke geschlagen zur Aufgabe "Stelle einen Stammbruch als Summe zweier Stammbrüche dar": Aus $h_c = h_a + h_b$ folgt ja sofort $1/c = 1/a + 1/b$. Tatsächlich ist (2. Bsp.) $1/12 = 1/21 + 1/28$.



Aufgabe 3: Man beweise, dass zwei kongruente regelmäßige Sechsecke so in insgesamt sechs Teile zerschnitten werden können, dass diese Teile sich lückenlos und überschneidungsfrei zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen lassen.

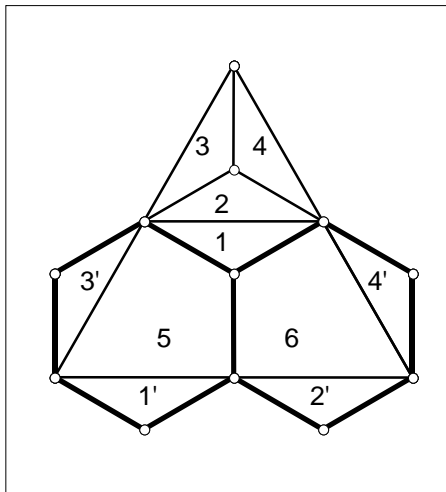
Bemerkung: Im Originaltext hieß es "...dass die beiden abgebildeten kongruenten Sechsecke so in..."

Gemeinsame Vorbemerkung: O.B.d.A. haben die Kanten der beiden regelmäßigen Sechsecke die Länge 1.

Notwendige Bedingung für die Existenz einer Zerschneidung ist, dass der Flächeninhalt des zusammengesetzten gleichseitigen Dreiecks den gleichen Flächeninhalt hat wie die zwei vorgegebenen Sechsecke zusammen. Für die Kantenlänge d des Dreiecks gilt also nach bekannter Formel (jedes der beiden Sechsecke setzt sich zusammen aus 6 kleinen gleichseitigen Dreiecken mit

$$\text{Kantenlänge 1): } \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow d = 2\sqrt{3}.$$

Die kurze Diagonale in den vorgegebenen Sechsecken hat die Länge $\sqrt{3}$; dies legt eine Zerschneidung entlang von je zwei dieser kurzen Diagonalen oder entlang der Lote vom Mittelpunkt auf die Sechseckseiten nahe.



1. Beweis (vgl. Figur): Wir legen die beiden Sechsecke an einer Kante aneinander, dabei entsteht an einer gemeinsamen Ecke ein Außenwinkel von 120° . Nun schneiden wir entlang von je zwei kurzen Diagonalen der Sechsecke insgesamt vier Dreiecke ab; damit sind die Sechsecke in insgesamt sechs Teile zerschnitten. Die vier abgeschnittenen Dreiecke kann man dann tatsächlich so an die beiden übrig bleibenden Drachenvierecke anlegen, dass ein gleichseitiges Dreieck entsteht: Die Seiten der abgeschnittenen Dreiecke haben entweder die Länge 1 oder die der kurzen Diagonalen; die Innenwinkel haben entweder die Weite 30° oder 120° . Damit passen die Dreiecke $1'$, $2'$, $3'$ und $4'$ lückenlos und überschneidungsfrei auf 1, 2, 3 bzw. 4; die langen Seiten von 3 und $3'$ sowie von 4 und $4'$ bilden mit $120^\circ - 30^\circ + 3 \cdot 30^\circ = 180^\circ$ einen gestreckten Winkel. Die Seiten des entstehenden Dreiecks sind damit alle doppelt so lang wie die kurze Diagonale der Sechsecke; insbesondere ist es gleichseitig.

Bemerkung: Eine Berechnung der Länge der kurzen Diagonalen ist hier nicht nötig, wohl aber eine Berechnung der entstehenden Winkel.

2. Beweis (Skizze): Wir zerschneiden ein gleichseitiges Dreieck in sechs Teile, aus denen sich lückenlos und überschneidungsfrei zwei gleichseitige Sechsecke zusammensetzen lassen.

Hierfür legen wir auf eine Parkettierung der Ebene mit kongruenten Sechsecken (die Existenz einer solchen ist bekannt!) ein gleichseitiges Dreieck, das den gleichen Flächeninhalt wie zwei der Sechsecke hat und deuten die Seiten von zwei fest ausgesuchten Sechsecken als Schnittlinien; die anderen Parkettierungslinien sind nur im Bedarfsfall Schnittlinien. O.B.d.A. habe das Dreieck die Kantenlänge $2\sqrt{3}$; die Sechsecke haben dann die Kantenlänge 1. Nun suchen wir eine solche Lage des Dreiecks, in der oben erwähnte Schnittlinien eine Zerschneidung des Dreiecks in höchstens 6 Teile bewirken. Anschließend müssen wir noch überprüfen, ob sich aus den sechs so gewonnenen Teilen tatsächlich zwei Sechsecke lückenlos und überschneidungsfrei zusammensetzen lassen. Drei Möglichkeiten seien hier aufgeführt (auf eine – für einen vollständigen Beweis nötige – Betrachtung von Streckenlängen und Winkelweiten wurde hier verzichtet):

Bemerkungen: Die Zerschneidung im Beweis 1 ist bei beiden Sechsecken identisch.

Die zweite Zerschneidung orientiert sich an den Loten vom Mittelpunkt auf die Sechseckseiten.

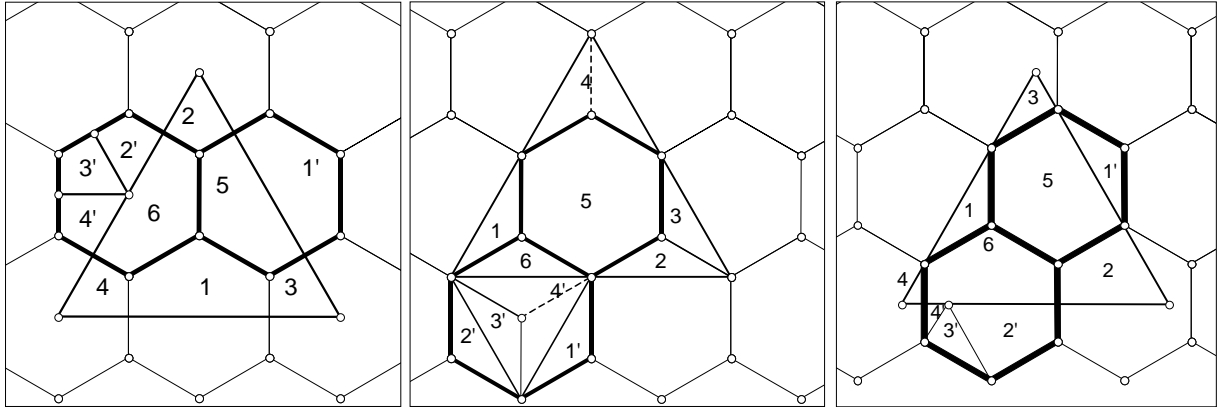
Die dritte Zerschneidung lässt eines der Sechsecke unzerschnitten; im Flächenstück 4 schneidet man nicht entlang der durch die Parkettierung vorgegebenen Linie.

Bei der vierten Zerschneidung muss Teile 3 oder 4 beim Zusammenlegen umgedreht werden.

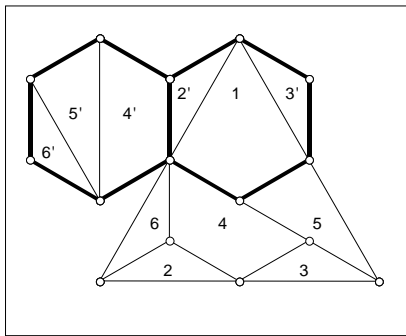


Eine vollständige Beschreibung aller Zerschneidungsmöglichkeiten ist nicht bekannt.

Im Augenblick ist keine Lösung bekannt, die ohne eine Betrachtung von Winkeln und Seitenlängen auskommt. Dass solche Betrachtungen notwendig sind, zeigt der vielfach bekannte "64=65-Beweis": Man kann ein 8×8 -Quadrat so in Teile zerschneiden, dass diese sich scheinbar lückenlos und überschneidungsfrei zu einem 5×13 -Rechteck zusammenlegen lassen.



Ein Beispiel, das nicht in die bisherigen Schemata passt, aber ein wunderschönes Puzzle ergibt:





Aufgabe 4: Ein Würfel sei so in endlich viele Quader zerlegt, dass der Rauminhalt der Umkugel des Würfels so groß ist wie die Summe der Rauminhalte der Umkugeln aller Quader der Zerlegung.

Man beweise, dass dann alle diese Quader Würfel sind.

Bemerkung: Beide vorgestellten Beweise benützen die schwächere Voraussetzung, dass die Summe der Volumina der endlich vielen Quader genau so groß ist wie das Volumen des (großen) Würfels; es wird nicht benützt, dass sie sich tatsächlich zu einem Würfel zusammensetzen lassen. Insofern wird im Folgenden ein allgemeinerer Satz bewiesen.

Zunächst beweisen wir die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel dreier nicht-negativer Zahlen in folgender Form:

HS: Für alle $a, b, c \geq 0$ ist $\frac{1}{3}(a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc}$, wobei Gleichheit für und nur für $a=b=c$ gilt.

Beweis: Für zwei beliebige nicht-negative Zahlen a, b gilt zunächst: $(a+b) \geq 2\sqrt{ab}$ mit Gleichheit genau für $a=b$. Dies folgt aus der äquivalenten Umformung

$$\dots \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0;$$

wobei die Äquivalenz sowohl bei durchgehender Verwendung des "="-Zeichens als auch bei Verwendung des ">"-Zeichens gegeben ist; es gilt also Gleichheit genau für $a=b$.

Dies wenden wir zunächst auf beliebige vier nicht-negative Zahlen a, b, c, d an und erhalten in zwei Schritten $(a+b)+(c+d) \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} \geq 2\sqrt{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{cd}} = 4\sqrt[4]{abcd}$ (Gleichheit $\Leftrightarrow a=b=c=d$)

Für beliebige drei nicht negative Zahlen a, b und c erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot (a+b+c) &= a+b+c + \frac{a+b+c}{3} \geq 4\sqrt[4]{abc \frac{a+b+c}{3}} = 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{(a+b+c)} \\ \Leftrightarrow (a+b+c)^{\frac{3}{4}} &\geq \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[4]{abc} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc} \text{ mit Gleichheit genau für } a=b=c. \end{aligned}$$

(Falls $a=b=c=0$, sind die beiden letzten Äquivalenzen offensichtlich. Falls wenigstens eine der Zahlen a, b, c größer als null ist, dividiert man durch den (positiven!) Wurzelausdruck rechts, multipliziert mit $\frac{3}{4}$ und potenziert schließlich mit $\frac{4}{3}$.

Bemerkung: Durch eine Verallgemeinerung dieses Beweises erhält man die allgemeine Form:

Für nicht-negative x_1, \dots, x_n ist stets $\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$ mit Gleichheit genau für $x_1 = \dots = x_n$.

1. Beweis: O.B.d.A. habe der (große) Würfel die Kantenlänge 1. Er sei in n Quader mit den Kantenlängen a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, \dots, n$) zerlegt. Aus der Voraussetzung der Volumengleichheit leiten wir mit bekannten Formeln für den Rauminhalt von Würfel, Quader, Kugel sowie für die Raumdiagonale eines Quaders die beiden folgenden Identitäten her

$$1 = \sum_{i=1}^n a_i b_i c_i \quad \text{und} \quad \frac{1}{6} \pi (\sqrt{3})^3 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \pi \left(\sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} \right)^3 \quad \text{oder einfacher} \quad 3^{\frac{3}{2}} = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Nun benützen wir die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel in der Form $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}$ (Gleichheit für und nur für $x^2 = y^2 = z^2$) und erhalten so die Abschätzung

$$3^{\frac{3}{2}} = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)^{\frac{3}{2}} \geq \sum_{i=1}^n \left(3\sqrt[3]{a_i^2 b_i^2 c_i^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \sum_{i=1}^n 3^{\frac{3}{2}} a_i b_i c_i = 3^{\frac{3}{2}}.$$

Da das erste und letzte Glied in dieser Abschätzung gleich sind, muss also Gleichheit herrschen. Also ist $a_i^2 = b_i^2 = c_i^2$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$; somit sind alle Quader Würfel.



2. Beweis: Wir beweisen zunächst zwei Hilfssätze:

HS 1: Ist die Summe der Rauminhalte von n Würfeln W_i ($i=1, 2, \dots, n$) so groß wie der Rauminhalt eines großen Würfels W , so ist auch die Summe der Rauminhalte der Umkugeln der W_i so groß wie der Rauminhalt der Umkugel von W .

Beweis: Mit $U(Q)$ bezeichnen wir das Volumen der Umkugel des Quaders Q ; mit w bzw. w_i die Kanten des Würfels W bzw. der Würfels W_i . Nach Voraussetzung ist dann $w^3 = \sum_{i=1}^n w_i^3$ (*).

Für die Umkugel eines Würfels gilt bekanntlich $U(W) = Kw^3$ mit $K := \pi \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aus (*) erhalten wir daher nach Multiplikation mit K und Anwendung des Distributivgesetzes mit

$$U(W) = Kw^3 = K \sum_{i=1}^n w_i^3 = \sum_{i=1}^n Kw_i^3 = \sum_{i=1}^n U(W_i) \quad \text{sofort die Behauptung.}$$

Bemerkung: Es genügt bereits die Angabe, dass das Volumen der Umkugel proportional zur dritten Potenz der Kantenlänge ist; eine Kenntnis des angegebenen Faktors K ist nicht nötig.

HS 2: Unter allen Quadern mit gleichem Rauminhalt hat der Würfel und nur dieser die kleinste Raumdiagonale und damit auch die kleinste Umkugel.

Beweis: Wir bezeichnen das gemeinsame Volumen mit V , die Diagonale des Würfels mit d_Q und das Volumen V mit d_W . Für einen Quader mit Kanten a, b , und c und Volumen V gilt für die Länge der Raumdiagonalen $d_Q^2 = a^2 + b^2 + c^2$ und $V = abc$. Nach der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel ist aber

$$d_Q^2 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} = 3V^{\frac{2}{3}} = d_W^2; \quad \text{also } d_Q \geq d_W;$$

wobei Gleichheit genau für $a=b=c$ gegeben ist.

Nun können wir den eigentlichen Satz beweisen: Wir betrachten n Quader Q_i ($i=1, 2, \dots, n$), die zusammen das gleiche Volumen wie der große Würfel haben. Mit W_i bezeichnen wir denjenigen Würfel, der das gleiche Volumen wie Q_i hat. Nach HS 1 und HS 2 ist dann

$$\sum_{i=1}^n U(Q_i) \geq \sum_{i=1}^n U(W_i) = U(W),$$

wobei Gleichheit genau dann besteht, wenn alle Q_i Würfel sind.

Bemerkungen: Weithin bekannt und etwas leichter beweisbar ist der Satz: "In der Ebene hat von allen flächengleichen Rechtecken das Quadrat und nur dieses den kleinsten Umkreis." Eine Übertragung auf die analoge Situation in der dritten Dimension ist nicht ohne weiteren Beweis möglich.

Die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel kann auch nachgewiesen werden, indem man für eine Funktion zweier Veränderlicher ein globales Minimum nachweist. Hierzu bestimmt man die Nullstellen der partiellen Ableitungen (leider eine nur notwendige Bedingung!) und überprüft anschließend, dass die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen an dieser Stelle eine positiv definite quadratische Form beschreibt – ein deutlich über den Stoff der Schule hinausgehendes Hilfsmittel. Es geht aber auch mit Schulmitteln:

Beweis (des HS, mit Differentialrechnung, knapp formuliert): Wir setzen $x := \frac{b}{a}$; $y := \frac{c}{a}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(a+b+c) &\geq \sqrt[3]{abc} \quad \text{für alle } a, b, c \in \mathbb{R}^+ \text{ mit Gleichheit genau dann, wenn } a=b=c \\ \Leftrightarrow (1+x+y) &\geq 3\sqrt[3]{xy} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ mit Gleichheit genau dann, wenn } 1=x=y \\ \Leftrightarrow f(x, y) &:= \frac{1+x+y}{3\sqrt[3]{xy}} \quad (x, y \in \mathbb{R}^+) \text{ hat für } x=y=1 \text{ ein (einziges) globales Minimum mit } f(1,1)=1. \end{aligned}$$

Zum Nachweis deuten wir f als Schar von Funktionen mit Variablen x und Scharparameter y . Zu jeder Scharkurve (d.h. zu konstantem y) bestimmen wir den x -Wert, an dem die Scharkurve den niedrigsten Punkt besitzt (vgl. (A)), bestimmen den zugehörigen kleinsten Funktionswert (abhängig von y , vgl. (B)). Von all diesen kleinsten Funktionswerten bestimmen wir dann wieder das Minimum über alle y (vgl. (C)):



$$(A) \quad \frac{df_y(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1+x+y}{3\sqrt[3]{xy}} \right) = \frac{2x-y-1}{9x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}.$$

Jede der Scharkurven hat also bei diesem x -Wert eine waagrechte Tangente. Offensichtlich ist $\frac{df_y(x)}{dx}$ in ganz $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definiert. Ferner gilt $\frac{df_y(x)}{dx} > 0$ für alle $x > \frac{y+1}{2}$ und $\frac{df_y(x)}{dx} < 0$ für alle $x < \frac{y+1}{2}$. Damit hat jede Scharkurve an dieser (und nur dieser) Stelle ein globales Minimum.

$$(B) \quad \text{Der Wert dieses Minimum ist dann } f\left(\frac{y+1}{2}, y\right) = \frac{1 + \frac{y+1}{2} + y}{3\sqrt[3]{\frac{y+1}{2}y}} = \frac{(y+1)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}} =: m(y).$$

$$(C) \quad \frac{d}{dy} m(y) = \frac{d}{dy} \frac{(y+1)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}(y-1)}{6y^{\frac{4}{3}}(y+1)^{\frac{1}{3}}} = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

Wieder ist diese Ableitung überall (d.h. in ganz \mathbb{R}^+) definiert, wechselt bei $y = 1$ das Vorzeichen von "-" nach "+"; es liegt also ein globales Minimum vor.

Mit $x = \frac{y+1}{2}$ erhalten wir schließlich wie zu beweisen $x = y = 1$ und $f(1,1) = \frac{3}{3} = 1$.