BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
53144 Bonn
email: bwmathematik@compuserve.com

Aufgaben und Lösungen 1998
1. Runde

Stand 30. Mai 98

Aufgabe 1

Ein Spielfeld hat die rechts dargestellte Form.

□ = □
□ + □ = □
□ + □ + □ = □
□ + □ + □ + □ = □
□ + □ + □ + □ + □ = □
□ + □ + □ + □ + □ + □ = □
□ + □ + □ + □ + □ + □ + □ = □

Zwei Spieler A und B tragen abwechselnd in eines der jeweils noch freien Kästchen eine ganze Zahl ein, wobei A beginnt. Bei jeder Eintragung können Kästchen und Zahl beliebig gewählt werden.

Man beweise: Der Spieler A kann durch geschicktes Spiel stets erreichen, dass nach der Eintragung in das letzte noch freie Kästchen alle entstandenen Gleichungen erfüllt sind.

Hinweis: Die Größe der Kästchen stellt keine Einschränkung für die Anzahl der Stellen bei der jeweils einzutragenden Zahl dar.

Erste Lösung

Die Anzahl der Kästchen in den sieben Gleichungen ist $2+3+4+5+6+7+8 = 35$, also ungerade. Da A und B abwechselnd ziehen, also pro Runde zwei Kästchen füllen, und A beginnt, ist die Anzahl der noch leeren Kästchen vor jedem Zug von A ungerade.

A ist nie gezwungen, in einer der Gleichungen das vorletzte freie Kästchen zu füllen. Denn dann gäbe es nur Gleichungen mit genau zwei leeren Kästchen und Gleichungen ohne freie Kästchen; die Anzahl der freien Kästchen beim Zug von A wäre also gerade.

Die Strategie von A besteht daher zunächst nur darin, in keiner Gleichung das vorletzte Kästchen zu füllen. Daher füllt B im Lauf des Spiels in jeder Gleichung das vorletzte Kästchen, woraufhin A jeweils in der entsprechenden Gleichung das letzte Kästchen so ausfüllt, dass die Gleichung stimmt. Dies ist stets möglich, da man in $\mathbb{Z}$ eine Gleichung der Form $a + b = c$ nach jedem der Platzhalter auflösen kann.

Zweite Lösung

Eine Reihe mit einer ungeraden Anzahl leerer Felder heiße *ungerade* Reihe. Die Anzahl ihrer leeren Felder sei mit u bezeichnet.
Man stellt zunächst folgendes fest:

(1) Zu Beginn existieren drei ungerade Reihen. Für keine dieser Reihen ist $u < 3$.

(2) Findet Spieler A eine Reihe mit $u = 1$ vor, so kann er wegen der Auflösbarkeit jeder Gleichung der Form $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} = a_n$ nach jeder der Variablen das leere Feld so ausfüllen, dass die entstehende Gleichung erfüllt ist.

(3) In einem Doppelschritt (Spieler A und B tragen nacheinander je eine Zahl ein) ändert sich die Anzahl der ungeraden Reihen um 0 oder 2. Außerdem kann in einer Reihe die Anzahl freier Felder höchstens um 2 abnehmen.

Spieler A spielt nun nach folgender Strategie: Er sucht unter den ungeraden Reihen eine Reihe, bei der u minimal ist. Ist $u = 1$ so trägt er die nach (2) existierende Lösungszahl ein, andernfalls eine beliebige Zahl in ein beliebiges Feld.

Es bleibt noch zu zeigen:

(4) Bei Anwendung dieser Strategie von A können niemals gleichzeitig zwei Reihen mit $u = 1$ auftreten. Dies folgt aus (1) und (3).

(5) Bei Anwendung dieser Strategie von A kann B niemals eine Reihe mit $u = 1$ vorfinden. Dies folgt unmittelbar aus (4).

(6) Bei Anwendung dieser Strategie findet Spieler A stets noch eine ungerade Reihe vor. Dies folgt aus (1) und (3).

Damit führt diese Strategie dazu, dass Spieler A in jeder Reihe das letzte freie Feld besetzt und so alle Gleichungen erfüllen kann.

Aufgabe 2

Man beweise, dass es eine unendliche Folge von Quadratzahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) Das arithmetische Mittel je zweier benachbarter Folgenglieder ist eine Quadratzahl.

(2) Je zwei benachbarte Folgenglieder sind teilerfremd.

(3) Die Folge wächst streng monoton.

Erste Lösung

Der Beweis erfolgt durch die Angabe einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit den geforderten Eigenschaften.

Hierzu definiert man die Folge (a_n) durch $a_n := (2n^2 - 1)^2$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dann ist zunächst offensichtlich, dass man eine unendliche Folge von Quadratzahlen erhält. Es wird gezeigt, dass diese die Eigenschaften (1), (2), (3) hat:

Zu (1):
$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= (2n^2 - 1)^2 + \left(2(n+1)^2 - 1\right)^2 \\ &= 4n^4 - 4n^2 + 1 + (2n^2 + 4n + 1)^2 \\ &= 4n^4 - 4n^2 + 1 + 4n^4 + 16n^3 + 20n^2 + 8n + 1 \\ &= 8n^4 + 16n^3 + 16n^2 + 8n + 2 \\ &= 2 \cdot (4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1) \\ &= 2 \cdot (2n^2 + 2n + 1)^2 \end{aligned}$$

Das arithmetische Mittel der aufeinanderfolgenden Glieder a_n und a_{n+1} ist also $(2n^2 + 2n + 1)^2$; dies ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl.

Zu (2): Der größte gemeinsame Teiler von a_n und a_{n+1} ist quadratisch; er sei mit t^2 bezeichnet. Dann ist t der größte gemeinsame Teiler von $2n^2 - 1$ und $2(n+1)^2 - 1$. Daher ist t auch ein Teiler der Differenz dieser Zahlen, also von $4n+2$. Da a_n ungerade ist, ist t mithin ein Teiler von $2n + 1$.

Andererseits muss t wegen
$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= 2 \cdot (2n^2 + 2n + 1)^2 \quad \text{(wie beim Nachweis zu (1) gezeigt)} \\ &= 2 \cdot \left((2n^2 - 1) + 2 \cdot (n + 1)\right)^2 \end{aligned}$$
ein Teiler von $n + 1$ sein; denn zunächst ergibt sich die Teilbarkeit von $\left((2n^2 - 1) + 2 \cdot (n + 1)\right)^2$ durch t^2, daraus folgt, dass t ein Teiler von $(2n^2 - 1) + 2 \cdot (n + 1)$ ist. Daher ist $2 \cdot (n + 1)$ - und weil t ungerade ist, somit auch $n+1$ - durch t teilbar.

Der einzige gemeinsame Teiler von $2n+1$ $\big(= 2(n+1) - 1\big)$ und $n+1$ ist aber 1; daher sind a_n und a_{n+1} teilerfremd.

Zu (3): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \big(2(n+1)^2 - 1\big)^2 - \big(2n^2 - 1\big)^2 \\ &= \big(2(n+1)^2 - 2n^2\big)\cdot\big(2(n+1)^2 + 2n^2 - 2\big) \\ &= 2\cdot(2n+1)\cdot(4n^2 + 4n) > 0 \end{aligned}$$
Die Folge (a_n) wächst also streng monoton.

Bemerkungen

1. Offensichtlich ist jede Folge mit einem allgemeinen Glied der Form $\big(2(n+k)^2 - 1\big)^2$ geeignet. Darüber hinaus gibt es aber auch Folgen im Sinne der Aufgabe, die nicht Teilfolgen der angegebenen Folge sind; Beispiele sind die Folgen (b_n) und (c_n) mit $b_n = \big((2n+1)^2 - 2\big)^2$ und $c_n = \big((4n+3)^2 - 8\big)^2$.
2. Um die Teilerfremdheit aufeinanderfolgender Glieder der Folge (a_n) zu zeigen, genügt wegen $a_n = b_n{}^2$ der Nachweis der Teilerfremdheit aufeinanderfolgender Glieder der Folge (w_n) mit $w_n = 2n^2 - 1$. Hierzu reicht die Angabe und Überprüfung der Gleichung
$$(n^2 + n - 1)\cdot(2n^2 - 1) + (n - n^2)\cdot\big(2(n+1)^2 - 1\big) = 1.$$

Zweite Lösung

Es wird wieder eine Folge mit den verlangten Eigenschaften angegeben.

Hierzu definiert man die Folge (a_n) rekursiv durch
$$a_1 := 1 \quad\text{und}\quad a_{n+1} := \big(\sqrt{a_n} + 4n + 2\big)^2.$$
Die ersten fünf Glieder dieser Folge sind $1, 7^2, 17^2, 31^2, 49^2$.

Da die so definierte Folge offensichtlich aus Quadratzahlen besteht und streng monoton wächst, sind nur noch die Eigenschaften (1) und (2) zu zeigen.

Zu (1):
$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= a_n + \big(\sqrt{a_n} + 4n + 2\big)^2 \\ &= a_n + a_n + 2\cdot\sqrt{a_n}\cdot(4n+2) + (4n+2)^2 \\ &= 2\cdot\big(a_n + 2\cdot\sqrt{a_n}\cdot(2n+1) + 2(2n+1)^2\big) \\ &= 2\cdot\big(a_n + 2\cdot\sqrt{a_n}\cdot(2n+2) + (2n+2)^2 - 2\cdot\sqrt{a_n} + 4n^2 - 2\big) \\ &= 2\cdot\big(\sqrt{a_n} + (2n+2)\big)^2 - 2\cdot\big(\sqrt{a_n} - (2n^2 - 1)\big) \end{aligned}$$
Hinreichend dafür, dass das arithmetische Mittel der benachbarten Folgenglieder a_n und a_{n+1} eine Quadratzahl ist, ist die Gültigkeit der Gleichung $\sqrt{a_n} - (2n^2 - 1) = 0$. Da die Gleichung $a_n = (2n^2 - 1)^2$ für $n = 1$ erfüllt ist, und wegen $\big(2(n+1)^2 - 1\big)^2 = \big(2n^2 - 1 + 4n + 2\big)^2$ auch die Rekursionsbedingung aus der Definition von (a_n) gilt, ist damit (1) gezeigt.

Zu (2): Der größte gemeinsame Teiler von a_n und a_{n+1} ist quadratisch; er sei mit t^2 bezeichnet. Dann ist t der größte gemeinsame Teiler von $\sqrt{a_{n+1}}$ und $\sqrt{a_n}$, also auch ein Teiler der Differenz $4n+2$. Da a_n ungerade ist, ist t auch ein Teiler von $2n+1$.

Da andererseits aufgrund der im Beweis von (1) gezeigten Gleichung gilt $\sqrt{a_n} = 2n^2 - 1 = n\cdot(2n+1) - (n+1)$, ist t auch ein Teiler von $n+1$.

Wegen $\text{ggT}(2n+1, n+1) = \text{ggT}(n, n+1) = 1$ sind somit zwei aufeinanderfolgende Glieder der Folge (a_n) stets teilerfremd.

Dritte Lösung (skizziert)
Man betrachte die Folge $a_0^2, a_1^2, a_2^2, \dots$, die durch die Rekursion

$$a_0 := 1, a_1 := 7, a_{n+2} = 4 \cdot \sqrt{\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{2}} + 3a_n \quad \text{gegeben ist.}$$

Zur Lösung der Aufgabe ist für $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen:

(1) a_n ist eine Quadratzahl, (2) a_n und a_{n+1} sind teilerfremd, (3) $a_n < a_{n+1}$.

Zu (3): Die strenge Monotonie ergibt sich unmittelbar aus $1 < 7$ und der rekursiven Definition, nach der $a_{n+2} > \sqrt{8}\, a_{n+1}$ gilt.

Zu (2): Auch die Teilerfremdheit aufeinanderfolgender Glieder ist aus der Rekursionsgleichung zu erkennen; durch Subtraktion von $3a_n$ und durch anschließendes Quadrieren und Isolieren von a_n^2 erhält man nämlich die Gleichung $a_n^2 = 8a_{n+1}^2 + 6a_n a_{n+2} + a_{n+2}^2$. Ein gemeinsamer Primteiler von a_{n+1} und a_{n+2} ist also auch ein Teiler von a_n, woraus durch vollständige Induktion wegen der Teilerfremdheit von a_0 und a_1 die Behauptung folgt.

Zu (1): Schließlich ergibt sich - wieder durch vollständige Induktion - die verlangte Eigenschaft des arithmetischen Mittels benachbarter Glieder, weil der Mittelwert von a_0^2 und a_1^2 eine Quadratzahl ist (25) und die folgende Umformung gilt:

$$\begin{aligned}
a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 &= \left(\sqrt{8a_n^2 + 8a_{n+1}^2} + 3a_n\right)^2 + a_{n+1}^2 \\
&= 8a_n^2 + 8a_{n+1}^2 + 6a_n \cdot \sqrt{8a_n^2 + 8a_{n+1}^2} + 9a_n^2 + a_{n+1}^2 \\
&= 17a_n^2 + 9a_{n+1}^2 + 6a_n \cdot \sqrt{8a_n^2 + 8a_{n+1}^2} \\
&= 9(a_n^2 + a_{n+1}^2) + 8a_n^2 + 6a_n \cdot \sqrt{8a_n^2 + 8a_{n+1}^2} \\
&= 18 \cdot \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{2} + 8a_n^2 + 24a_n \cdot \sqrt{\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{2}} \\
&= 2 \cdot \left(9 \cdot \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{2} + 4a_n^2 + 12a_n \cdot \sqrt{\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{2}}\right) \\
&= 2 \cdot \left(3 \cdot \sqrt{\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{2}} + 2a_n\right)^2
\end{aligned}$$

Der Beweis zeigt auch, dass man mit anderen geeigneten Startwerten (zum Beispiel (1, 41), (7, 17), (17, 31), (23, 47), (31, 49), ...) weitere - im allgemeinen neue - Folgen erzeugen kann.

Bemerkung:
Es lässt sich mit Mitteln der Schulmathematik (Betrachtung des dreidimensionalen Vektorraums der durch dreigliedrige lineare Rekursionen definierten Folgen und Ermittlung einer Basis aus geometrischen Folgen) herleiten, dass die in der dritten Lösung betrachtete Folge (a_n) das allgemeine Glied

$$a_n = \left(-\tfrac{2}{3}\right)\cdot(-1)^n + \tfrac{1}{6}\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{3})\cdot(2 - \sqrt{3})^n + \tfrac{1}{6}\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{3})\cdot(2 + \sqrt{3})^n \quad \text{hat.}$$

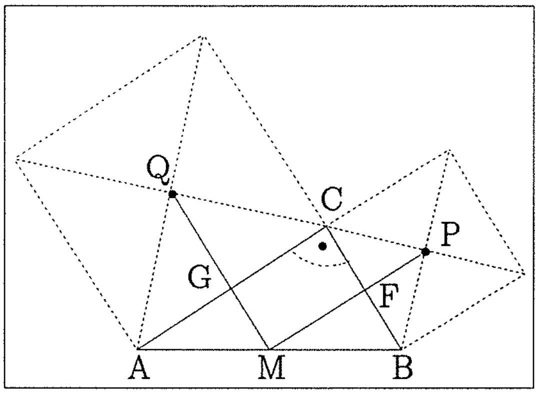
Aufgabe 3

Über den Seiten BC und CA eines beliebigen Dreiecks ABC werden nach außen Quadrate errichtet. Der Mittelpunkt der Seite AB sei M, die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien P und Q.

Man beweise, dass das Dreieck MPQ gleichschenklig-rechtwinklig ist.

Vorbemerkung für den Sonderfall $\gamma = 90°$

Bei einigen der nachfolgenden Beweise werden Dreiecke betrachtet, die im Falle eines rechten Winkels im Dreieck ABC an der Ecke C ausarten; die Winkel dieser Dreiecke haben dann die Größen 0°, 180°, 0°. Zwar sind sowohl die Kongruenzsätze als auch z. B. der Kosinussatz für derartige Dreiecke ebenfalls gültig, die Verwendung ist aber hier vermeidbar, da die Behauptung der Aufgabe in diesem Spezialfall besonders einfach zu zeigen ist: Hierzu seien mit F und G die Mittelpunkte der Seiten BC bzw. CA, also auch die Fußpunkte der Lote von P und Q auf BC bzw. CA bezeichnet. Dann hat das Viereck MFCG rechte Winkel an den Ecken F, C, G, ist also ein Rechteck. Damit ist der Winkel PMQ als rechter nachgewiesen.



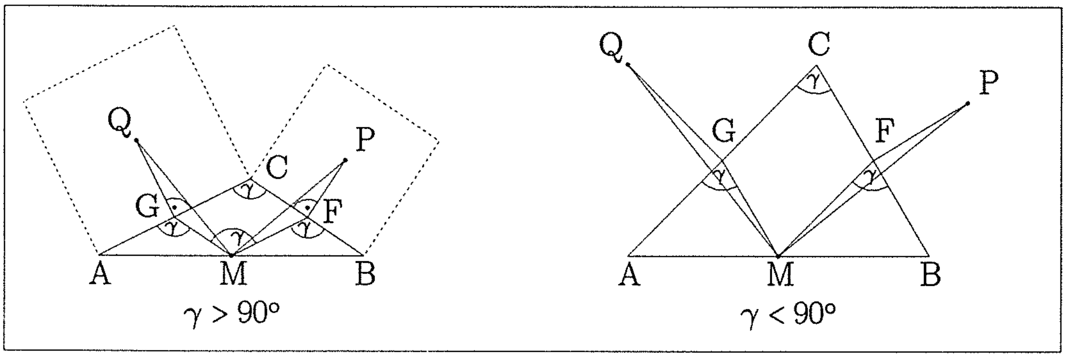
Weiterhin sind die Dreiecke CQG und PCF gleichschenklig. Daraus folgt die Gleichschenkligkeit des Dreiecks PQM:

$$\overline{QM} = \overline{QG} + \overline{GM} = \overline{GC} + \overline{CF} = \overline{MF} + \overline{FP} = \overline{MP}.$$

Da die betrachteten Strecken in den folgenden Beweisen bei Variation von γ innerhalb (z.B.) der Winkelgrößen 89° und 91° beschränkt bleiben, folgt die Aussage der Aufgabe für den Fall $\gamma = 90°$ auch aus Stetigkeitsgründen aus den Fällen $\gamma < 90°$ bzw. $\gamma > 90°$.

Erste Lösung

Wie üblich seien die drei Seitenlängen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ mit c bzw. a bzw. b bezeichnet; γ sei die Weite des Innenwinkels an der Ecke C im Dreieck ABC.



Weiterhin seien F und G die Mittelpunkte der Seiten BC bzw. CA, also auch die Fußpunkte der Lote von P und Q auf BC bzw. CA. Da FM und GM Mittelparallelen im Dreieck ABC sind, ist das Viereck MFCG ein Parallelogramm.

Somit haben die Winkel MFB, AGM, FMG alle die Weite γ.

Ferner ist $\overline{QG} = \frac{1}{2}b = \overline{GC} = \overline{MF}$ und $\overline{GM} = \overline{CF} = \frac{1}{2}a = \overline{FP}$.
Damit sind die Dreiecke QGM und MFP kongruent (nach Kongruenzsatz sws), denn die Winkel MGQ und PFM haben beide die Weite $90° + 180° - \gamma$ (im Fall $\gamma \geq 90°$), bzw. die Winkel QGM und MFP haben die Weite $90° + \gamma$ (Fall $\gamma < 90°$).
Daraus folgt $\overline{MP} = \overline{MQ}$.
Für den Ausartungsfall $\underline{\gamma = 90°}$ ist damit alles gezeigt.
Im Falle $\underline{\gamma > 90°}$ seien δ und ε die Größen der Winkel QMG bzw. FMP.
Für die Weite ω des Winkels PMQ gilt dann (wieder aufgrund der Dreieckskongruenz und nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck)

$$\omega = \gamma - \delta - \varepsilon = \gamma - \delta - \left(180° - \delta - (90° + 180° - \gamma)\right) = 90°.$$

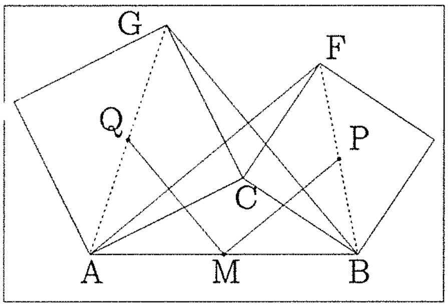
Im Falle $\underline{\gamma < 90°}$ seien δ und ε die Größen der Winkel GMQ bzw. PMF.
Für die Weite ω des Winkels PMQ gilt dann aufgrund der Dreieckskongruenz und nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck

$$\omega = \delta + \gamma + \varepsilon = \delta + \gamma + \left(180° - \delta - (90° + \gamma)\right) = 90°.$$

Damit ist der Satz für alle drei möglichen Fälle bewiesen.

Zweite Lösung

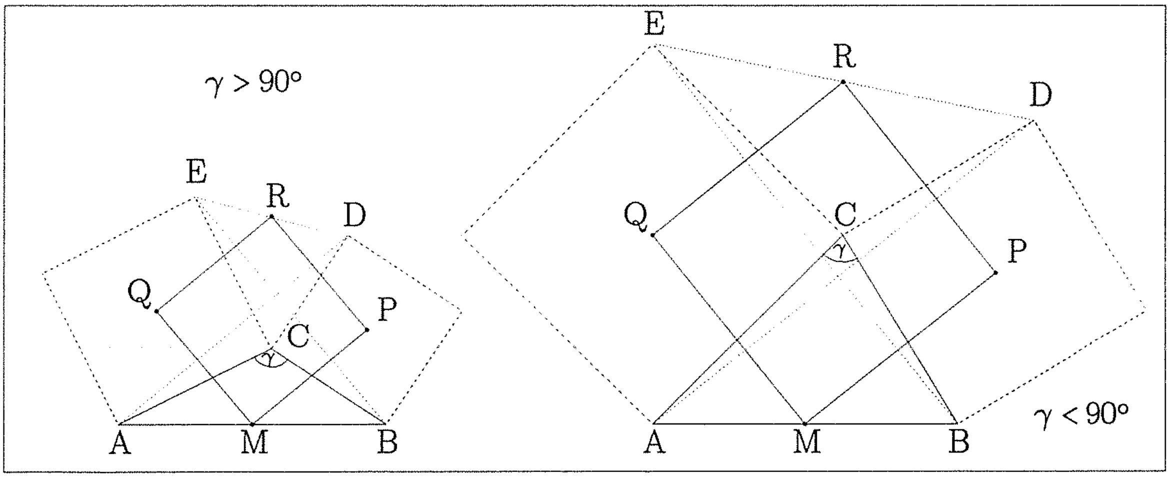
Die Gegenecken zu A und B in den aufgesetzten Quadraten seien gemäß der Skizze mit G bzw. F bezeichnet. Q sei der Mittelpunkt der Strecke AG, P sei der Mittelpunkt von BF. Eine 90°-Drehung mit dem Zentrum C führt B in F und G in A über. Die Strecken BG und AF gehen also durch eine 90°-Drehung auseinander hervor und sind somit orthogonal und gleich lang.



Da M der Mittelpunkt von AB, Q der Mittelpunkt von AG ist, muss MQ die zu BG gehörende Mittelparallele im Dreieck ABG sein; folglich ist $QM \parallel BG$ und $\overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{BG}$.
Auf analoge Weise ergibt sich $MP \parallel AF$ und $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AF}$.
Aus der Längengleichheit bzw. Orthogonalität von AF und BG folgt daher die Längengleichheit bzw. Orthogonalität von MQ und MP, so dass Dreieck QMP als gleichschenklig rechtwinklig mit Spitze M nachgewiesen ist.

Dritte Lösung

Wie üblich sei wieder γ die Weite des Innenwinkels an der Ecke C im Dreieck

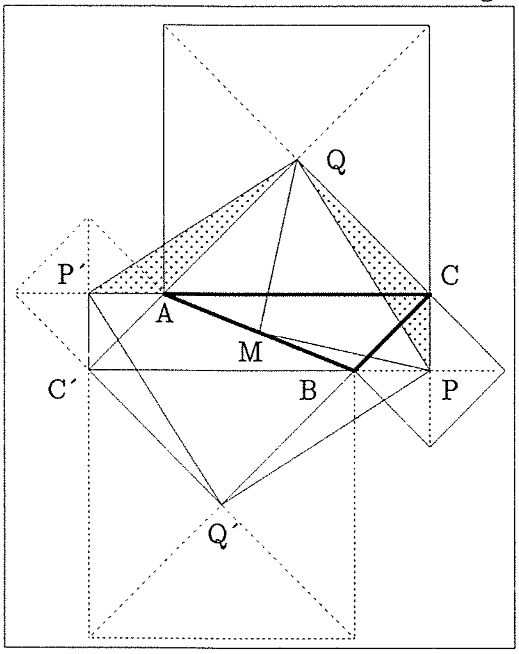


ABC. Die Gegenecken zu A und B in den aufgesetzten Quadraten seien gemäß der Skizze mit E bzw. D bezeichnet. R sei der Mittelpunkt der Strecke DE.
Die Dreiecke ACD und ECB stimmen dann wegen $\overline{AC} = \overline{EC}$ und $\overline{CD} = \overline{CB}$ in der Länge zweier Seiten überein. Da die Weite des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels in beiden Dreiecken

$360° - \gamma - 90°$ (im Falle $\gamma \geq 90°$) bzw. $\gamma + 90°$ (im Falle $\gamma < 90°$)

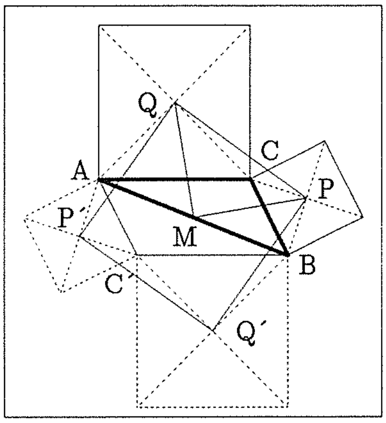
beträgt, sind die Dreiecke ACD und ECB gleichsinnig kongruent (sws).
Wegen $AC \perp EC$ stehen auch die Dreiecksseiten AD und EB senkrecht aufeinander. Das Viereck ABDE hat also orthogonale Diagonalen gleicher Länge. Sein Mittenviereck MPRQ muss mithin ein Quadrat sein.
Insbesondere sind mithin die Strecken MP und QM orthogonal und gleich lang.

<u>Vierte Lösung</u>
Zunächst wird der Fall $\gamma < 90°$ betrachtet. Durch Spiegeln an M wird die aus dem Dreieck ABC und den aufgesetzten Quadraten bestehende Figur zu der



links skizzierten Figur ergänzt. Dabei sind mit C´, P´, Q´ die Bilder von C, P und Q bezeichnet; das Viereck C´BCA ist dann ein Parallelogramm.
Wegen $\overline{PC} = \overline{P'A}$, $\overline{QA} = \overline{QC}$ und Größengleichheit der Winkel QAP´ und QCP sind die Dreiecke P´AQ und PCQ kongruent. Denn die Größe beider Winkel beträgt ja $\gamma + 90°$.
Somit ist QP = QP´; bei einer 90°- Drehung um Q geht daher P in P´ über. Also ist das Viereck Q´PQP´ ein Quadrat.
In diesem Quadrat sind MQ und MP jeweils halbe Diagonalen, also sind sie orthogonal und von gleicher Länge.

Im Spezialfall eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ist das betrachtete Parallelogramm C´BCA ein Rechteck; das Viereck Q´PQP´ ist - wie unmittelbar zu sehen ist - ein Quadrat, dessen Seiten die Länge $\frac{p}{2} + \frac{q}{2}$ haben, wobei p und q die Diagonalenlänge der aufgesetzten Quadrate mit Mittelpunkt P bzw. Q bezeichnen.

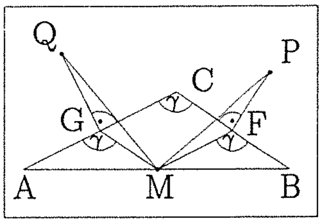


Für den verbleibenden Fall $\gamma > 90°$ ist der Beweis ähnlich. Die Dreiecke P´QA und PQC sind wegen $\overline{PC} = \overline{P'A}$, $\overline{QA} = \overline{QC}$ und Größengleichheit der Winkel P´AQ und PCQ kongruent. Die Weite der beiden Winkel beträgt in diesem Fall $270° - \gamma$ (nämlich $45° + (180° - \gamma) + 45°$ bzw. $360° - (45° + \gamma + 45°)$).
Wie im Falle $\gamma > 90°$ folgt damit weiter, dass das Viereck Q´PQP´ ein Quadrat ist.
Damit ergibt sich auch für den dritten Fall die Behauptung der Aufgabe.

Fünfte Lösung (mit Trigonometrie)

Bezeichnet man - wie in der ersten Lösung - die Mittelpunkte von BC und von CA mit F bzw. mit G, dann ist

$\overline{MF} = \overline{AG} = \frac{b}{2}$ und $\overline{MG} = \overline{BF} = \frac{a}{2}$.



In den Dreiecken MFP und MGQ hat der Innenwinkel an der Ecke F bzw. G die gleiche Größe δ, nämlich $270° - \gamma$, wenn γ größer als $90°$ ist, sonst $90° + \gamma$.

Nach dem Kosinussatz - angewendet auf die Dreiecke MFP und MGQ - erhält man:

$$\overline{MP}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{FP}^2 - 2 \cdot \overline{MF} \cdot \overline{FP} \cdot \cos(\delta), \text{ also } 4 \cdot \overline{MP}^2 = b^2 + a^2 - 2b \cdot a \cdot \cos(\delta).$$

Entsprechend ergibt sich für Dreieck MGQ: $4 \cdot \overline{MQ}^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\delta)$, so dass $\overline{MP} = \overline{MQ}$ folgt; das Dreieck PQM ist demnach gleichschenklig mit der Basis PQ. Zu zeigen ist also nur noch, dass der Winkel PMQ ein rechter ist.

Im Dreieck PCQ hat der Winkel an der Ecke C im Falle $\gamma < 90°$ die Größe $90° + \gamma$, andernfalls die Größe $270° - \gamma$.

Wiederum nach dem Kosinussatz - angewendet auf Dreieck PQC - ergibt sich wegen $\overline{PC} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$ und $\overline{QC} = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{2}$

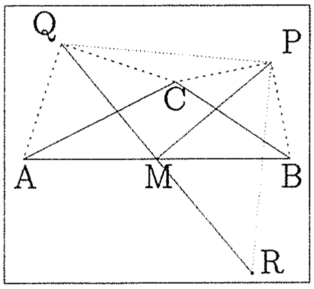
$$\begin{aligned} 4 \cdot \overline{PQ}^2 &= 2a^2 + 2b^2 - 4a \cdot b \cdot \cos(90° + \gamma) \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 4a \cdot b \cdot \cos(\delta) \\ &= 4 \cdot \overline{MP}^2 + 4 \cdot \overline{MQ}^2, \end{aligned}$$

so dass nach der Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes folgt, dass der Winkel PMQ ein rechter ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Sechste Lösung (mit Bewegungsgeometrie)

Bei dieser Lösung wird von folgendem Satz der ebenen Geometrie Gebrauch gemacht: Die durch Verketten von zwei Drehungen mit den Drehwinkeln δ_1 und δ_2 entstehende Abbildung ist (außer im Fall $\delta_1 + \delta_2 = 360°$) eine Drehung mit dem Drehwinkel $\delta_1 + \delta_2$. Das Nacheinanderausführen dieser Drehungen ergibt also im Falle $\delta_1 = \delta_2 = 90°$ eine Punktspiegelung. Mit Φ_X sei nachfolgend für einen Punkt X der Ebene die 90°-Drehung um X bezeichnet.

Man betrachte nun die Abbildung Φ, die entsteht, indem man zuerst Φ_Q (also die 90°-Drehung um Q) und anschließend Φ_P ausführt, also $\Phi := \Phi_P \circ \Phi_Q$. Bei dieser Abbildung führt die erste Drehung A in C, die zweite C in B über, also ist



$\Phi(A) = B$. Die Abbildung Φ ist somit die Spiegelung am Mittelpunkt M von AB.

Der Punkt Q bleibt bei der Drehung Φ_Q fest und geht bei der Drehung Φ_P in einen Punkt R über, für den das Dreieck QRP gleichschenklig -rechtwinklig ist.

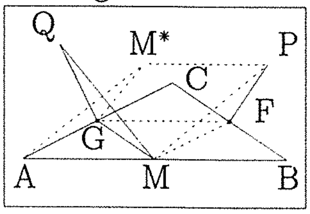
Da andererseits $R = \Phi(Q)$ durch Spiegelung von Q an M entsteht, ist PM die Symmetrieachse des Dreiecks QRP. Daher ist M Höhenfußpunkt im Dreieck QRP.

Insbesondere ist also, wie zu zeigen war, das Dreieck QMP gleichschenklig-rechtwinklig.

Siebente Lösung

Mit F und G seien die Mittelpunkte von BC bzw. CA bezeichnet.

Weiterhin sei Φ die Drehung um 90° mit dem Zentrum G; M^* sei der Punkt, in den M durch diese Drehung übergeführt wird. Da das Viereck MBFG ein Parallelogramm ist und B durch eine 90°- Drehung um F in P übergeht, ist auch das Viereck $GFPM^*$ ein Parallelogramm. Weiterhin ist das Viereck AMFG ein Parallelogramm. Da somit die Strecken AM, GF, M^*P parallel und gleich lang sind,



ist auch das Viereck $AMPM^*$ ein Parallelogramm.

Die Drehung Φ führt das Dreieck MQG in das Dreieck M^*AG über.

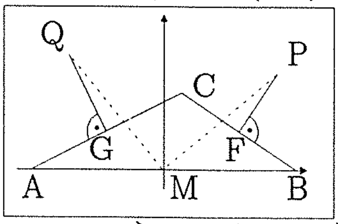
Daher ist QM senkrecht und kongruent zu AM^*.

Folglich ist QM auch senkrecht und kongruent zu PM.

Dies bedeutet aber, dass das Dreieck MPQ gleichschenklig-rechtwinklig ist, so dass der Beweis damit abgeschlossen ist.

Achte Lösung (mit Koordinaten)

Mit F und G seien die Mittelpunkte von BC bzw. CA bezeichnet. Man führe ein kartesisches Koordinatensystem so ein, dass die Punkte A und B die Koordinaten (− 2, 0) bzw. (2, 0) haben und die zweite Koordinate von C positiv ist. Dann



ist M der Ursprung. C hat ein Koordinatenpaar, das sich als (2c, 2d) mit d > 0 darstellen lässt. Durch eine 90°-Drehung geht - wie aus der analytischen Geometrie bekannt - der Vektor $\binom{x}{y}$ über in den Vektor $\binom{-y}{x}$.

$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}\binom{2+2c}{2d} = \binom{1+c}{d}$.

Wegen $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MF} = \binom{2}{0} - \binom{1+c}{d} = \binom{1-c}{-d}$ ist $\overrightarrow{FP} = \binom{d}{1-c}$, somit hat man:

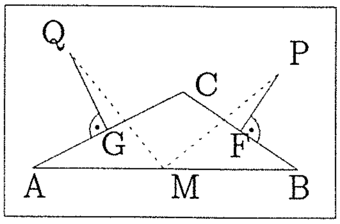
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FP} = \binom{1+c}{d} + \binom{d}{1-c} = \binom{1+c+d}{1-c+d}$.

Entsprechend ergibt sich $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GQ} = \binom{-1+c}{d} + \binom{-d}{c+1} = \binom{-1+c-d}{1+d+c}$.

Also geht $\overrightarrow{MQ}$ durch eine 90°-Drehung aus $\overrightarrow{MP}$ hervor, woraus die Behauptung folgt.

Neunte Lösung (vektoriell)

Mit F und G seien die Mittelpunkte von BC bzw. CA bezeichnet. Man lege ein



kartesisches Koordinatensystem so in die Ebene, dass M im Ursprung liegt. Die Ortsvektoren von Punkten der Ebene werden nachfolgend mit den entsprechenden Kleinbuchstaben (in Fraktur) bezeichnet. Φ sei die lineare Abbildung des Raumes $\mathbb{R}^2$ (mit der kanonischen Basis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$), welche $\mathfrak{e}_1$ in $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_2$ in $-\mathfrak{e}_1$ überführt. Bezogen auf die Punkte der Ebene beschreibt Φ eine 90°-Drehung um den Ursprung. Aufgrund der Additivität von Φ und wegen $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} - \mathfrak{a}, \mathfrak{g} = \mathfrak{c} - \mathfrak{f}$ gilt nun

$$\Phi(\mathfrak{p}) = \Phi(\mathfrak{f}) + \Phi(\mathfrak{p} - \mathfrak{f}) = \Phi(\mathfrak{g} - \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c} - \mathfrak{f}) = (\mathfrak{q} - \mathfrak{g}) + \mathfrak{g} = \mathfrak{q}\,.$$

Aus $\Phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Aufgabe 4

Man beweise: Für jede natürliche Zahl n ist die Zahl $n + [(\sqrt{2} + 1)^n]$ ungerade.

Dabei bezeichnet $[x]$ für jede reelle Zahl x die größte ganze Zahl, die höchstens so groß ist wie x. Zum Beispiel ist $[\sqrt{2} + 1] = 2$, $[1] = 1$.

Vorbemerkung Unter der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird nachfolgend (wie mittlerweile allgemein üblich) $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ verstanden.

Erste Lösung

Nach dem binomischen Lehrsatz ist $(1 + b\cdot\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot(b\cdot\sqrt{2})^k$.

Insbesondere ist

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot\sqrt{2}^k \qquad \text{und} \quad (1 - \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cdot\sqrt{2}^k.$$

Somit ist $(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n = 2\cdot\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k}\cdot\sqrt{2}^k = 2\cdot\sum_{i=0}^{[n:2]} \binom{n}{2i}\cdot 2^i$.

Definiert man nun die Folge $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ durch $a_n := \sum_{i=0}^{[n:2]} \binom{n}{2i}\cdot 2^i$, sind alle Glieder der Folge natürliche Zahlen.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $\qquad (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n = 2a_n$.

Wegen $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0$ liegt $(1 - \sqrt{2})^n$ für gerades n im Intervall $]\,0, 1\,[$, für ungerades n im Intervall $]-1, 0\,[$.

Aus der Identität $(1 + \sqrt{2})^n = 2a_n - (1 - \sqrt{2})^n$ folgt daher, dass $(1 + \sqrt{2})^n$

- für gerades n im offenen Intervall $]\,2a_n - 1, 2a_n\,[$,
- für ungerades n im offenen Intervall $]\,2a_n, 2a_n + 1\,[$ liegt.

Somit ist $[\,(1 + \sqrt{2})^n\,] = 2a_n - 1$ bzw. $= 2a_n$, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist. Die Summe $n + [\,(1 + \sqrt{2})^n\,]$ ergibt sich also für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch Addition einer geraden und einer ungeraden Zahl, so dass die Summe in allen Fällen eine ungerade Zahl ist. Das war zu beweisen.

Zweite Lösung

Es wird zunächst die Existenz der Darstellung $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\cdot\sqrt{2}$ gezeigt, wobei (a_n) und (b_n) Folgen natürlicher Zahlen mit den Rekursionsgleichungen $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ und $b_{n+1} = a_n + b_n$ sind.

Für $n = 0$ hat man mit $a_0 = 1$ und $b_0 = 0$ offenbar eine entsprechende Darstellung. Die Induktionsannahme $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\cdot\sqrt{2}$ liefert für $n \in \mathbb{N}$ dann

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})^n \cdot (1 + \sqrt{2}) &= (a_n + b_n\cdot\sqrt{2})\cdot(1 + \sqrt{2}) \\ &= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\cdot\sqrt{2} \\ &= a_{n+1} + b_{n+1}\cdot\sqrt{2},\end{aligned}$$

womit der Induktionsbeweis abgeschlossen ist.

Ebenfalls durch Induktion wird nun gezeigt, dass für alle Indizes n die Formel

$$2b_n^{\,2} = a_n^{\,2} - (-1)^n \text{ gilt.}$$

Diese ist wegen $2b_0^{\,2} = 0 = 1 - 1 = a_0^{\,2} - (-1)^0$ für $n = 0$ richtig, so dass die Umformung

$$2b_{n+1}^2 = 2(a_n + b_n)^2 = (a_n + 2b_n)^2 + a_n^2 - 2b_n^2$$
$$= a_{n+1}^2 + a_n^2 - (a_n^2 - (-1)^n)$$
$$= a_{n+1}^2 + (-1)^n$$
$$= a_{n+1}^2 - (-1)^{n+1}$$

diesen Induktionsbeweis abschließt.

Demnach erhält man

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\cdot\sqrt{2} = a_n + \sqrt{2b_n^2} = a_n + \sqrt{a_n^2 - (-1)^n}.$$

Unter Verwendung der (wegen $a_n \geq 1$ gültigen) Abschätzung

$$a_n - 1 \leq \sqrt{a_n^2 - 1} < a_n < \sqrt{a_n^2 + 1} \leq a_n + 1$$

gelangt man unter Beachtung der Ganzzahligkeit von a_n zu

$$[(1+\sqrt{2})^n] = [\,a_n + \sqrt{a_n^2 - (-1)^n}\,]$$
$$= a_n + [\,\sqrt{a_n^2 - (-1)^n}\,]$$
$$= \begin{cases} a_n + (a_n - 1) = 2a_n - 1, & \text{falls n gerade,} \\ a_n + a_n = 2a_n, & \text{falls n ungerade.} \end{cases}$$

Von den Ausdrücken $[(1+\sqrt{2})^n]$ und n stellt also immer einer eine gerade und der andere eine ungerade natürliche Zahl dar; somit ist - wie zu beweisen war - die Summe stets ungerade.

<u>Dritte Lösung (nur skizziert)</u>

Die folgenden vier Hilfssätze werden verwendet:

(1) Es gibt zwei Folgen natürlicher Zahlen (a_n), (b_n) mit denen die Gleichungen
$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\cdot\sqrt{2} \quad \text{und} \quad (1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\cdot\sqrt{2}$$
erfüllt sind.

(2) Für jede ganze Zahl z und jede reelle Zahl x ist $[\,z + x\,] = z + [\,x\,]$.

(3) Für jede reelle nicht-ganze Zahl x ist $[\,x\,] + [\,-x\,] = -1$.

(4) Für jede natürliche Zahl n ist die Summe $n + [\,(1-\sqrt{2})^n\,]$ ungerade, denn wegen $0 < 1 - \sqrt{2} < 1$ hat $[\,(1-\sqrt{2})^n\,]$ für gerades n den Wert 0, für ungerades n den Wert -1.

Damit ist

$$n + [(\sqrt{2}+1)^n] = n + [(\sqrt{2}+1)^n] + [(\sqrt{2}-1)^n] - [(\sqrt{2}-1)^n]$$
$$= n - [(\sqrt{2}-1)^n] + [\,a_n + b_n\cdot\sqrt{2}\,] + [\,a_n - b_n\cdot\sqrt{2}\,]$$
$$= n - [(\sqrt{2}-1)^n] + 2a_n + [\,b_n\cdot\sqrt{2}\,] + [\,-b_n\cdot\sqrt{2}\,]$$
$$= n - [(\sqrt{2}-1)^n] + 2a_n - 1.$$

Nach (4) ist $n - [(\sqrt{2}-1)^n]$ gerade, somit ist $n + [(\sqrt{2}+1)^n]$ darstellbar als Summe zweier gerader Zahlen und einer ungeraden Zahl, also ungerade.