BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
53144 Bonn
e-mail: bwmathematik@compuserve.com

2 + 3

Seda Kara c9 06

Aufgaben und Lösungen 1999

1. Runde

Stand: 24. Mai 1999

Aufgabe 1

Auf 100 Affen werden 1600 Kokosnüsse verteilt, wobei einige Affen auch leer ausgehen können.
Man beweise, dass es - ganz gleich, wie die Verteilung erfolgt - stets mindestens vier Affen mit derselben Anzahl von Kokosnüssen gibt.

Erste Lösung

Mit a_i sei die Anzahl Nüsse für den i-ten Affen ($i = 1, 2, 3, ..., 100$) bezeichnet; dabei werde die Nummerierung der Affen steigend nach der Anzahl der erhaltenen Kokosnüsse vorgenommen, d. h. es gilt: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_{100}$.

Die Annahme, es gäbe keine vier Affen, welche die gleiche Anzahl von Nüssen erhalten haben, wird nachfolgend zum Widerspruch geführt.

Aus der Annahme einer solchen Verteilung folgt zunächst, dass $a_{i+3} > a_i$ für jedes i ($1 \le i \le 97$) gilt, also $\qquad a_{i+3} \ge 1 + a_i \qquad$ (1).

Durch vollständige Induktion ergibt sich dann, dass für $n = 0, 1, 2, ..., 33$ die folgende Ungleichung gilt: $\qquad a_{3n+1} \ge n \qquad$ (2).

Denn für $n = 0$ ist (2) offensichtlich erfüllt, da kein Affe eine negative Anzahl Kokosnüsse erhalten hat, und aus der Induktionsannahme $a_{3n+1} \ge n \quad (n \ge 0)$ folgt mit (1) $\qquad a_{3(n+1)+1} = a_{3n+1+3} \ge 1 + a_{3n+1} \ge 1 + n$.

Kein Glied der Folge (0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, ..., 32, 32, 32, 33) ist also größer als das entsprechende Glied der Folge (a_i).

Daher ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} a_i \ge 3 \cdot \sum_{j=0}^{32} j + 33 = 3 \cdot \frac{32 \cdot (32+1)}{2} + 33 = 1617 > 1600.$

Die Anzahl der verteilten Nüsse ist also größer als 1600 - im Widerspruch zur Voraussetzung.

Zweite Lösung

Wie in der ersten Lösung wird die Annahme, es gäbe keine vier Affen, welche die gleiche Anzahl von Nüssen erhalten haben, zum Widerspruch geführt.

Unter dieser Annahme kann man die Affen mitsamt ihren Kokosnüssen derart auf drei Käfige verteilen, dass in keinem Käfig zwei Affen mit gleicher Zahl von Nüssen sind. Nun sei a_i die Anzahl der Affen im Käfig i ($i = 1, 2, 3$); n_i sei die Gesamtzahl aller Nüsse im Käfig i.

Es ist unmittelbar einsichtig, dass n_i als Summe von a_i verschiedenen natürlichen Zahlen nicht kleiner sein kann als die Summe der a_i kleinsten natürlichen Zahlen, so dass für $i = 1, 2, 3$ gelten muss

$$n_i \ge \sum_{k=0}^{a_i - 1} k = \frac{a_i \cdot (a_i - 1)}{2} \quad \text{und somit} \quad a_i^2 - a_i \le 2 \cdot n_i .$$

Laut Aufgabenstellung ist ferner $a_1 + a_2 + a_3 = 100$ und $n_1 + n_2 + n_3 = 1600$.
Damit gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} 0 &\le (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 \\ &= 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 - 2a_1a_2 - 2a_2a_3 - 2a_3a_1 \end{aligned}$$

$= 3a_1^2 + 3a_2^2 + 3a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 2a_1a_2 - 2a_2a_3 - 2a_3a_1$
$= 3a_1^2 + 3a_2^2 + 3a_3^2 - (a_1 + a_2 + a_3)^2$
$= 3a_1^2 + 3a_2^2 + 3a_3^2 - 3a_1 - 3a_2 - 3a_3 + 3(a_1 + a_2 + a_3) - 100^2$
$= 3\cdot(a_1^2 - a_1) + 3\cdot(a_2^2 - a_2) + 3\cdot(a_3^2 - a_3) + 3\cdot 100 - 10000$
$\leq 3\cdot(2n_1 + 2n_2 + 2n_3) - 9700$
$= 6 \cdot 1600 - 9700$
$= -100.$

Damit ergibt sich mit $0 \leq -100$ der gewünschte Widerspruch.

Aufgabe 2

Zwei Zahlenfolgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ werden definiert durch $a_1 = b_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).
Man beweise, dass die Glieder der ersten Folge paarweise teilerfremd sind.

Erste Lösung

Für jede positive ganze Zahl n ergibt sich durch Multiplikation der n Gleichungen $b_{i+1} = a_i \cdot b_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) und Division durch $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ die Gleichung

$$b_{n+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \qquad (1).$$

Die Division ist hierbei zulässig, da alle Folgenglieder durch Addition und Multiplikation in der Menge der positiven ganzen Zahlen erhalten werden, also von null verschieden sind.
Aus (1) folgt zusammen mit der rekursiven Definition der Folge (a_n):

$$a_{n+1} - a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \quad (2).$$

Wenn a_{n+1} und a_n nicht teilerfremd sind, also einen gemeinsame Primteiler p haben, so ist p auch Teiler von $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$, mithin als Primfaktor in mindestens einer der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ enthalten.
Hieraus folgt:
Wenn für die positive ganze Zahl n alle Folgenglieder $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ zu a_n teilerfremd sind, dann sind die n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ teilerfremd zu a_{n+1}.
Wegen der Teilerfremdheit von a_1, a_2 ($a_1 = 1$, $a_2 = 2$) ergibt sich hieraus durch vollständige Induktion die Behauptung.

Zweite Lösung

Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der folgenden Eigenschaft (E) der Folge (a_n): Jede Primzahl p ist Teiler von höchstens einem Folgenglied a_n.
Hätten nämlich zwei Folgenglieder a_n, a_m ($n \neq m$) einen gemeinsamen Teiler $t > 1$, wäre jeder Primfaktor von t, also im Widerspruch zu (E) mindestens eine Primzahl p, ein gemeinsamer Teiler von a_n und a_m.

Zum Beweis von (E) sei p eine beliebige Primzahl, die mindestens ein Folgenglied teilt - sonst ist nichts zu zeigen. Mit n sei die kleinste natürliche Zahl i bezeichnet, für welche p ein Teiler von a_i ist.
Wegen $a_1 = 1$ folgt $n \geq 2$.
Aufgrund der Minimaleigenschaft von n ist dann keines der Folgenglieder a_i $(1 \leq i \leq n-1)$ durch p teilbar, also auch nicht deren Produkt. Wegen

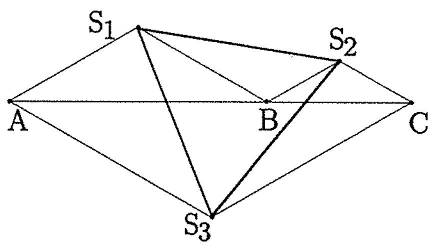
$$b_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-3} \cdot \ldots \cdot a_1 \qquad (1)$$

ist daher auch b_n nicht durch p teilbar.
Hierbei ergibt sich die Gleichung (1) durch vollständige Induktion:
Nach Definition der Folge (b_i) gilt $b_2 = a_1 \cdot b_1 = a_1$, und aus der Induktionsannahme $b_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-3} \cdot \ldots \cdot a_1$ $(n \geq 2)$ und der Definition der Folge (b_i) folgt $b_{n+1} = a_n \cdot b_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-3} \cdot \ldots \cdot a_1$.
Als Summe der durch p teilbaren Zahl a_n und der nicht durch p teilbaren Zahl b_n ist a_{n+1} nicht durch p teilbar.
Aus (1) ergibt sich weiter, dass b_i für jedes $i \geq n+1$ den Faktor a_n enthält, mithin durch p teilbar ist. Für $i \geq n+1$ erfolgt der Übergang von a_i zu a_{i+1} jeweils durch Addition von b_i, also einer durch p teilbaren Zahl.
Den gleichen Rest, den a_{n+1} bei der Division durch p lässt, haben somit auch alle Glieder a_i mit Indizes, die größer als n+1 sind; diese Folgenglieder sind also alle nicht durch p teilbar. Damit ist die Eigenschaft (E) bewiesen.

Bemerkung: Die von einer Reihe von Teilnehmern geäußerte Vermutung, dass die Folge (a_i) vom zweiten Folgenglied an ausschließlich aus Primzahlen besteht, ist nicht zutreffend. So ist z. B. bereits $a_7 = 371 = 7 \cdot 53$, also keine Primzahl.

Aufgabe 3

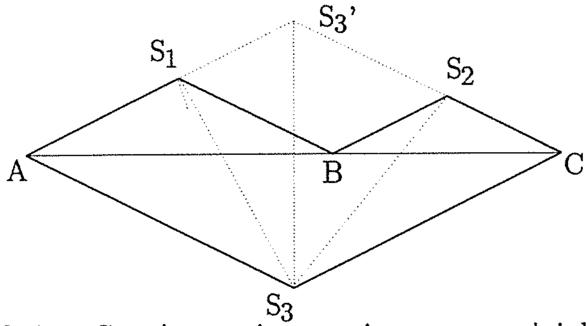
In einer Ebene werden auf dem geraden Streckenzug ABC über AB, BC und CA als Grundseiten die positiv orientierten gleichschenkligen Dreiecke ABS_1, BCS_2 und CAS_3 mit den Basiswinkeln 30° errichtet.
Man beweise: Das Dreieck $S_3S_2S_1$ ist gleichseitig.



Vorbemerkung
In der Skizze und den nachfolgenden Beweisen wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\overline{AB} \geq \overline{BC}$ vorausgesetzt.

Erste Lösung (elementargeometrisch)

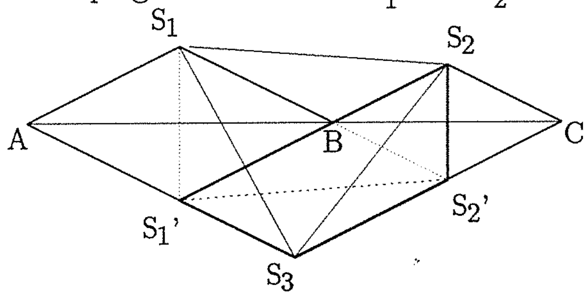
Der Schnittpunkt von (AS_1) und (BS_2) werde mit S_3' bezeichnet. Nach Kongruenzsatz wsw ist das Dreieck ACS_3' (gegensinnig) kongruent zum gleichschenkligen Dreieck AS_3C. Somit sind die beiden Dreiecke AS_3S_3' und S_3CS_3' gleichseitig und kongruent. Die gegenüberliegenden Seiten im Viereck $S_1BS_2S_3'$ sind nach der Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel parallel, das Viereck ist also ein



Parallelogramm. Daher haben die Strecken $\overline{S_1S_3'}$ und $\overline{BS_2}$ die gleiche Länge; wegen $\overline{BS_2} = \overline{CS_2}$ folgt: $\overline{S_1S_3'} = \overline{CS_2}$.
Die Dreiecke S_3CS_2 und $S_3S_3'S_1$ sind kongruent nach Kongruenzsatz sws. Mithin ist das Dreieck $S_1S_3S_2$ gleichschenklig mit einem 60°-Winkel an der Spitze S_3, also - wie zu zeigen war - gleichseitig.

<u>Zweite Lösung</u> (elementargeometrisch, hier nur skizziert)

Man spiegele die Punkte S_1 und S_2 an AC und bezeichne die Bildpunkte mit S_1' bzw. S_2'.



Weil der Winkel ABS_1' die Weite 30° hat, ist der Winkel S_2BS_1' gestreckt. Weiterhin liegt S_2' auf S_3C, weil der Winkel BCS_2' als Spiegelbild eines 30°-Winkels wegen des gemeinsamen Schenkels CB mit dem 30°-Winkel BCS_3 zusammenfällt.
Über Winkelbetrachtungen ergibt sich leicht, dass die Strecken S_3S_2' und $S_1'S_2$ parallel sind und die Winkel $S_3S_1'S_2$ und $S_1'S_2S_2'$ beide die Weite 60° haben. Das Viereck $S_1'S_3S_2'S_2$ ist also ein symmetrisches Trapez.
Da in jedem achsensymmetrischen Viereck die Diagonalen die gleiche Länge haben, sind die Strecken $S_1'S_2'$ und S_2S_3 gleich lang. Somit folgt $\overline{S_1S_2} = \overline{S_2S_3}$, weil $S_1'S_2'$ das Bild von S_1S_2 der Achsenspiegelung an AC ist.
Analog (oder unmittelbar aus Symmetriegründen) ergibt sich durch Betrachtung des Vierecks $S_1'S_3S_2'S_1$ die Kongruenz von S_1S_3 und S_1S_2.
Also haben alle Seiten des Dreieck $S_3S_2S_1$ die gleiche Länge.

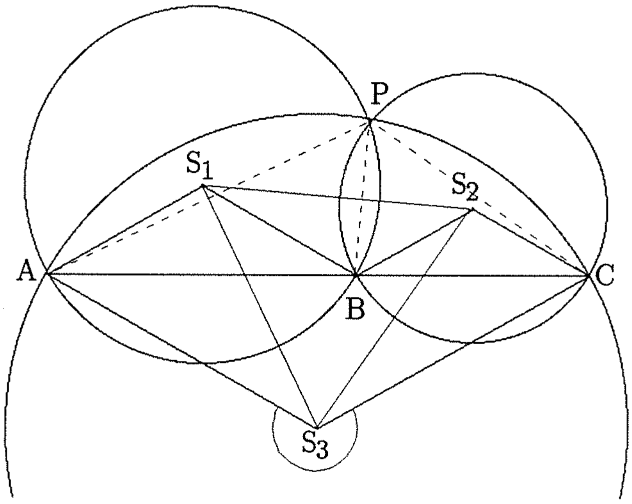
<u>Dritte Lösung</u> (elementargeometrisch)

Diese Lösung verwendet die folgenden bekannten Beziehungen (1), (2.1) und (2.2):

(1) Wenn die Strecke PQ eine gemeinsame Sehne zweier Kreise mit Mittelpunkten M_1 und M_2 ($M_1 \neq M_2$) ist, dann verläuft die Gerade durch M_1 und M_2 orthogonal zu PQ.

(2.1) Jeder Umfangswinkel über einer Kreissehne ist halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel.

(2.2) Ist k der Umkreis eines Dreiecks ABC, so liegen alle Punkte X, für welche die Winkel ACB und AXB gleiche Weite haben, auf k. Und zwar in der gleichen Halbebene von (AB) wie C.



Der Kreis um S_1 durch A geht aufgrund der Gleichschenkligkeit von Dreieck ABS_1 auch durch B. Da der Mittelpunktswinkel über AB die Weite 120° hat, hat nach (2.1) jeder Umfangswinkel über AB die Weite 60°. Das Entsprechende gilt für den Kreis um S_2 durch C. Der von B verschiedene Schnittpunkt der beiden Kreise sei mit P bezeichnet.

Der Winkel ABP beträgt 120°, da er sich aus den nebeneinander liegenden 60° - Winkeln APB und BPC zusammensetzt. Da der Winkel AS_3C die Weite 240° hat, betragen die zugehörigen Umfangswinkel über der Sehne AB im Kreis um S_3 stets 120°, dieser Kreis verläuft also nach (2.2) durch P.

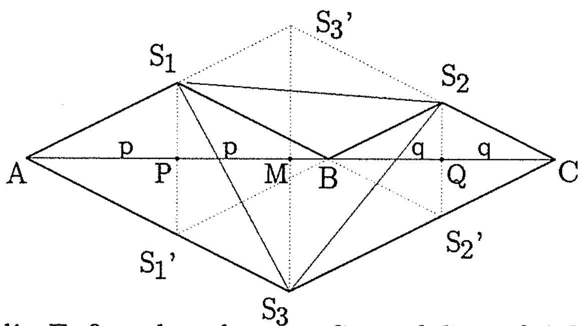
Nach (1) ist AP orthogonal zu (S_3S_1), BP ist orthogonal zu S_1S_2. Der Winkel $S_3S_1S_2$ muss daher die gleiche Weite wie der Winkel APB haben; er beträgt somit 60°. Das Entsprechende ergibt sich für den Winkel $S_1S_2S_3$.

Da zwei Winkel im Dreieck $S_3S_2S_1$ die Weite 60° haben, folgt die Gleichseitigkeit des Dreiecks.

Vierte Lösung

Im gleichseitigen Dreieck lässt sich die Seitenlänge s aus der Höhe h mit der Formel $s^2 = \frac{4}{3} \cdot h^2$ berechnen. Denn mit dem Satz von Pythagoras erhält man die Gleichung $h^2 = s^2 - (\frac{1}{2}s)^2$, aus der die behauptete Formel unmittelbar durch Umformen folgt. Bezeichnet man für die Verwendung in dieser Lösung die Wurzel aus $\frac{4}{3}$ mit 2w, so gilt die Formel $s = 2w \cdot h$ (0),
von der nachfolgend mehrfach Gebrauch gemacht wird.

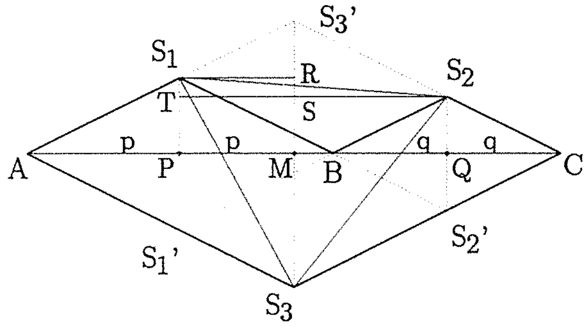
Die gegebene Figur wird an der Geraden (AC) gespiegelt; die Bildpunkte zu S_1, S_2, S_3 seien S_1', S_2', S_3'. Dann sind die Dreiecke $AS_1'S_1$, $S_1S_1'B$, $BS_2'S_2$, $S_2'CS_2$, AS_3S_3' und S_3CS_3' gleichschenklig mit einem Winkel von 2·30° an der Spitze, also gleichseitig. Die Länge der Strecke AB sei 2p, die Länge von BC sei mit 2q bezeichnet; dann ist $\overline{AC} = 2 \cdot (p + q)$.



Der Mittelpunkt der Strecke AC sei M, die Fußpunkte der von S_1 und S_2 auf AC gefällten Lote seien P und Q.

Da die Dreiecke $AS_1'S_1$, AS_3S_3' und $S_2'CS_2$ gleichseitig sind, ergibt sich nach der Formel (0) $\overline{PS_1} = w \cdot p$, $\overline{QS_2} = w \cdot q$ und $\overline{S_3M} = w \cdot (p + q)$.

Die Seitenlängen des Dreiecks $S_1S_3S_2$ werden nun mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet; hierbei bezeichnen R, S, T in dieser Reihenfolge die Fußpunkte der Lote von S_1 auf S_3M, von S_2 auf S_3M, von S_2 auf S_1P. Dann ist



$\overline{S_1T} = \overline{PS_1} - \overline{QS_2} = w\cdot p - w\cdot q$,
$\overline{TS_2} = p + q$,
$\overline{SS_2} = \overline{MC} - \overline{QC} = (p + q) - q = p$,
$\overline{SS_3} = \overline{QS_2} + \overline{S_3M} = w\cdot q + w\cdot(p + q)$,
$\overline{S_1R} = \overline{AM} - \overline{AP} = (p + q) - p = q$,
$\overline{RS_3} = \overline{PS_1} + \overline{S_3M} = w\cdot p + w\cdot(p + q)$.

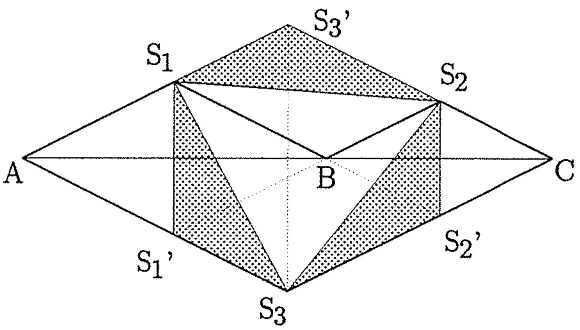
Mit dem Satz des Pythagoras erhält man dann:

$$\overline{S_1S_2}^2 = \overline{S_1T}^2 + \overline{TS_2}^2 = (w\cdot p - w\cdot q)^2 + (p + q)^2$$
$$= \tfrac{1}{3}(p^2 - 2p\cdot q + q^2) + p^2 + 2p\cdot q + q^2 = \tfrac{4}{3}(p^2 + p\cdot q + q^2)$$
$$\overline{S_2S_3}^2 = \overline{SS_2}^2 + \overline{SS_3}^2 = p^2 + (w\cdot p + 2w\cdot q)^2$$
$$= p^2 + \tfrac{1}{3}(p^2 + 4p\cdot q + 4q^2) = \tfrac{4}{3}(p^2 + p\cdot q + q^2)$$
$$\overline{S_3S_1}^2 = \overline{S_1R}^2 + \overline{RS_3}^2 = q^2 + (2w\cdot p + w\cdot q)^2$$
$$= q^2 + \tfrac{1}{3}(4p^2 + 4p\cdot q + q^2) = \tfrac{4}{3}(p^2 + p\cdot q + q^2)$$

Alle drei Seiten von Dreieck $S_3S_2S_1$ haben also die gleiche Länge.

Fünfte Lösung

Die gegebene Figur wird an der Geraden (AC) gespiegelt; die Bildpunkte zu S_1, S_2, S_3 seien S_1', S_2', S_3'. Dann ist das Viereck AS_3CS_3' eine Raute, die aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist, da sie einen Winkel von 60° an der Ecke A bzw. C hat.



Es wird gezeigt, dass die Dreiecke $S_1S_1'S_3$, $S_3S_2'S_2$ und $S_2S_3'S_1$ kongruent sind; aus dieser Kongruenz folgt dann $\overline{S_1S_3} = \overline{S_3S_2} = \overline{S_2S_1}$.

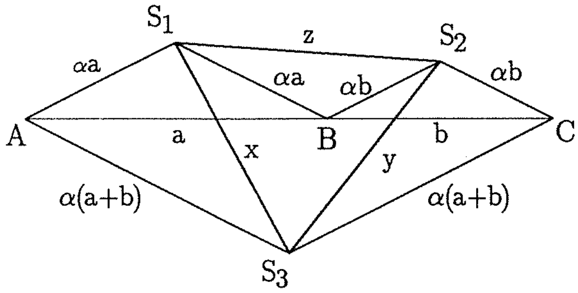
Die Dreiecke $AS_1'S_1$ und $S_2'CS_2$ sind gleichschenklig mit einem Winkel von 60° an der Spitze A bzw. C, also gleichseitig.

Da die Winkel S_1BA und $S_2'BC$ (als Bild von Winkel CBS_2) beide die Weite 30° haben, ist der Streckenzug S_1BS_2' geradlinig. S_1S_2' ist parallel zu $S_3'C$.

Dann ist $\overline{S_1'S_3} = \overline{S_1S_3'} = \overline{S_2'C} = \overline{S_2S_2'}$ und $\overline{S_1S_1'} = \overline{AS_1} = \overline{S_3S_2'} = \overline{S_3'S_2}$. Also stimmen die Dreiecke $S_1S_1'S_3$, $S_3S_2'S_2$ und $S_2S_3'S_1$ jeweils in der Länge zweier Seiten überein; da der eingeschlossene Winkel jeweils 120° beträgt, sind sie kongruent (sws).

Sechste Lösung (trigonometrisch)

Nach Konstruktion haben die beiden Winkel S_2CS_3 und S_3AS_1 die Weite 60°; der Winkel S_2BS_1 hat die Weite 120°.



Aus der Ähnlichkeit der errichteten Dreiecke ergibt sich die in der Skizze vorgenommene Beschriftung der Seiten mit $\alpha = \overline{AS_1} : \overline{AB}$.

Unter Verwendung des Kosinussatzes erhält man für die Seiten x, y, z des Dreiecks $S_3S_2S_1$:

$$\begin{aligned} x^2 &= (\alpha a)^2 + (\alpha(a+b))^2 - 2\alpha a\alpha(a+b)\cdot\cos(60°) \\ &= \alpha^2a^2 + \alpha^2a^2 + 2\alpha^2ab + \alpha^2b^2 - 2\alpha^2a(a+b)\cdot\tfrac{1}{2} \\ &= 2\alpha^2a^2 + 2\alpha^2ab + \alpha^2b^2 - \alpha^2a^2 - \alpha^2ab \\ &= \alpha^2a^2 + \alpha^2ab + \alpha^2b^2 \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie in a, b ergibt sich weiter $x^2 = y^2$.

$$\begin{aligned} z^2 &= (\alpha a)^2 + (\alpha b)^2 - 2\alpha a\alpha b\cdot\cos(120°) \\ &= \alpha^2a^2 + \alpha^2b^2 - 2\alpha^2ab\cdot(-\tfrac{1}{2}) \\ &= \alpha^2a^2 + \alpha^2ab + \alpha^2b^2 \end{aligned}$$

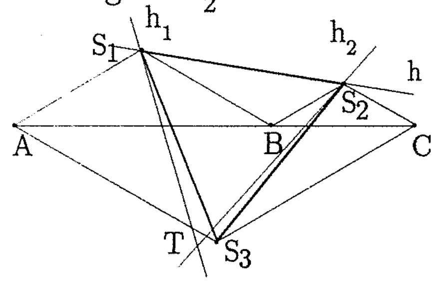
Damit ist $x = y = z$; das Dreieck $S_3S_2S_1$ ist also gleichseitig.

Siebente Lösung (abbildungsgeometrisch)

Mit D_i $(i = 1, 2, 3)$ wird nachfolgend die Drehung um 120° mit dem Drehzentrum S_i bezeichnet.

Dann ist $D_1(A) = B$, $D_2(B) = C$ und $D_3(C) = A$. Die durch Verkettung der drei Drehungen entstehende Abbildung $D_3 \circ D_2 \circ D_1$ hat also A als Fixpunkt. Da die Summe der Drehwinkel 360° beträgt, ist die zusammengesetzte Abbildung mithin die identische Abbildung der Ebene.

Man bezeichne die Gerade durch S_1 und S_2 mit h; die Bilder von h bei einer 60°-Drehung um S_2 und einer −60°- Drehung um S_1 seien mit h_2 bzw. h_1 bezeichnet.



Der Schnittpunkt von h_2 und h_1 sei T. Zum Beweis genügt es dann, $T = S_3$ nachzuweisen.

In der Skizze links sind die Geraden h_2 und h_1 bewusst zur Verdeutlichung des Beweisgangs ungenau eingezeichnet, um nicht bereits das Ergebnis $T = S_3$ vorwegzunehmen.

Zusammensetzen von zwei Spiegelungen an nicht parallelen Achsen ergibt eine Drehung um den Schnittpunkt der Achsen mit dem doppelten des Winkels zwischen den Achsen als Drehwinkel.

Verketten der Spiegelung an h_1 mit der Spiegelung an h ergibt daher D_1, Verketten der Spiegelung an h mit der Spiegelung an h_2 daher D_2.

Bezeichnet man die Achsenspiegelung an einer Geraden g mit $\alpha(g)$, gilt daher

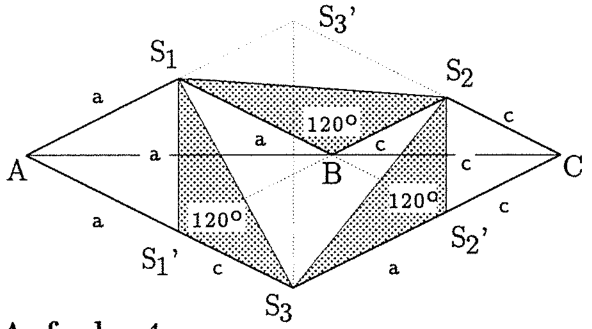
$$\alpha(h_2) \circ \alpha(h_1) = \alpha(h_2) \circ \alpha(h) \circ \alpha(h) \circ \alpha(h_1) = D_2 \circ D_1.$$

Andererseits ergibt $\alpha(h_1) \circ \alpha(h_2)$ die 240°- Drehung um T; diese sei mit D_0 bezeichnet.

Daher ist $D_3 \circ D_0 = D_3 \circ D_2 \circ D_1$, also die identische Abbildung. Somit sind die Drehungen D_3 und D_0 invers zueinander, haben also das gleiche Zentrum. Das bedeutet aber $T = S_3$, was zum Beweis genügte.

Bemerkung

Bei den elementargeometrischen Lösung dieser Aufgabe wie im ersten Lösungsbeispiel sind viele Feststellungen über Winkelgrößen und Parallelität so naheliegend, dass bereits eine sehr knappe Argumentation reicht. So ist im Extremfall nach einer Beschriftung in der links angegebenen Form der Beweis fast unmittelbar zu sehen.



Aufgabe 4

Es gibt konvexe Polyeder mit mehr Seitenflächen als Ecken. Was ist die kleinste Anzahl von dreieckigen Seitenflächen, die ein solches Polyeder haben kann? (Beweis!)

Lösung

Die Anzahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen des Polyeders werde (wie üblich) mit e, k und f bezeichnet. Jede Seitenfläche hat mindestens drei Ecken; es sei d die Anzahl der dreieckigen Flächen, v die Anzahl der Flächen mit mindestens vier Ecken; man hat also $f = d + v$.

Durchläuft man nun alle Seitenflächen und markiert dabei jeweils die zugehörigen Kanten, wird jede Kante genau zweimal markiert. Da zu jeder dreieckigen Seitenfläche drei und zu jeder anderen Seitenfläche mindestens vier Kanten gehören, gilt

$$2k \geq 3d + 4v \qquad (1).$$

Nach der Eulerschen Formel für Polyeder ist

$$e + f = k + 2 \qquad (2)$$

und nach der Voraussetzung der Aufgabe hat man

$$f - e \geq 1 \qquad (3).$$

Durch Eliminieren von k erhält man aus (1) und (2)

$$2e + 2f - 4 \geq 3d + 4v = 3d + 4\cdot(f - d) = 4f - d\,,$$

also durch Umformen und Anwenden von (3)

$$d \geq 2f + 4 - 2e = 4 + 2\cdot(f - e) \geq 6.$$

Die Anzahl der Dreiecke in einem konvexen Polyeder der betrachteten Art beträgt also mindestens sechs.

Diese - durch die bisherigen Überlegungen zunächst nur als untere Schranke nachgewiesene - Zahl kommt tatsächlich vor, denn fügt man z. B. zwei kongruente reguläre Tetraeder mit einer Seitenfläche zusammen, erhält man ein Polyeder mit 5 Ecken und 6 Flächen.

Die kleinste Anzahl von dreieckigen Seitenflächen, die ein konvexes Polyeder mit mehr Seitenflächen als Ecken haben kann, beträgt also sechs.

Bemerkungen

1. In der Gleichung (1) steht genau dann das Gleichheitszeichen, wenn das Polyeder keine Seitenfläche mit mehr als vier Ecken hat. Für derartige Polyeder beträgt die Anzahl der dreieckigen Seitenflächen - unabhängig von der Beziehung zwischen e und f - also stets $4 + 2\cdot(f - e)$.
2. Viele Teilnehmer sind bei der Lösung dieser Aufgabe offenbar davon ausgegangen, dass ausschließlich solche Polyeder betrachtet werden, deren Flächen alle Dreiecke sind. Bei dieser Betrachtung findet man dann z. B. schnell durch schrittweises Vermehren der Flächen ein Polyeder mit 5 Ecken und sechs Flächen. Auch wenn damit das gleiche Beispiel angegeben wird wie im obigen Lösungsbeispiel, ist der Ausgangspunkt doch eine nicht verstandene Aufgabenstellung, so dass die Aufgabe insgesamt nicht gelöst ist.
3. Zwar wurde oben als Beispiel eines Polyeders der betrachteten Art mit minimaler Anzahl von dreieckigen Flächen wegen der einfachen Beschreibungsmöglichkeit ein Polyeder mit ausschließlich dreieckigen Flächen angegeben; es gibt aber auch andere Polyeder der zu untersuchenden Art mit sechs dreieckigen Flächen. Wenn man z. B. bei einem Würfel (s. Skizze) die Pyramide ABCD durch eine Pyramide ABCS mit der gleichen Grundfläche ABC, aber kleinerer Höhe ersetzt, erhält man ein Polyeder mit sechs dreieckigen und drei viereckigen Flächen und acht Ecken.