BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
53144 Bonn
e-mail: bwmathematik@compuserve.com

Aufgaben und Lösungen 1998

2. Runde

Stand: 25. Oktober 1998

Aufgabe 1

Man bestimme alle Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die Lösungen der Gleichung
$xy + yz + zx - xyz = 2$ sind.

Lösung

Die Ausgangsgleichung

$$xy + yz + zx - xyz = 2 \qquad (1)$$

ist wegen

$$\begin{aligned}(x-1) + (y-1) + (z-1) - (x-1)\cdot(y-1)\cdot(z-1) \\ = x + y + z - 3 - (xyz - xy - yz - xz + x + y + z - 1) \\ = xy + xz + yz - xyz - 2\end{aligned}$$

äquivalent zu

$$(x-1) + (y-1) + (z-1) = (x-1)\cdot(y-1)\cdot(z-1).$$

Mit der Substitution $a := x - 1$, $b := y - 1$, $c := z - 1$ gelangt man daher zu

$$a + b + c = abc \qquad (2).$$

Dabei ist (x, y, z) genau dann eine Lösung von (1) mit ganzzahligen Komponenten, wenn $(x - 1, y - 1, z - 1)$ eine Lösung von (2) mit Komponenten aus $\mathbb{Z}$ ist.

Nachfolgend wird gezeigt:

(L) Die Lösungsmenge von (2) besteht aus dem Tripel (0, 0, 0), den jeweils 6 Permutationen der Tripel (1, 2, 3) und $(-3, -2, -1)$ sowie für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ den 6 Permutationen von $(-n, 0, n)$.

Rücksubstitution liefert: Die gesuchten Lösungstripel sind (1, 1, 1) sowie alle Permutationen von (2, 3, 4), $(-2, -1, 0)$ und $(1 - n, 1, 1 + n)$ (für $n \in \mathbb{N}^*$).

Erster Beweis zu (L)

Wenn eine der Zahlen a, b, c den Wert null hat, ist das Produkt null, zur Erfüllung der Gleichung ist also notwendig und hinreichend, dass die beiden anderen Zahlen Gegenzahlen sind.

Zu betrachten ist daher nur noch der Fall, dass a, b, c verschieden von null sind. OBdA sei $|a| \le |b| \le |c|$. Dann hat man nach (2) und aufgrund der Summenungleichung für Beträge

$$|abc| = |a + b + c| \le |a| + |b| + |c| \le 3 \cdot |c|$$

und daher $|ab| \le 3$.

Das Paar $(|a|, |b|)$ kann also höchstens einen der Werte (1, 1), (1, 2), (1, 3) haben.

Da zugleich mit (a, b, c) auch $(-a, -b, -c)$ eine Lösung ist, zeigt die folgende Tabelle von den zwölf zugehörigen Gleichungen nur die sechs Fälle mit $a = -1$ und gibt den zugehörigen Wert für c an:

(a, b)	zugeh. Gleichung			Lösungstripel
$(-1, -1)$	$-1 - 1 + c = c$	$-2 = 0$	keine Lösung	-
$(-1, 1)$	$-1 + 1 + c = -c$	$2c = 0$	$c = 0$	-
$(-1, -2)$	$-1 - 2 + c = 2c$	$c = -3$	$c = -3$	$(-1, -2, -3)$
$(-1, 2)$	$-1 + 2 + c = -2c$	$3c = -1$	keine Lösung in $\mathbb{Z}$	-
$(-1, -3)$	$-1 - 3 + c = 3c$	$2c = -4$	$c = -2$	- $(\lvert c\rvert < \lvert b\rvert)$
$(-1, 3)$	$-1 + 3 + c = -3c$	$4c = -2$	keine Lösung in $\mathbb{Z}$	-

Die einzigen ganzzahligen Lösungstripel (unter den Bedingungen $abc \neq 0$ und $|a| \le |b| \le |c|$) sind somit $(1, 2, 3)$ und $(-1, -2, -3)$.
Durch Einsetzen in die Gleichung (2) wird bestätigt, dass die Tripel $(-z, 0, z)$ (für $z \in \mathbb{Z}$), $(1, 2, 3)$ und $(-3, -2, -1)$ tatsächlich Lösungen sind.

Zweiter Beweis zu (L)

Wenn eine der Zahlen a, b, c den Wert null hat, ist das Produkt null, zur Erfüllung der Gleichung ist also notwendig und hinreichend, dass die beiden anderen Zahlen Gegenzahlen sind.
Zu betrachten ist daher nur noch der Fall, dass a, b, c verschieden von null sind. Da zugleich mit (a, b, c) sowohl $(-a, -b, -c)$ als auch jede Permutation von (a, b, c) eine Lösung von (2) liefert, genügt die Untersuchung der beiden Fälle

(a) $a < 0 < b \le c$,

(b) $0 < a \le b \le c$.

Da (2) zur Gleichung $\quad a \cdot (bc - 1) = b + c \quad$ (3)
äquivalent ist, kann der Fall (a) nicht eintreten; denn dann wäre die linke Seite der Gleichung (3) negativ oder null, während die rechte Seite positiv ist.
Im Falle (b) hat man (wegen (3)) $c \cdot (ab - 1) = abc - c = a + b \le 2c$.
Division durch die positive Zahl c und Addition von 1 ergibt

$ab \le 3$, also $(a, b) \in \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3) \}$.

Einsetzen von $(1, 1)$ in (3) führt zur nicht erfüllbaren Gleichung $c \cdot 0 = 2$; setzt man $(1, 3)$ in (3) ein, ergibt sich $2c = 4$, also $c = 2$, was der Voraussetzung $b \le c$ widerspricht.
Setzt man $(a, b) = (1, 2)$ in (3) ein, ergibt sich $c = 3$. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist daher $(1, 2, 3)$ die einzige Lösung.
Insgesamt ergeben sich als Lösungen von (2) also die in (L) angegebenen Tripel.

Dritter Beweis zu (L)

Da zugleich mit (a, b, c) sowohl $(-a, -b, -c)$ als auch jede der Permutationen von (a, b, c) eine Lösung von (2) liefert, genügt die Bestimmung der Lösungen (a, b, c) mit $a \le b \le c$; dabei reicht die Untersuchung der drei Fälle

(I) $abc = 0$,

(II) $a < 0 < b \le c$,

(III) $0 < a \le b \le c$.

Zu (I): In diesem Fall ist mindestens eine der drei Zahlen a, b, c null; genau dann ist (2) erfüllt, wenn die beiden anderen Zahlen Gegenzahlen sind. Lösungen sind also alle Tripel der Form $(-n, 0, n)$ mit $n \in \{ 0, 1, 2, 3, ... \}$.

Zu (II): Mit (2) ergibt sich in diesem Fall:

$a < a + b + c = abc \le a \quad$, also ein Widerspruch.

Zu (III): Im Falle $a \ge 2$ ergäbe sich als Folgerung aus (2)

$4c \le abc = a + b + c \le 3c \quad$, also ein Widerspruch.

Im verbleibenden Fall $a = 1$ geht (2) über in
$1 + b + c = bc$, also ist $b > 1$, da sonst $2 + c = c$ folgte.
Auflösen nach c ergibt: $\quad c = \frac{b+1}{b-1}$, also $c = 1 + \frac{2}{b-1}$.
Für $b > 2$ ist c daher nicht ganzzahlig, so dass als einzige Möglichkeit $b = 2, c = 3$ verbleibt. Man erhält also das Lösungstripel $(1, 2, 3)$.

Unter Beachtung der Bemerkung zu Beginn dieses Beweises zu (L) erhält man als Lösungen von (2) alle Permutationen der Tripel $(-z, 0, z)$ (für $z \in \mathbb{Z}$), $(1, 2, 3)$ und $(-3, -2, -1)$.

Aufgabe 2

Es sei $M = \{1, 2, 3, ..., 10000\}$. Man beweise, dass man 16 Teilmengen von M mit folgender Eigenschaft finden kann: Für jede Zahl z aus M gibt es acht dieser Teilmengen, deren Schnittmenge $\{z\}$ ist.

Erster Beweis

Es sei D die Menge aller Zahlen, deren Darstellung im Stellenwertsystem mit der Basis 2 höchstens 16 Stellen hat, wobei genau 8 dieser Stellen mit Einsen belegt sind. Jede Auswahl von 8 der 16 Stellen, an denen die Einsen stehen, entspricht umkehrbar eindeutig der Auswahl von acht Elementen aus einer 16-elementigen Menge. Die Mächtigkeit der Menge D beträgt also $\binom{16}{8}$.

$$\binom{16}{8} = \frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 13\cdot11\cdot10\cdot9 = 12870 > 10000\,.$$

Man bilde nun eine beliebige 10000-gliedrige injektive Folge $(n_1, n_2, ..., n_{10000})$ in D, z. B. durch Ordnen der Elemente von D nach der Größe und Nummerierung der ersten 10000 Elemente.

Die 16 Teilmengen $M_1, M_2, M_3, ..., M_{16}$ von M werden nun auf folgende Weise konstruiert:

Für jedes $i \in M$ und jedes $j \in \{1, 2, 3, ..., 16\}$ ist i genau dann Element von M_j, wenn die Binärdarstellung von n_i an der j-ten Stelle (von rechts) eine Eins hat.

Nach Konstruktion gehört dann jede Zahl z aus M zu genau 8 der 16 konstruierten Teilmengen von M und liegt daher in ihrer Schnittmenge.

Für eine von z verschiedene Zahl w aus M hat die Binärdarstellung von n_w an mindestens einer der Positionen eine Null, wo bei n_z eine Eins steht. Daher liegt w nicht in der Schnittmenge, die somit als einziges Element z enthält.

Zweiter Beweis

Zu der Indexmenge $I = \{1, 2, 3, ..., 16\}$ bilde man zunächst die Menge P aller achtelementigen Teilmengen. Wie aus der Kombinatorik bekannt ist, beträgt deren Mächtigkeit $\#P = \binom{16}{8} = 12870$. Nach Durchnummerieren der Elemente von P lässt sich diese Menge in der Form $P = \{I_1, I_2, I_3, ..., I_{12870}\}$ darstellen.

Man definiere nun die mit $M_1, M_2, M_3, ..., M_{16}$ bezeichneten gesuchten 16 Teilmengen von M auf folgende Weise:

Für $i = 1, 2, 3, ... 16$ sei M_i die Menge aller $z \in M$, für die i in I_z liegt.

Nach Konstruktion ist dann zunächst jedes $z \in M$ in genau acht der sechzehn Mengen M_i enthalten, da die Indexmenge I_z genau acht Elemente hat. Also liegt z im Durchschnitt dieser acht Mengen.

Da zu zwei verschiedenen Elementen z, x aus M auch zwei verschiedene Mengen I_z, I_x gehören, ist x in mindestens einer der Mengen M_i mit $i \in I_z$ nicht enthalten. Die Schnittmenge der Mengen M_i mit $i \in I_z$ ist also $\{z\}$.

Bemerkungen

1. Offensichtlich gilt die Behauptung der Aufgabe für eine beliebige Menge M mit nicht mehr als 12870 Elementen.
2. Wenn M - wie in der Aufgabenstellung - weniger als 12870 Elemente enthält, kann man 8 der 16 (wie oben angegeben konstruierten) Teilmengen wählen, deren Durchschnitt leer ist.
3. Die Beweise zeigen, dass sich die Zahlen 10000, 16, 8 durch beliebige natürliche Zahlen m, s, a mit $\binom{s}{a} \geq m$ ersetzen lassen.

Aufgabe 3

Gegeben seien ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf der Seite AB mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{BC} = \overline{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$

(2) $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{PB}$

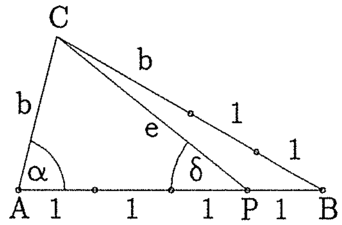
Man beweise: Der Winkel PAC ist doppelt so groß wie der Winkel CPA.

Bezeichnungen und andere Festlegungen

Zur Bezeichnungsvereinfachung wähle man $\frac{1}{4}\,\overline{AB}$ als Längeneinheit. Mit den Standardbezeichnungen des Dreiecks ist dann $a = b + 2$ und $c = 4$.

Die Größe des Winkels CPA sei mit δ bezeichnet, weiterhin sei e die Länge der Strecke PC.

Die Behauptung lautet dann: $\alpha = 2 \cdot \delta$.



Erster Beweis

Es werden drei Fälle unterschieden, je nachdem ob der Innenwinkel an der Ecke A ein rechter, ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist.

(1) $\alpha = 90°$

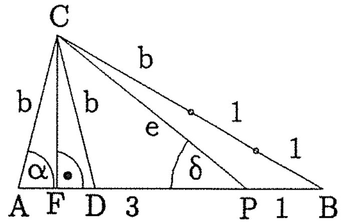
Durch Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck ABC erhält man $b^2 + 4^2 = (b+2)^2$, also $16 = 4b + 4$ und mithin $b = 3$.

Das rechtwinklige Dreieck APB ist daher gleichschenklig, also ist $\delta = 45°$. Für diesen Fall ist also die Behauptung $\alpha = 2 \cdot \delta$ erfüllt.

(2) $\alpha < 90°$

Der Fußpunkt des Lotes von C auf AB sei F; mit D werde der Bildpunkt von A bei Spiegelung an F bezeichnet. Anwendung des Satzes von Pythagoras auf die Dreiecke AFC und BCF und anschließendes Auflösen nach $\overline{CF}^2$ und Gleichsetzen liefert:

$$b^2 - \overline{AF}^2 = (b+2)^2 - (4 - \overline{AF})^2.$$



Durch Auflösen der Klammern und Zusammenfassen erhält man

$$16 - 8\overline{AF} = 4b + 4 \quad \text{und daher} \quad 2\overline{AF} = 3 - b.$$

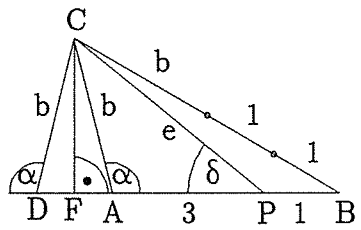
Da $\overline{AP} = 3 > 3 - b = 2\overline{AF} = \overline{AD}$, liegt D zwischen A und P.

Somit ist $\overline{DP} = \overline{AP} - 2\overline{AF} = 3 - (3 - b) = b$.

Also ist das Dreieck DPC gleichschenklig. Als Weite des Außenwinkels ist α gleich der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel. Somit gilt $\alpha = 2 \cdot \delta$.

(3) $\underline{\alpha > 90^\circ}$ (Die Skizze rechts beschreibt nur, sie ist nicht maßstäblich!)

Der Fußpunkt des Lotes von C auf die Verlängerung von AB sei F; mit D werde der Bildpunkt von A bei Spiegelung an F bezeichnet.



Anwendung des Satzes von Pythagoras auf die Dreiecke DFC und BCF sowie Auflösen nach $\overline{CF}^2$ und Gleichsetzen liefert:

$$b^2 - \overline{DF}^2 = (b+2)^2 - (4 + \overline{AF})^2.$$

Durch Auflösen und Zusammenfassen erhält man wegen $\overline{AF} = \overline{DF}$

$$16 + 8\overline{AF} = 4b + 4 \quad \text{und daher} \quad 2\overline{AF} = b - 3.$$

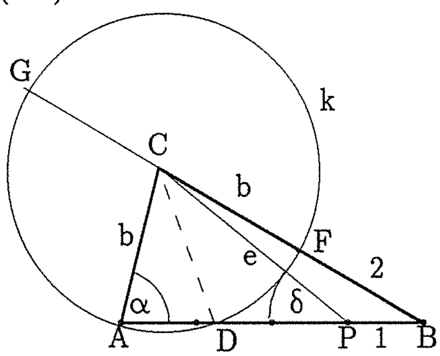
Somit ist $\overline{DP} = \overline{AP} + 2\overline{AF} = 3 + (b-3) = b$.

Also ist das Dreieck DPC gleichschenklig. Da α (wie beim zweiten Fall) die Weite des Außenwinkels ist, folgt, dass α gleich der Summe der Weiten der nicht anliegenden Innenwinkel ist.

Somit gilt $\alpha = 2 \cdot \delta$.

<u>Zweiter Beweis</u>

Der Kreis k um C durch A schneidet die Gerade (AB) in A und einem weiteren (im Falle $\alpha = 90^\circ$ mit A zusammen fallenden) Punkt, der D genannt wird. Das Dreieck ADC ist gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{DC} = b$. Der Schnittpunkt von k mit BC sei F, der zweite Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden (BC) sei G.



Nach dem Sekanten-Satz gilt:

$$\overline{BD} \cdot \overline{BA} = \overline{BF} \cdot \overline{BG}, \text{ also } 4 \cdot \overline{BD} = 2 \cdot (2 + 2b).$$

Somit ist $\overline{BD} = 1 + b$, mithin $\overline{DP} = \overline{BD} - 1 = b$.

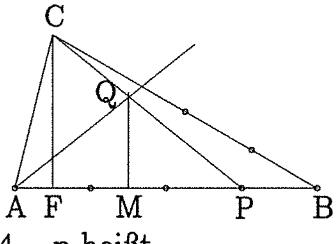
Also ist $\overline{AC} = \overline{DC} = \overline{DP} = b$.

Im Kreis um D durch P gehört mithin zum Peripheriewinkel δ der Mittelpunktswinkel α; dies gilt für jeden der drei Fälle $\alpha < 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha > 90^\circ$.

Nach dem Umfangswinkelsatz folgt daher $\alpha = 2 \cdot \delta$, was zu beweisen war.

<u>Dritter Beweis</u>

Es sei M der Mittelpunkt von AP, mit Q sei der Schnittpunkt von PC mit der Mittelsenkrechten von AP bezeichnet. Ferner sei F der Fußpunkt des von C auf AB gefällten Lotes.



Mit $p := \overline{AF}$ erhält man durch Anwendung des Satzes von Pythagoras auf die Dreiecke AFC und CFB:

$$b^2 - p^2 = (b+2)^2 - (4 \pm p)^2,$$

wobei es in der letzten Klammer $4 + p$ für $\alpha > 90^\circ$, sonst $4 - p$ heißt.

Also folgt $4b + 4 = 16 + 8p$ bzw. $4b + 4 = 16 - 8p$; somit ist $p = \frac{1}{2} \cdot |\, 3 - b \,|$.

Nach dem ersten Strahlensatz ist dann

$$\overline{CQ} : \overline{QP} = \overline{FM} : \overline{MP} = \left(\tfrac{3}{2} \pm\ p\right) : \tfrac{3}{2} = \tfrac{b}{2} : \tfrac{3}{2} = \tfrac{b}{3}.$$

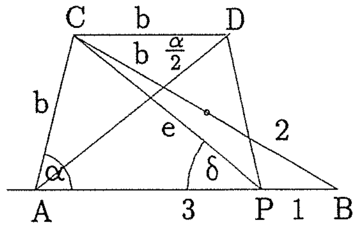
Im Dreieck APC teilt also die Gerade durch A und Q die Seite PC im Verhältnis der anliegenden Seiten AC und AP und halbiert daher den Winkel PAC. Da andererseits Q auf der Mittelsenkrechten von AP liegt und das Dreieck APQ somit gleichschenklig ist, folgt hieraus die behauptete Winkelbeziehung.

Vierter Beweis (trigonometrisch)

Durch Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck ABC erhält man wegen $\overline{BC} = b + 2$:

$$(b+2)^2 = b^2 + 16 - 8b\cdot\cos(\alpha), \text{ also } 4b = 12 - 8b\cdot\cos(\alpha)$$

und somit $\quad 2b\cdot\cos(\alpha) = 3 - b \; (*)$.



Man ergänze nun die gegebene Figur zu einem Trapez APDC mit $\overline{CD} = b$. Dann halbiert die Diagonale AD den Winkel BAC, da das Dreieck ADC gleichschenklig ist und die Winkel BAD und CDA als Wechselwinkel an Parallelen gleiche Weite haben.

Nach dem Kosinussatz für die Dreiecke ADC und APC ergibt sich unter Verwendung von (*):

$$\overline{AD}^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cdot\cos(180° - \alpha) = 2b^2 + 2b^2\cdot\cos(\alpha) = 2b^2 + b\cdot(3-b) = b^2 + 3b,$$

$$\overline{PC}^2 = b^2 + 9 - 6b\cdot\cos(\alpha) = b^2 + 9 - 3\cdot(3-b) = b^2 + 3b\,.$$

Wegen $\overline{AD} = \overline{PC}$ ist das Trapez APDC symmetrisch; insbesondere sind die Winkel CPA und PAD kongruent, also ist $\delta = \frac{1}{2}\alpha$, woraus die Behauptung folgt.

Fünfter Beweis (auch trigonometrisch)

Mit dem Kosinussatz für die Dreiecke APC und PBC erhält man:

$$\frac{e^2 + 9 - b^2}{6e} = \cos(\delta) = -\cos(180° - \delta) = -\frac{e^2 + 1 - (b+2)^2}{2e} = \frac{3(b+2)^2 - 3e^2 - 3}{6e}.$$

Gleichsetzen des ersten und des letzten Terms liefert nach Multiplikation mit 6e

$e^2 + 9 - b^2 = 3\cdot(b+2)^2 - 3e^2 - 3$, also nach Ordnen und Zusammenfassen

$4e^2 = 4b^2 + 12b$, mithin $\qquad e^2 = b^2 + 3b \;\; (*)$.

Mit (*) erhält man aus $\cos(\delta) = \frac{e^2 + 9 - b^2}{6e}$ die Gleichung $\cos(\delta) = \frac{b+3}{2e}$.

Wegen $\delta < 180°$ und $\cos(\delta) > 0$ folgt außerdem $\delta < 90°$.

Damit ist nach Additionstheorem :

$$\cos(2\delta) = \cos^2(\delta) - \sin^2(\delta) = 2\cos^2(\delta) - 1 = 2\cdot\left(\frac{b+3}{2e}\right)^2 - 1 = \frac{b^2 + 6b + 9 - 2e^2}{2e^2}.$$

Da nach (*) die Gleichung $2e^2 = 2b^2 + 6b$ gilt, folgt weiter

$$\cos(2\delta) = \frac{-b^2 + 9}{2(b^2 + 3b)} = \frac{(3-b)\cdot(3+b)}{2b\cdot(b+3)} = \frac{3-b}{2b}.$$

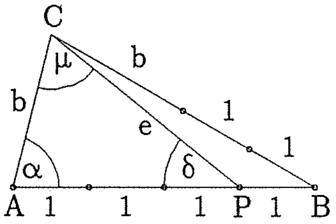
Die nachfolgende Umformung benutzt wieder (*) und verwendet den Kosinussatz für das Dreieck APC:

$$\cos(2\delta) = \frac{3-b}{2b} = \frac{9-3b}{6b} = \frac{b^2 + 9 - b^2 - 3b}{6b} = \frac{b^2 + 9 - e^2}{6b} = \cos(\alpha).$$

Aus $\cos(2\delta) = \cos(\alpha)$ folgt, wie zu beweisen war, $\alpha = 2\delta$, da über dem offenen Intervall von 0° bis 180° die Kosinusfunktion umkehrbar ist.

Sechster Beweis (auch trigonometrisch)

Die Größe von Winkel ACP sei mit μ bezeichnet. Der Sinussatz für das Dreieck APC liefert $\sin(\alpha) : \sin(\delta) = e : b$ (1).



Mit dem Kosinussatz für die Dreiecke APC und PBC (für das zweitgenannte wegen $\cos(180°-\delta) = -\cos(\delta)$) erhält man

$$b^2 = 9 + e^2 - 6e\cdot\cos(\delta) \qquad (2),$$

bzw. $$(b+2)^2 = 1 + e^2 + 2e\cdot\cos(\delta) \qquad (3).$$

Aus (2) und (3) folgt

$$9 + e^2 - b^2 = 3\cdot(b+2)^2 - 3 - 3e^2, \text{ also } \qquad 12 + 4e^2 = 4b^2 + 12b + 12$$

und mithin $e^2 = b^2 + 3b$ (4).

Durch Einsetzen von e^2 ergibt sich aus (2) und (4): $0 = 9 + 3b - 6e\cdot\cos(\delta)$.

Mit (4) und (1) ist dann $\cos(\delta) = \frac{3+b}{2e} = \frac{(3+b)\cdot b}{2e\cdot b} = \frac{e}{2b} = \frac{\sin(\alpha)}{2\cdot\sin(\delta)}$.

Somit gilt $\sin(\alpha) = 2\cdot\sin(\delta)\cdot\cos(\delta)$, also $\sin(\alpha) = \sin(2\delta)$ (5).

Aus (5) folgt $\alpha = 2\delta$ oder $\alpha = 180° - 2\delta$.

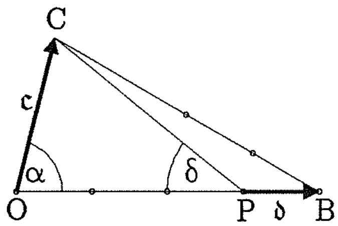
Wegen $\alpha + \delta + \mu = 180°$ ist im zweitgenannten Fall $180° - 2\delta + \delta + \mu = 180°$, also $\delta = \mu$.

Dann ist aber das Dreieck APC gleichschenklig und folglich $b = 3$, $c = 4$, $a = 5$.

Dann ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras $\alpha = 90°$; hieraus folgt $\delta = \mu = 45°$, so dass aus (5) in jedem Fall $\alpha = 2\delta$ folgt.

Siebenter Beweis (vektoriell)

Der Ursprung sei in A gelegt; die Ortsvektoren von B und C seien mit $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{c}$ bezeichnet; ferner sei $\mathfrak{d} := \frac{1}{4}\mathfrak{b}$.



Nach den Voraussetzungen ist $\|\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\| = \overline{BC} = \|\mathfrak{c}\| + 2\|\mathfrak{d}\|$.

Daraus folgt $\|\mathfrak{c} - 4\mathfrak{d}\|^2 = (\|\mathfrak{c}\| + 2\cdot\|\mathfrak{d}\|)^2$,

$$\|\mathfrak{c}\|^2 - 8\mathfrak{c}*\mathfrak{d} + 16\cdot\|\mathfrak{d}\|^2 = \|\mathfrak{c}\|^2 + 4\cdot\|\mathfrak{c}\|\cdot\|\mathfrak{d}\| + 4\cdot\|\mathfrak{d}\|^2,$$

$$-8\mathfrak{c}*\mathfrak{d} = 4\cdot\|\mathfrak{c}\|\cdot\|\mathfrak{d}\| - 12\cdot\|\mathfrak{d}\|^2,$$

$$\|\mathfrak{c}\|\cdot\|\mathfrak{d}\| = 3\cdot\|\mathfrak{d}\|^2 - 2\mathfrak{c}*\mathfrak{d} \qquad (1).$$

Folglich ist

$$\|\mathfrak{c}\|^2\cdot\|\mathfrak{d}\|^2 = 9\cdot\|\mathfrak{d}\|^4 - 12(\mathfrak{c}*\mathfrak{d})\|\mathfrak{d}\|^2 + 4(\mathfrak{c}*\mathfrak{d})^2 \quad \text{und daher}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{c} - 3\mathfrak{d}\|^2\cdot\|\mathfrak{d}\|^2 &= \|\mathfrak{c}\|^2\cdot\|\mathfrak{d}\|^2 - 6(\mathfrak{c}*\mathfrak{d})\|\mathfrak{d}\|^2 + 9\cdot\|\mathfrak{d}\|^4,\\
&= 9\cdot\|\mathfrak{d}\|^4 - 12(\mathfrak{c}*\mathfrak{d})\|\mathfrak{d}\|^2 + 4(\mathfrak{c}*\mathfrak{d})^2 - 6(\mathfrak{c}*\mathfrak{d})\|\mathfrak{d}\|^2 + 9\cdot\|\mathfrak{d}\|^4,\\
&= 18\cdot\|\mathfrak{d}\|^4 - 18(\mathfrak{c}*\mathfrak{d})\|\mathfrak{d}\|^2 + 4(\mathfrak{c}*\mathfrak{d})^2,\\
\|\mathfrak{c} - 3\mathfrak{d}\|^2\cdot\|\mathfrak{d}\|^2 &= 2\cdot[(3\mathfrak{d} - \mathfrak{c})*\mathfrak{d}]\cdot[(3\mathfrak{d} - 2\mathfrak{c})*\mathfrak{d}] \qquad (2).
\end{aligned}$$

Die Behauptung $\alpha = 2\delta$ ist wegen $\cos(2\delta) = 2\cdot\cos^2(\delta) - 1$ äquivalent zur Gleichung $\cos(\alpha) + 1 = 2\cdot\cos^2(\delta)$.

Aus $\cos(\alpha) = \frac{\mathfrak{c}*\mathfrak{d}}{\|\mathfrak{c}\|\cdot\|\mathfrak{d}\|}$ ergibt sich aufgrund von (1):

$$\cos(\alpha) + 1 = \frac{3\cdot\|\mathfrak{d}\|^2 - \mathfrak{c}*\mathfrak{d}}{3\cdot\|\mathfrak{d}\|^2 - 2\mathfrak{c}*\mathfrak{d}} = \frac{(3\mathfrak{d} - \mathfrak{c})*\mathfrak{d}}{(3\mathfrak{d} - 2\mathfrak{c})*\mathfrak{d}} \qquad (3).$$

Entsprechend ist

$$2\cos^2(\delta) = 2\cdot\left(\frac{(\mathfrak{c} - 3\mathfrak{d})*(-\mathfrak{d})}{\|\mathfrak{c} - 3\mathfrak{d}\|\cdot\|-\mathfrak{d}\|}\right)^2 = 2\cdot\frac{((\mathfrak{c} - 3\mathfrak{d})*(\mathfrak{d}))^2}{\|\mathfrak{c} - 3\mathfrak{d}\|^2\cdot\|\mathfrak{d}\|^2} \qquad (4).$$

Nach (2) sind die rechten Seiten von (3) und (4) gleich, also gilt

$$\cos(\alpha) = \cos(2\delta) \qquad (5).$$

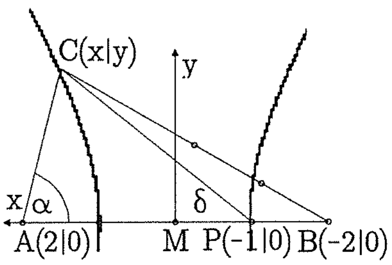
Aus (5) folgt $\alpha = 2\delta$ oder $\alpha = 360° - 2\delta$.

Der zweite Fall tritt nie ein, denn aus $\alpha = 360° - 2\delta$ folgt $\alpha + \delta = 360° - \delta$. Wegen $\alpha + \delta < 180°$ ergibt sich hieraus $\delta > 180°$, was nicht sein kann.

Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Achter Beweis (analytisch)

Die Hyperbel mit der reellen Halbachse 1 und der imaginären Halbachse $\sqrt{3}$ hat in einem passenden kartesischen Koordinatensystem die Gleichung $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$, also $3x^2 - y^2 = 3$. Wegen $\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ sind $A = (2 \mid 0)$ und $B = (-2 \mid 0)$ die Brennpunkte dieser Hyperbel. Der Hyperbel-Ast in der Halbebene mit positiven x-Werten besteht aus allen Punkten X, welche die Gleichung $\overline{BX} - \overline{AX} = 2$ erfüllen; insbesondere liegt somit C auf der Hyperbel.



Für die Koordinaten x, y von C gilt also

$$y^2 = 3\cdot(x^2 - 1), \text{ außerdem } x > 1,\ y > 0.$$

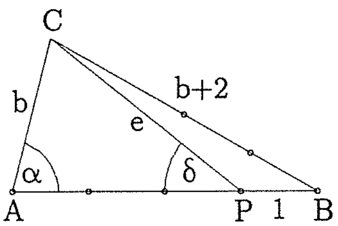
Im Spezialfall $x = 2$ folgt $y = 3$; das Dreieck APC ist dann rechtwinklig und gleichschenklig; in diesem Sonderfall ist die Behauptung $\alpha = 2\delta$ also richtig.

Für $x \neq 2$ ist $\tan(\alpha) = \frac{y}{2-x}$, $\tan(\delta) = \frac{y}{1+x}$; unter Verwendung eines Additionstheorems der Tangensfunktion kann man folgendermaßen umformen:

$$\tan(2\delta) = \frac{2\cdot\tan(\delta)}{1-\tan^2(\delta)} = \frac{2\cdot\frac{y}{1+x}}{1-\frac{y^2}{(1+x)^2}} = \frac{2\cdot\frac{y}{1+x}}{1-\frac{3\cdot(x^2-1)}{(1+x)^2}} = \frac{2y}{1+x-3(x-1)} = \frac{2y}{4-2x} = \frac{y}{2-x}$$

und somit $\tan(2\delta) = \tan(\alpha)$, also $\alpha = 2\delta$ oder $\alpha + 180° = 2\delta$.

Im zweiten Fall wäre δ größer als 90°. Aber nach der Dreiecksungleichung für das Dreieck ABC gilt $e + 1 > b + 2$ und daher $e > b$.



Da von den beiden Seiten AC und PC im Dreieck APC jeweils der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, muss daher $\alpha > \delta$ gelten, insbesondere ist daher $\delta < 90°$.

Somit gilt - wie zu zeigen war - stets $\alpha = 2\delta$.

Aufgabe 4

Im Inneren eines konvexen Polyeders P mit dem Rauminhalt 2^n seien $3\cdot(2^n - 1)$ Punkte gewählt ($n \in \mathbb{N}$).

Man beweise, dass P ein konvexes Polyeder mit dem Rauminhalt 1 enthält, in dessen Innerem keiner der gewählten Punkte liegt.

Vorbemerkungen

1. Geringfügig allgemeiner als in der Aufgabenstellung wird in den nachfolgenden Beweisen die Zahl $3\cdot(2^n - 1)$ nicht als genaue Anzahl der Punkte, sondern nur als obere Schranke der Anzahl vorausgesetzt.
2. Der Sonderfall, dass (für $n \geq 1$) alle gewählten Punkte in einer Ebene (oder gar

auf einer Geraden) liegen, wird in den nachfolgenden Beweisen nicht eigens untersucht, da in diesem Fall die Behauptung offensichtlich erfüllt ist: Eine Ebene $\mathfrak{E}$, in der alle gewählten Punkte liegen, zerschneidet das Polyeder in zwei konvexe Teilpolyeder, die beide keine der gewählten Punkte im Inneren haben und von denen mindestens eines ein Volumen $\geq \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(2^n-1) \geq \frac{1}{2}\cdot 3 = 1{,}5$ hat. Dieses enthält ein Polyeder mit der gewünschten Eigenschaft.

3. Aus der Definition der Konvexität folgt unmittelbar, dass der Schnitt zweier konvexer Körper wieder konvex ist (auch die leere Menge ist eine konvexe Teilmenge des Raumes); insbesondere zerlegt also jede Ebene einen konvexen Körper in zwei konvexe Körper, da die beiden durch die Ebene bestimmten Halbräume konvex sind.

<u>Erster Beweis (durch vollständige Induktion)</u>

Für den Beweis wird der folgende Hilfssatz (H1) bereitgestellt:

Ist k eine positive ganze Zahl und M eine Menge von höchstens 2k+1 Punkten des (dreidimensionalen) Raums, so gibt es eine Ebene $\mathfrak{E}$, für die keiner der beiden zugehörigen Halbräume im Inneren mehr als $k-1$ Punkte aus M enthält.

Zum <u>Beweis</u> wähle man eine feste Gerade g durch zwei Punkte von M, lege eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$ so durch g, dass $\mathfrak{E}$ keinen Punkt von M außerhalb von g enthält, und zeichne eine der beiden Drehrichtungen bei Rotation von $\mathfrak{E}$ um g als positiv aus.

Nachfolgend werden diejenigen Ebenen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_{2m}$ betrachtet, die durch g verlaufen und mindestens einen nicht auf g liegenden der ausgezeichneten Punkte enthalten ($1 \leq m \leq 2k-1$). Dabei ist die Reihenfolge der Indizierung so gewählt, dass $\mathfrak{E}$ bei Drehung um insgesamt 360° nacheinander die Lagen von $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_{2m}$ annimmt. Die beiden Seiten der Ebene $\mathfrak{E}$ stelle man sich als rot bzw. blau gefärbt vor; dementsprechend werde vom roten bzw. blauen Halbraum der Ebene gesprochen. Für $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$ wird für jede Ebene $\mathfrak{E}_i$ die Menge der gewählten Punkte in drei Mengen aufgeteilt, deren Elemente im Inneren des roten Halbraums bzw. im Inneren des blauen Halbraums bzw. in $\mathfrak{E}_i$ liegen; die zugehörigen Anzahlen der Punkte seien r(i), b(i) und e(i).

Für jeden Index i gilt dann : $e(i) \geq 3$, $r(i) + b(i) \leq 2k-2$.

Daher gilt $r(1) \leq k-1$ oder $b(1) \leq k-1$, z. B. sei oBdA $b(1) \leq k-1$ (sonst vertausche man bei der obigen Farbverteilung rot und blau).

Wenn dann auch $r(1) \leq k-1$ gilt, ist man fertig.

Es sei daher $r(1) \geq k$ und $b(1) \leq k-1$. Denn folgt (Drehung um 180°) wegen $b(m+1) = r(1) \geq k$, dass es einen Index i geben muss mit $b(i) \leq k-1$ und $b(i+1) \geq k$.

Der Zuwachs kommt aber nur von e(i), so dass $b(i) + e(i) \geq k+2$ gelten muss, woraus sofort $r(i) \leq k-1$ folgt.

Zusammen ist also $b(i) \leq k-1$ und $r(i) \leq k-1$; das war zu zeigen.

Für $n = 0$ ist die Aussage der Aufgabe trivialerweise erfüllt, da das Polyeder P in diesem Fall das Volumen $2^0 = 1$ hat und in seinem Inneren $3\cdot(2^0-1) = 0$ Punkte, also keinen gewählten Punkt enthält.

Zum Schluss von n auf n+1 sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt; für dieses n sei die Aussage der Aufgabe richtig. Man betrachte ein konvexes Polyeders P' mit dem Rauminhalt 2^{n+1}, in dessen Innerem $3\cdot(2^{n+1} - 1)$ (oder weniger) Punkte gewählt seien. Es gibt dann eine Ebene $\mathfrak{E}$, deren beide Halbräume je höchstens $m = 3\cdot(2^n - 1)$ Punkte enthalten, wobei m nach (H1) folgendermaßen zu bestimmen ist:

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{1}{2}\big(3\cdot(2^{n+1} - 1) - 1\big) - 1 = \tfrac{1}{2}\big(3\cdot 2\cdot 2^n - 3 - 1\big) - 1 \\ &= 3\cdot 2^n - 2 - 1 = 3\cdot 2^n - 3 = 3\cdot(2^n - 1). \end{aligned}$$

Die Ebene $\mathfrak{E}$ zerlegt P' in zwei Polyeder, die wegen des Gesamtvolumens 2^{n+1} nicht beide ein Volumen von weniger als 2^n haben können. Daher enthält P' ein Polyeder P" mit einem Volumen von mindestens 2^n, in dessen Innerem höchstens $3\cdot(2^n - 1)$ der gewählten Punkte liegen. Ein beliebiges in ihm enthaltenes Polyeder P vom Inhalt 2^n enthält also höchstens $3\cdot(2^n - 1)$ gewählte Punkte. Nach Induktionsannahme ist hierin ein Polyeder mit Inhalt 1 enthalten, in dessen Innerem keiner der gewählten Punkte liegt.

Zweiter Beweis (auch mit vollständiger Induktion)

Für den Beweis wird der folgende Hilfssatz (H2) bereitgestellt:

Ist P ein konvexes Polyeder und M eine Menge von Punkten des Raumes $(\#M \geq 2)$, so gibt es eine Ebene $\mathfrak{E}$, die mindestens zwei Punkte von M enthält und P in zwei konvexe Teilpolyeder gleichen Volumens zerlegt.

Zum Beweis wähle man eine feste Gerade g durch zwei Punkte von M und lege eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}_0$ durch g. Weiterhin sei h_0 eine Gerade in $\mathfrak{E}_0$, die orthogonal zu g verläuft. Bei Drehung um g geht h_0 in eine Gerade $h(\alpha)$ über; dabei ist $\alpha \in [0; 2\pi[$ die im Bogenmaß angegebene Weite des Winkels zwischen $h(\alpha)$ und h_0. Mit $\mathfrak{E}(\alpha)$ sei die Ebene durch g und $h(\alpha)$ bezeichnet. Schließlich sei $V(\alpha)$ die Differenz der Volumina der Schnittkörper von P mit den beiden Halbebenen von $\mathfrak{E}(\alpha)$ in einer festgelegten Reihenfolge. Die Funktion V ist stetig über $[0; \pi]$; wegen $V(0) = -V(\pi)$ gibt es nach dem Nullstellensatz für stetige Funktionen einen Winkel α, für den $V(\alpha) = 0$ gilt. Dies bedeutet aber gerade, dass die Ebene $\mathfrak{E}(\alpha)$ das Polyeder P in zwei (konvexe) Teilpolyeder gleichen Volumens zerlegt.

Für $n = 0$ ist die Aussage der Aufgabe trivialerweise erfüllt, da das Polyeder P in diesem Fall das Volumen $2^0 = 1$ hat und in seinem Inneren $3\cdot(2^0 - 1) = 0$ Punkte, also keinen gewählten Punkt enthält.

Zum Schluss von n auf n+1 sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt; für dieses n sei die Aussage der Aufgabe richtig. Man betrachte ein konvexes Polyeder P' mit dem Rauminhalt 2^{n+1}, in dessen Innerem $3\cdot(2^{n+1} - 1)$ oder weniger Punkte gewählt seien.

Es sei dann $\mathfrak{E}$ eine Ebene, die gemäß (H2) mindestens zwei der gewählten Punkte enthält und P' in zwei Teilpolyeder P und Q zerlegt, die beide das Volumen 2^n haben. Für die Anzahl m der gewählten Punkte im Inneren mindestens eines der Polyeder P, Q muss gelten:

$$m \leq \frac{3\cdot(2^{n+1} - 1) - 2}{2} = \frac{3\cdot(2^{n+1} - 2) + 1}{2} = 3\cdot(2^n - 1) + \frac{1}{2}\ .$$

Dieses Polyeder - es sei z.B. P - enthält also in seinem Inneren höchstens $3\cdot(2^n - 1)$ gewählte Punkte und hat das Volumen 2^n. Nach Induktionsannahme enthält es ein Vielflach des Volumens 1, in dessen Innerem keiner der gewählten Punkte liegt.

Dritter Beweis (auch mit vollständiger Induktion)

Es wird die folgende, etwas allgemeinere Aufgabe gelöst, aus der sich durch Einsetzen von $m := 2^n$ der verlangte Nachweis ergibt:

> Im Inneren eines konvexen Polyeders P_m mit einem Rauminhalt $\geq m$ seien $3\cdot(m-1)$ Punkte gewählt ($m \in \mathbb{N}^*$). Man beweise, dass P_m ein konvexes Polyeder mit dem Rauminhalt 1 enthält, in dessen Innerem keiner der gewählten Punkte liegt.

Für $\underline{m = 1}$ ist diese Aussage offensichtlich richtig; das gegebene Polyeder P_1 ist bereits das gesuchte.

Zum Schluss von m auf m+1 ($m \geq 1$) sei ein konvexes Polyeder P_{m+1} vom Rauminhalt $m+1$ mit $3\big((m+1)-1\big)$, also $3m$ gewählten Punkten in seinem Inneren vorgegeben. Man lege nun eine Ebene $\mathfrak{E}$ derart durch drei der gewählten Punkte, dass mindestens eines der Teilpolyeder, in welche P_{m+1} von $\mathfrak{E}$ zerschnitten wird, in seinem Inneren keinen der ausgewählten Punkte enthält. Die Existenz einer solchen Ebene ist anschaulich klar: Die konvexe Hülle der gewählten Punkte ist ein (ggf. ausgeartetes) konvexes Polyeder K; durch eine seiner Seitenflächen legt man die Ebene. Die durch das Zerschneiden von P_{m+1} entstehenden Teilpolyeder seien P_m' und P_m, wobei P_m' das Polyeder sei, in dessen Innerem nach Konstruktion keiner der gewählten Punkte liegt.

Wenn das Volumen von P_m' größer als 1 ist, ist man fertig, denn dann enthält P_m' - und damit auch P_{m+1} - ein Teilpolyeder vom Volumen 1, in dessen Innerem keiner der gewählten Punkte liegt.

Ist aber das Volumen von P_m' nicht größer als 1, dann beträgt das Volumen von P_m mindestens m, so dass die Existenz des gesuchten Teilpolyeders aus der Induktionsannahme folgt.