BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
53144 Bonn

3+ 4

Carolin Kleber 06

Aufgaben und Lösungen 1996
1. Runde

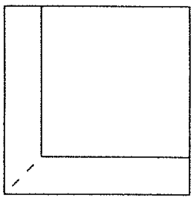
Stand 17. Mai 96

Aufgabe 1

Kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm vollständig mit drei Quadraten der Seitenlänge 4 cm überdecken ? (Beweis !)

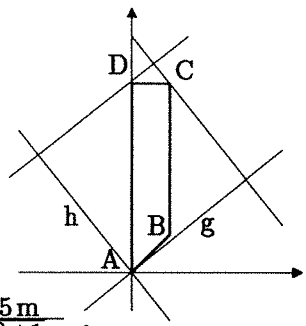
Lösung

Die Antwort lautet JA. Zum Beweis bezeichne man das große Quadrat mit Q, die drei kleinen Quadrate mit q_1, q_2, q_3. Man lege q_1 so auf Q, daß zwei der Innenwinkel zur Deckung kommen, und verbinde die im Inneren von Q liegende Ecke von q_1 mit der nächstliegenden Ecke von Q. Damit ist Q in ein Quadrat der Seitenlänge 4 cm und zwei kongruente Trapeze zerlegt; dabei ist ein solches Trapez durch zwei benachbarte rechte Winkel und die Längen 4 cm, 1 cm, 5 cm der an diesen Winkeln beteiligten Seiten gegeben. Es genügt nun zu beweisen, daß ein solches Trapez in ein Quadrat der Seitenlänge 4 cm paßt. Dies geschieht in den ersten beiden Beweisen. In diesen seien die Ecken des Trapezes so mit A, B, C, D bezeichnet, daß AD die Seite der Länge 5 cm und Winkel ADC ein rechter ist.



Erster Beweis

Man lege ein Kartesisches Koordinatensytem mit der Längeneinheit 1 cm so auf das Trapez, daß der Ursprung auf A liegt, die senkrechte Achse durch AD verläuft und das Trapez im ersten Quadranten liegt. Dann haben die Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge die Koordinaten $(0|0)$, $(1|1)$, $(1|5)$ und $(0|5)$.
Zu einer positiven Zahl m sei g die Ursprungsgerade mit der Steigung m. Die zu g orthogonale Ursprungsgerade h hat dann die Steigung $-\frac{1}{m}$.



Die Gleichungen dieser Geraden sind

g: $\quad y = m\cdot x$, $\quad$ in Hesseform $\frac{m\cdot x-y}{\sqrt{m^2+1}} = 0$,

h: $\quad y = -\frac{1}{m}\cdot x$, $\quad$ in Hesseform $\frac{x+m\cdot y}{\sqrt{m^2+1}} = 0$.

Ist d_D der Abstand des Punktes D von g, d_C der Abstand des Punktes C von h, hat man daher

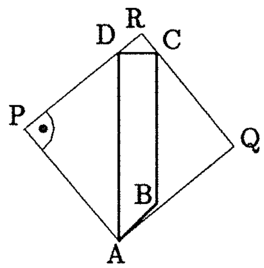
$$d_D = d((0|5);g) = \frac{5}{\sqrt{m^2+1}}, \qquad d_C = d((1|5);h) = \frac{1+5m}{\sqrt{m^2+1}} .$$

Wählt man nun speziell $m := \frac{4}{5}$, so ergibt sich wegen $1+5m = 5$ für d_D und d_C der gleiche Wert, nämlich $d_D = d_C = \frac{25}{\sqrt{41}} = \frac{100}{\sqrt{656}} < \frac{100}{\sqrt{625}} = 4$.
Das Quadrat q' mit der Seitenlänge d_D , das von g, h, der Parallelen zu g durch D, und der Parallelen zu h durch C gebildet wird, enthält also A, C, D und wegen $m < 1$ auch B. Da q' wegen der kleineren Seitenlänge in q_2 paßt, ist damit der Beweis erbracht.

Bemerkung (Variante dieses Beweises): Für $m = \frac{3}{4}$ ergeben sich die Abstände $d_D = 4$, $d_C = 3{,}8 < 4$. Auch hieraus folgt, daß das Trapez mit einem Quadrat der Seitenlänge 4 cm überdeckt werden kann.

Zweiter Beweis

Auf die Trapezseite AD der Länge 5cm wird nach außen ein rechtwinkliges Dreieck ADP mit $\overline{AP} = 4$ cm und $\overline{PD} = 3$ cm aufgesetzt, so daß AD die Hypotenuse ist. Die Parallele zu (AP) durch C schneidet (PD) in einem Punkt, der R genannt wird; mit Q wird ihr Schnittpunkt mit der durch A gezogenen Parallelen zu (PR) bezeichnet.



Dann ist das Viereck PAQR ein Rechteck, dessen eine Seitenlänge $\overline{AP}$ nach Konstruktion 4 cm beträgt, während die zweite Seite kürzer als 4 cm ist; es gilt nämlich
$\overline{PR} = \overline{PD} + \overline{DR} < \overline{PD} + \overline{DC} = 3\text{ cm} + 1\text{ cm} = 4\text{ cm}$.

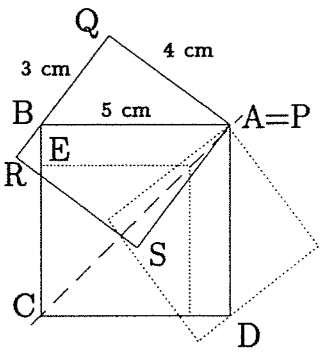
Der Punkt B liegt innerhalb des Vierecks AQRP. Denn der Winkel DAP ist im rechtwinkligen Dreieck ADP der kleinste, daher ist der 45°-Winkel BAD kleiner als der Winkel QAD und außerdem ist $\overline{AB} = \sqrt{2}$ cm < 3 cm $= \overline{PD} < \overline{PR} = \overline{AQ}$.

Das Trapez ABCD paßt also ganz ins Viereck AQRP und daher erst recht in ein Quadrat der Seitenlänge 4 cm.

Dritter Beweis

Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 5 cm wird schrittweise mit Quadraten der Seitenlänge 4 cm (nachfolgend „kleine Quadrate" genannt) überdeckt:

Zunächst wird ein kleines Quadrat PQRS derart auf ABCD gelegt, daß P mit A zusammenfällt, Q auf AB, S auf DA liegt. Nun dreht man unter Beibehaltung der Eckenbezeichnungen das kleine Quadrat so um das Zentrum A, daß B auf (QR) zu liegen kommt; wegen $5^2 = 4^2+3^2$ liegt B dann auf der Strecke QR. Da das kleine Quadrat (in mathem. negativem Sinn) um weniger als 45° gedreht wurde, liegt S in der gleichen Halbebene von (AC) wie D.



Zur weiteren Überdeckung mit einem zweiten kleinen Quadrat wird das Quadrat PQRS an der Geraden (AC) gespiegelt. Die beiden kleinen Quadrate überlappen sich; (AC) ist Symmetrieachse des Überlappungsgebiets.

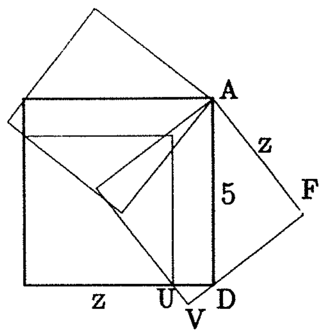
Durch Strecken vom Zentrum C aus mit Streckfaktor 0,8 erhält man zum Quadrat ABCD als Bild ein kleines Quadrat. Seine zweite auf CB liegende Ecke sei mit E bezeichnet. Wegen $\overline{BR} = 1$ cm liegt E im Inneren des Quadrats PQRS. Folglich überdeckt das dritte kleine Quadrat den noch freien - drachenförmigen - Teil des Quadrats ABCD.

Bemerkungen zu den ersten drei Beweisen

1. Die ersten drei Beweise unterscheiden sich nur in der Form der Darstellung.

2. Aus den Lösungen geht hervor, daß die verlangte Überdeckung auch mit drei kongruenten Quadraten möglich ist, deren Seitenlänge kleiner als 4 cm ist.

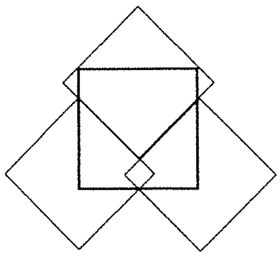
Man kann beweisen, daß man bei der angegebenen Plazierung der kleinen Quadrate mit drei Quadraten der Seitenlänge s cm mit $s := \frac{5}{2}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{5} - 2}$ ($\approx$ 3,93) auskommt. Denn aus der gleichsinnigen Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ADF und DUV liest man zunächst die Gleichung $\frac{5-z}{5} = \frac{z-\sqrt{25-z^2}}{z}$ ab.

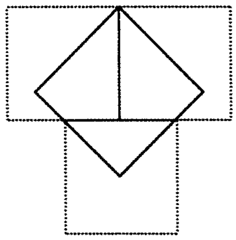


Durch Umstellen und Quadrieren erhält man hieraus die biquadratische Gleichung $z^4 + 25z^2 - 625 = 0$ mit der einzigen positiven Lösung s.

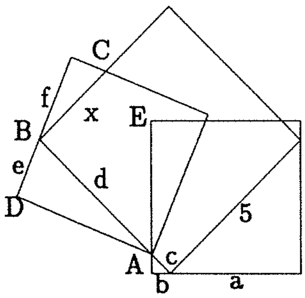
3. Es läßt sich zeigen, daß der unter 2. genannte Wert für die Seitenlänge der kleinen Quadrate minimal ist: es ist unmöglich, ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm mit drei kongruenten Quadraten einer kleineren Seitenlänge als s cm zu überdecken.

4. Man könnte aufgrund anschaulicher Vorstellungen erwarten, daß es auch symmetrische Überdeckungen mit streckenweise gemeinsamen Rändern der kleinen Quadrate wie links angegeben gibt. Derartige Überdeckungen sind mit den vorgegebenen Maßen nicht möglich. Dagegen zeigt der nachfolgende vierte Beweis, daß es durchaus dem linken Beispiel ähnliche Überdeckungen mit paarweiser Überlappung der drei kleinen Quadrate gibt.





Vierter Beweis



Die drei kleineren Quadrate werden nachfolgend mit q_1, q_2, q_3 bezeichnet; das größere Quadrat wird Q genannt. Man lege das Quadrat q_1 so auf das große Quadrat Q, daß zwei benachbarte Ecken von Q auf zwei benachbarten Seiten von q_1 liegen und die Seiten von q_1 parallel zu den Diagonalen von Q verlaufen (s. Abb. links).

Von den Schnittpunkten von Q und q_1, die nicht zugleich Ecken von Q sind, sei einer (s. Skizze) mit A bezeichnet. Die außerhalb von q_1 liegende Ecke der A enthaltenden Seite von Q heiße B. Schließlich sei E die innerhalb von Q liegende Ecke von q_1.

Die gemäß der Skizze bezeichneten Zerlegungsabschnitte a, b, c, d berechnen sich (nach Pythagoras bzw. durch Streckensubtraktion) zu

$$a = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}, b = 4 - \frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}, c = 4\cdot\sqrt{2} - 5, d = 10 - 4\cdot\sqrt{2}.$$

Wegen $4 < d < 4\cdot\sqrt{2}$ kann man q_2 mit einer Ecke auf A so plazieren, daß B auf einer Seite von q_2 liegt und die Diagonale von q_2 nicht vollständig außerhalb von Q verläuft. D sei diejenige Ecke von q_2, für die das Dreieck ADB rechtwinklig mit Hypotenuse d ist.

Bezeichnet man die Abschnitte, in die B eine Seite von q_2 zerlegt, mit e und f, so hat man

$$e = \sqrt{d^2 - 16}\ ,\ f = 4 - e.$$

Da BD die kleinste Seite im nicht-gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck ADB ist, ist der Winkel BAD kleiner als 45°, der Winkel EAD also kleiner als 90°. Wegen AE < 4 liegt somit E im Inneren von q_2.

Nun sei C neben A und B der dritte Punkt, den die Seiten von Q und q_2 gemeinsam haben, mit x sei die Länge von BC bezeichnet.

Wegen der Ähnlichkeit der entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke gilt die Verhältnisgleichung $x : f = d : 4$, also ist $4x = f \cdot d$.

Zum Abschluß des Beweises wird nun gezeigt, daß $4x \geq 10$ ist.

$$4x = \left(4 - \sqrt{(10 - 4\cdot\sqrt{2})^2 - 16}\right)\cdot(10 - 4\cdot\sqrt{2}).$$

Durch Äquivalenzumformungen erhält man aus der zu beweisenden Ungleichung

$$\left(4 - \sqrt{(10 - 4\cdot\sqrt{2})^2 - 16}\right)\cdot(10 - 4\cdot\sqrt{2}) \geq 10 \quad \text{nacheinander}$$

$$\left(4 - \sqrt{(10 - 4\cdot\sqrt{2})^2 - 16}\right)\cdot(10 - 4\cdot\sqrt{2})\cdot(10 + 4\cdot\sqrt{2}) \geq 10\cdot(10 + 4\cdot\sqrt{2}),$$

$$\left(4 - \sqrt{(10 - 4\cdot\sqrt{2})^2 - 16}\right)\cdot(100 - 32) \geq 10\cdot(10 + 4\cdot\sqrt{2}),$$

$$\left(4 - \sqrt{(10 - 4\cdot\sqrt{2})^2 - 16}\right)\cdot 17 \geq 5\cdot(5 + 2\cdot\sqrt{2}),$$

$$68 - 25 - 10\cdot\sqrt{2} \geq \left(\sqrt{(10 - 4\cdot\sqrt{2})^2 - 16}\right)\cdot 17,$$

$$43 - 10\cdot\sqrt{2} \geq \left(\sqrt{(10 - 4\cdot\sqrt{2})^2 - 16}\right)\cdot 17.$$

Da auch die linke Seite der Ungleichung wegen $43 - 10\cdot\sqrt{2} > 43 - 10\cdot 2 = 23$ positiv ist, bedeutet Quadrieren ebenfalls eine Äquivalenzumformung.

$$(43 - 10\cdot\sqrt{2})^2 \geq ((10 - 4\cdot\sqrt{2})^2 - 16)\cdot 17^2,$$

$$2049 - 860\cdot\sqrt{2} \geq (116 - 80\cdot\sqrt{2})\cdot 289,$$

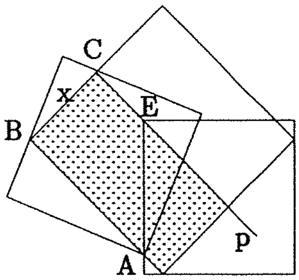
$$2049 - 116\cdot 289 \geq (860 - 80\cdot 289)\cdot\sqrt{2},$$

$$31475 \leq 22260\cdot\sqrt{2},$$

$6295 \leq 4452\cdot\sqrt{2}$; durch Quadrieren der beiden (positiven) Seiten ergibt sich $39627025 \leq 39640608$, was offensichtlich richtig ist.

Da alle Umformungen umkehrbar sind, erhält man daher $4x \geq 10$.

Die Parallele p zu (AB) durch E zerlegt Q in zwei kongruente Rechtecke, von denen das die Strecke AB enthaltende nach obigen Überlegungen vollständig von q_1 und q_2 überdeckt wird. Legt man nun das dritte kleine Quadrat q_3 so, daß es bezüglich p symmetrisch zu q_2 liegt, überdecken die kleinen Quadrate q_1, q_2, q_3 offensichtlich das große Quadrat Q. Damit ist die Existenz einer Überdeckung der gewünschten Art nachgewiesen.



<u>Hinweise zu häufigen Fehlern und Mängeln</u>

1. Eine zeichnerische Darstellung der geeigneten Überdeckung stellt keine ausreichende Lösung dar, auch dann nicht, wenn die Konstruktion ausführlich beschrieben wird. Vielmehr muß die Möglichkeit der Konstruktion, also auch das Vorliegen der hierbei verwendeten Eigenschaften, nachgewiesen werden.

2. Der Nachweis, daß die Summe zweier Winkelweiten α und β kleiner als 90° ist, ist lückenhaft, wenn die Weiten α und β mit Taschenrechner (oder Tafelwerk) und trigonometrischen Funktionen bestimmt werden. Der Taschenrechner ist zwar geeignet als Hilfsmittel zur Kontrolle oder zur schnellen Durchführung von Rechnungen, die ohne ihn lediglich mühsamer auszuführen wären. Er kann aber nicht als Beweishilfsmittel herangezogen werden. So läßt sich die in einigen Beweisen benötigte Beziehung $\operatorname{arc\,tan}(\frac{3}{4}) < 45°$ zwar leicht mit Hilfe der strengen Monotonie der arctan-Funktion zeigen, denn aus $\frac{3}{4} < 1$ folgt damit $\arctan(\frac{3}{4}) < \arctan(1)\ (= 45°)$, von unzureichendem Beweiswert ist dagegen die auf Taschenrechner oder Tabellenwerk fußende Argumentation $\arctan\frac{3}{4} \approx 36{,}78° < 45°$.

3. Selbst wenn gerundete Werte im Rahmen der angezeigten Stellen als gesichert gelten, können sie bei Verwendung in einer Rechnung nur im Zusammenhang mit einer Fehlerbetrachtung für Abschätzungen verwendet werden. Ersetzt man z. B. bei der Berechnung des Kehrwerts von $5\cdot\sqrt{2} - 7{,}07$ (Ergebnis zwischen 936 und 937) die Wurzel durch den Näherungswert 1,4142, erhält man mit 1000 ein gravierend abweichendes Ergebnis. Zumal bei einem so knapp reichenden Näherungswert für 10 wie 10,0239..., wie ihn z. B. der Taschenrechner im obigen vierten Beweis für 4x liefert, kann auf eine Fehlerbetrachtung (hier für $(4 - \sqrt{(10 - 4\cdot\sqrt{2})^2 - 16}\,)\cdot(10 - 4\cdot\sqrt{2})$) nicht verzichtet werden.

Aufgabe 2

Auf einem n×n-Schachbrett sind die Felder so numeriert wie in dem abgebildeten Beispiel für $n = 5$.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Es werden n Felder derart ausgewählt, daß aus jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Feld kommt. Anschließend werden die Nummern dieser Felder addiert.

Welche Werte für die Summe sind hierbei möglich ? (Beweis !)

Ergebnis

Unabhängig von der (voraussetzungskonformen) Wahl der Felder ergibt sich stets die nur von n abhängige Summe $s_n = \frac{n}{2}\cdot(n^2 + 1)$.

Beweis

Versieht man gemäß der Skizze die Spalten mit den Werten 1, 2, 3, ..., n und die Zeilen mit den Werten 0, n, 2n, ..., (n-1)·n, dann ergibt sich die Nummer eines Feldes jeweils als Summe aus Zeilen- und Spaltenwert.

	1	2	3	...	n
0	1	2	3	...	n
n	n+1	n+2	n+3	...	2n
2n	2n+1	2n+2	2n+3	...	3n
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
(n-1)·n	n^2-n+1	n^2-n+2	n^2-n+3	...	n^2

Da jede Spalte und jede Zeile genau einmal bei der Bildung der Summanden beteiligt ist, ergibt sich als Summe der Feldnumerierungen

$$\begin{aligned}
&1+2+3+ \dots +n + 0+n+2n+ \dots (n-1)\cdot n\\
&= \tfrac{1}{2} n\cdot(n+1) + n\cdot(1+2+3+ \dots +n-1)\\
&= \tfrac{1}{2} n\cdot(n+1) + n\tfrac{1}{2}(n-1)\cdot n\\
&= \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 = \tfrac{1}{2}(n^3 + n).
\end{aligned}$$

Hinweise zu häufigen Fehlern und Mängeln

1. Die Vermutung der richtigen Lösungsformel und ihre Bestätigung an konkreten Beispielen ersetzt nicht den allgemeinen Beweis. Auch bei richtiger Angabe des Lösungsterms ist die Aufgabe in diesem Fall nicht gelöst.

2. Wenn schlüssig begründet worden ist, daß die Summe unabhängig von der Auswahl der Felder ist, genügt die Auswertung einer speziellen Auswahl (z. B. aller Felder einer Diagonale). Da aber nicht nur nach einer Methode zur Berechnung der möglichen Summen, sondern nach den Werten gefragt war, sollten die Ergebnisse soweit wie möglich ausgewertet und zusammengefaßt werden, zumal dies hier sehr einfach möglich war.

Aufgabe 3

In der Ebene liegen vier Geraden so, daß je drei von ihnen ein Dreieck bestimmen; eine dieser Geraden sei parallel zu einer der Seitenhalbierenden des von den drei anderen Geraden bestimmten Dreiecks.

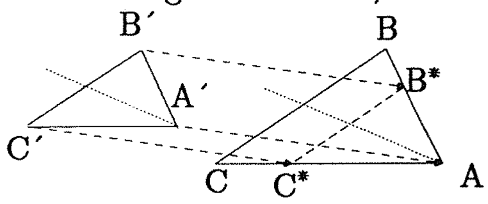
Man beweise, daß dann auch jede der drei anderen Geraden diese Eigenschaft hat.

Vorbemerkung

Die ersten drei Beweise machen Gebrauch von dem folgenden Hilfssatz (H):

> Sind ABC und A'B'C' zwei Dreiecke, deren hinsichtlich der Bezeichnung entsprechende Seiten zueinander parallel sind, und ist s_a in Dreieck ABC die Seitenhalbierende durch A, $s_{a'}$ die Seitenhalbierende in Dreieck A'B'C' durch A', dann sind s_a und $s_{a'}$ parallel zueinander.

Zum Beweis betrachte man diejenige Parallelverschiebung α der Ebene, bei der A' in A übergeht. Da bei einer Verschiebung Urbild- und Bildgerade jeweils parallel sind, liegt $\alpha(B')$ $(:= B^*)$ auf (AB); entsprechend liegt $\alpha(C')$ $(:= C^*)$ auf (AC). Es entsteht also eine Strahlensatzfigur mit Scheitelpunkt A, den Strahlen (AB) und (AC) sowie dem Parallelenpaar (BC) und (B^*C^*).



Nach dem zweiten Strahlensatz fällt die Seitenhalbierende s_a mit der Seitenhalbierenden s^* des Dreiecks AB^*C^* zusammen. Folglich ist s_a parallel zu $s_{a'}$.

Zum Nachweis des Hilfssatzes reicht auch der Hinweis, daß die betrachteten Dreiecke ähnlich und in ähnlicher Lage sind; zusammen mit den drei Seiten verlaufen daher alle ausgezeichneten Linien des einen Dreiecks parallel zu den entsprechenden Linien im anderen Dreieck.

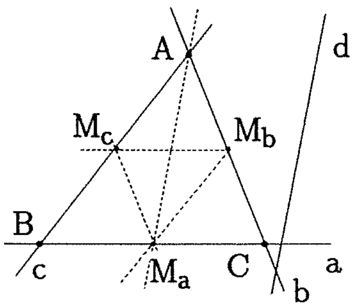
Schließlich folgt auch aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung, die ja Geraden in parallele Geraden übergehen läßt und Seitenverhältnisse erhält, daß bei Parallelverschiebung einer der drei Begrenzungsgeraden eines Dreiecks die

Seitenhalbierenden im neuen Dreieck zu den ursprünglichen parallel verlaufen. Mehrfache Anwendung dieser Überlegung liefert ebenfalls die Behauptung des Hilfssatzes.

Nachfolgend wird nun mit formal verschiedenen, im Kern aber weitgehend übereinstimmenden Beweisen die Behauptung der Aufgabe als richtig nachgewiesen:

Erster Beweis

Die vier Geraden der Aufgabenstellung seien mit a, b, c, d bezeichnet; dabei sei d parallel zu einer der Seitenhalbierenden in dem von den Geraden a, b, c bestimmten Dreieck ABC. Hierbei sind die Ecken gemäß den gegenüberliegenden Geraden bezeichnet. Weiterhin sei s_a im Dreieck ABC die zu d parallele Seitenhalbierende. Schließlich werden die Seitenmitten im Dreieck ABC mit M_c, M_a, M_b bezeichnet. Mit den Eigenschaften des Mittendreiecks folgt nun:



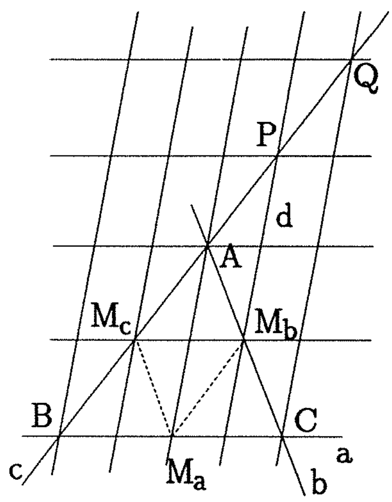
(M_cM_b) ist parallel zu a und ist eine Seitenhalbierende im Dreieck M_aAM_c,
(M_bM_a) ist parallel zu c und ist eine Seitenhalbierende im Dreieck M_aCA,
(M_aM_c) ist parallel zu b und ist eine Seitenhalbierende im Dreieck M_aAB.

Da die Seiten von Dreieck M_aAM_c parallel zu d, c, b sind, die Seiten von Dreieck M_aCA parallel zu a, b, d sind und die Seiten von Dreieck M_aAB parallel zu d, c, a sind, folgt mit dem Hilfssatz (H), daß die Geraden a, c, b die gleiche Eigenschaft wie d besitzen.

Zweiter Beweis

Die Bezeichnungen seien wie im ersten Beweis gewählt. Die vierte Gerade d sei wieder parallel zur Seitenhalbierenden durch A im von a, b, c bestimmten Dreieck. Da nach (H) eine Parallelverschiebung einer von drei ein Dreieck bestimmenden Geraden die Richtung der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks invariant läßt, solange das entstehende Dreieck nicht zu einem Punkt ausartet, darf man oBdA annehmen, daß d durch M_b verläuft. Der Schnittpunkt von d und c sei mit P bezeichnet.

Die Parallelen zu d durch B, M_c, A, M_b und C bilden nach dem Satz von den Mittelparallelen im Dreieck eine Streifenschar und bestimmen deshalb auf a und auf c je fünf äquidistante Punkte. Die Parallelen zu a durch die fünf letztgenannten Punkte auf c bilden also ebenfalls eine Streifenschar. Beide Streifenscharen zusammen ergeben ein Gitter von 16 Parallelogrammen, in denen c und b jeweils zu den Diagonalen parallel sind.



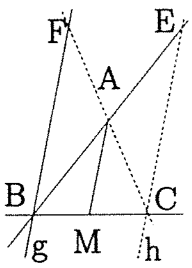
Nun ist offensichtlich

b parallel zu der Seitenhalbierenden durch M_a im Dreieck BM_aA,

c parallel zu der Seitenhalbierenden durch M_a im Dreieck M_aCA,
a parallel zu der Seitenhalbierenden durch A im Dreieck M_bPA.
Nach (H) ergibt sich damit die Behauptung.

Dritter Beweis

Die Ecken des von den ersten drei Geraden a, b, c bestimmten Dreiecks seien so mit A, B, C bezeichnet, daß die vierte Gerade d parallel zur Seitenhalbierenden durch A im Dreieck ABC ist. Zu dieser Seitenhalbierenden (und damit zur vierten Geraden) werden die Parallelen g und h durch B bzw. C gezogen; der Schnittpunkt von g mit (AC) wird mit F, der Schnittpunkt von h mit (AB) wird mit E bezeichnet.



Legt man nun den Ursprung eines Koordinatensystems in A und bezeichnet die Ortsvektoren von B und C mit $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{c}$, dann hat der Mittelpunkt M von BC den Ortsvektor $\frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$, die Geraden (EC) und (FB) haben also die Richtung $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$.
Nach dem ersten Strahlensatz (Scheitelpunkt C) ist $\overline{FA} = \overline{AC}$, also hat F den Ortsvektor $\mathfrak{f} = -\mathfrak{c}$; entsprechend hat E den Ortsvektor $\mathfrak{e} = -\mathfrak{b}$.

Im Dreieck	hat die Seitenhalbierende	die Richtung	ist also
FBA	durch A	$\frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{f}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})$,	parallel zu (BC),
FBC	durch B	$\frac{1}{2}(\mathfrak{c} + \mathfrak{f}) - \mathfrak{b} = -\mathfrak{b}$,	(AB),
BCE	durch C	$\frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{e}) - \mathfrak{c} = -\mathfrak{c}$,	(AC).

Damit ist gezeigt, daß auch die anderen drei Geraden die gleiche Eigenschaft wie d haben.

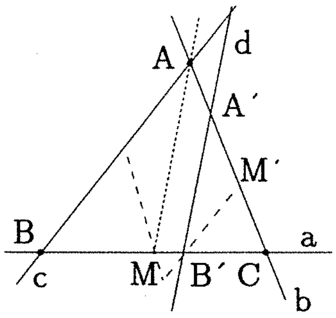
Vorbemerkung zum vierten Beweis

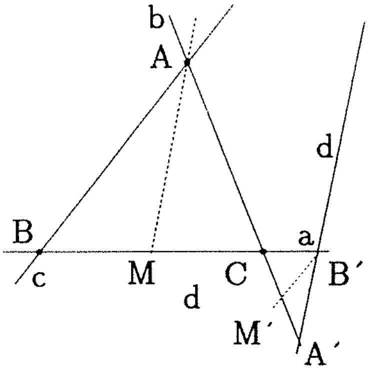
Wenn bei der Betrachtung der vier Geraden nicht der Hilfssatz (H) verwendet wird, muß die Beweisführung so allgemein sein, daß sie für jede der im Rahmen der Aufgabenstellung zulässigen Lagen der Geraden richtig bleibt. Insbesondere darf die Argumentation nicht davon abhängen , ob die Gerade, die gemäß Aufgabenstellung zu einer Seitenhalbierenden des Dreiecks aus den anderen drei Geraden parallel ist, ganz außerhalb oder teilweise innerhalb dieses Dreiecks verläuft und im letztgenannten Fall möglicherweise diese Seitenhalbierende enthält.

Vierter Beweis

Die Ecken des von den ersten drei Geraden a, b, c bestimmten Dreiecks seien so mit A, B, C bezeichnet, daß die vierte Gerade d parallel zur Seitenhalbierenden durch A im Dreieck ABC ist. M sei der Mittelpunkt von BC.

Da nach Voraussetzung je drei der Geraden a, b, c, d ein Dreieck bilden, liegt keiner der Punkte A, B, C auf d; die Schnittpunkte von d mit a und mit b seien B′ bzw. A′. Dann bestimmen die Geraden a, b, d das Dreieck A′B′C; M′ sei der Mittelpunkt der Seite A′C.





Es wird nun zunächst gezeigt:

(∗) Die Gerade c ist parallel zur Seitenhalbierenden $B'M'$ im Dreieck $A'B'C$.

Nach Definition von M und M´ ist $2\cdot\overline{CM} = \overline{BC}$ und $2\cdot\overline{CM'} = \overline{CA'}$.

Nach Voraussetzung sind (AM) und $(A'B')$ Parallelen; nach dem ersten Strahlensatz gilt daher $\overline{CB'} : \overline{CM} = \overline{CA'} : \overline{CA}$, also $\overline{CB'} \cdot \overline{CA} = \overline{CM} \cdot \overline{CA'}$.

Durch Einsetzen erhält man hiermit

$$\overline{CB'} \cdot \overline{CA} = \frac{1}{2}\,\overline{BC} \cdot 2\overline{CM'} = \overline{BC} \cdot \overline{CM'}, \text{ also } \overline{CB'} : \overline{CB} = \overline{CM'} : \overline{CA}.$$

Die Punkte B´, C, B folgen auf a in der gleichen Reihenfolge aufeinander wie die entsprechenden Punkte A´, C, A auf b. Daher darf die Umkehrung des ersten Strahlensatzes angewendet werden, welche hier besagt:

(AB) ist parallel zu $(M'B')$, also c ist parallel zur Seitenhalbierenden $(M'B')$; damit ist (∗) nachgewiesen.

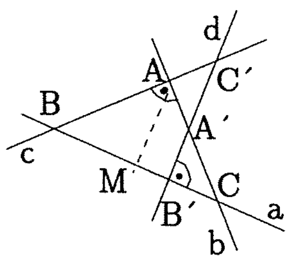
Unter Weiterverwendung dieses Resultats folgt durch zweimalige zyklische Vertauschung der Bezeichnungen (d → c → a → b → d), daß auch a bzw. b zu einer Seitenhalbierenden in dem von den jeweils anderen drei Geraden bestimmten Dreieck parallel ist.

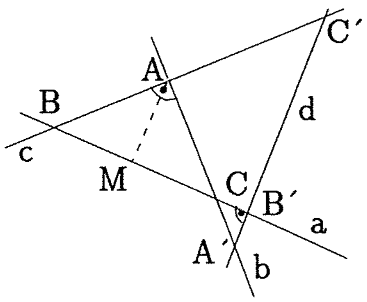
Fünfter Beweis

Die Geraden und ihre Schnittpunkte werden wie im vierten Beweis bezeichnet. Insbesondere ist wieder d die Gerade, die nach Voraussetzung zu einer Seitenhalbierenden - diese gehöre oBdA zur Ecke A - verläuft. M sei wieder der Mittelpunkt von AB. Weiterhin bezeichne C´ den Schnittpunkt von d und c.

Man unterziehe nun die Figur derart einer affinen Abbildung, daß Dreieck ABC in ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei A übergeht. Da Teilverhältnisse und Parallelität invariant gegenüber affinen Abbildungen sind und die Umkehrabbildung wieder affin ist, genügt es, die behaupteten Eigenschaften für die Bildfigur nachzuweisen.

Hierbei seien zur besseren Übersicht die Bildpunkte und -geraden mit den gleichen Bezeichnungen wie die (nicht mehr dargestellten) Originale bezeichnet.





Dann ist (AM) Mittelsenkrechte zu BC und zerlegt Dreieck ABC in die beiden gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke MAB und MCA. Da d parallel zu (AM) ist, liegen die Dreiecke MCA und B´CA´ ähnlich zueinander, insbesondere ist also auch Dreieck B´CA gleichschenklig rechtwinklig.

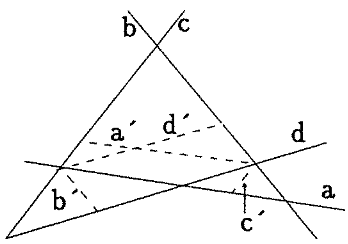
Somit hat der Winkel A´CB´ die Größe 45°, woraus sich die Gleichschenkligkeit des rechtwinkligen Dreiecks AA´C´ ergibt. Die Seitenhalbierende durch A in diesem Dreieck ist also gleichzeitig Mittelsenkrechte von A´C´; hieraus folgt wegen der Orthogonalität von a und d, daß a zu dieser Seitenhalbierenden im von b, c, d gebildeten Dreieck parallel ist; also hat a die behauptete Eigenschaft.

Die Seitenhalbierende durch B´ im von a, b, d gebildeten Dreieck A´B´C steht senkrecht auf b, ist also parallel zu c, das somit ebenfalls die behauptete Eigenschaft hat.

Schließlich hat auch die Gerade b die behauptete Eigenschaft, da auch das von a, c, d gebildete Dreieck BB´C´ gleichschenklig rechtwinklig mit Basis BC´ ist, die Seitenhalbierende durch B´ also senkrecht zu BC´ und mithin parallel zu b ist.

Hinweis zur Vollständigkeit der Lösung

Mit einem Beweis, bei dem nur für eine der drei zu untersuchenden Geraden die verlangte Eigenschaft gezeigt wird, ist die Aufgabe noch nicht gelöst. Je nach der Art dieses Nachweises lassen sich aber die fehlenden beiden Beweise mit den entsprechenden Gedanken führen. Allerdings läßt die nicht symmetrische Lage der drei anderen Geraden - durch zur vierten Geraden paralle Seitenhalbierende erfolgt eine logische 2:1 Aufteilung - einen einfachen Analogschluß nicht zu. Je nach der gewählten Startreihenfolge ist aber ein Beweis durch zyklisches Weitergehen möglich, bei dem nunmehr die nachgewiesene Parallelität der ersten der drei zu untersuchenden Geraden an die Stelle der vorausgesetzten Parallelitätsbedingung tritt. Bei einem solchen Beweis ist die zyklische Schlußkette anzugeben, denn es muß geprüft werden, ob überhaupt durch zyklisches Weitergehen die Bedingung schließlich für alle vier Geraden der Figur zu zeigen ist. Am Beispiel der linken Figur mit den dort eingetragenen Bezeichnungen ist zu sehen: Während sich nach dem Beweis von $d \parallel d' \Longrightarrow a \parallel a'$ durch zyklisches Weiterschließen nacheinander $b \parallel b'$ und damit dann $c \parallel c'$ ergibt, führt nach einem Beweis von $d \parallel d \Longrightarrow b \parallel b'$ die Anwendung des entsprechenden Schlusses auf $b \parallel b'$ nur wieder zu $d \parallel d'$; der Beweis bleibt unvollständig.



Aufgabe 4

Man bestimme die Menge aller positiven ganzen Zahlen n, für die $n \cdot 2^{n-1} + 1$ eine Quadratzahl ist.

Beweis

Setzt man für n in den Ausdruck $n \cdot 2^{n-1} + 1$ der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, 4 ein, so erhält man 2, 5, 13, 33, - also für keinen dieser Werte von n eine Quadratzahl. Wenn also die Gleichung $n \cdot 2^{n-1} + 1 = m^2$ in den positiven ganzen Zahlen eine Lösung (n; m) hat, ist n größer als 4; m ist somit eine ungerade Zahl und erlaubt eine Darstellung $m = 2k + 1$.

Zunächst wird nun mit vollständiger Induktion gezeigt, daß jede positive ganze Zahl n, die größer als 5 ist, die Ungleichung (*) $2^{n-3} > n+1$ erfüllt.
Diese Ungleichung ist für $n = 6$ wegen $2^{6-3} = 2^3 = 8 > 7 = 6 + 1$ offenbar richtig.
Ist nun $n \geq 6$ mit $2^{n-3} > n+1$, so folgt (durch Multiplikation mit 2) $2^{n-2} > 2n+2$.
Da aber für $n \geq 6$ weiterhin $2n+2 > n+2 = (n+1)+1$ gilt, ergibt sich zusammen

$$2^{(n+1)-3} = 2^{n-2} > (n+1) + 1.$$

Damit ist der Induktionsbeweis zu (*) erbracht.

Die Gleichung $n \cdot 2^{n-1} + 1 = m^2$ ist äquivalent zu $n \cdot 2^{n-1} = (m - 1) \cdot (m + 1)$, also auch zu $n \cdot 2^{n-1} = 2k \cdot (2k + 2)$; mithin gilt $n \cdot 2^{n-3} = k \cdot (k + 1)$ mit $n-3 > 1$.
Da k und k+1 teilerfremd sind, muß 2^{n-3} Teiler von k oder von k+1 sein; also ist $k+1 \geq 2^{n-3}$.
Die Annahme einer Lösung (m; n) mit $n > 5$ führt wegen (*) zu

$k+1 \geq 2^{n-3} > n+1$, also $k > n$

und somit zu $k \cdot (k+1) \geq k \cdot 2^{n-3} > n \cdot 2^{n-3} = k \cdot (k+1)$, also $k \cdot (k+1) > k \cdot (k+1)$;

die Annahme ist mithin falsch. Für alle positiven ganzen Zahlen n außer $n = 5$ ist $n \cdot 2^{n-1} + 1$ also keine Quadratzahl.
Der einzige noch nicht untersuchte Wert für n ist $n = 5$; hierfür ergibt der Ausdruck $n \cdot 2^{n-1} + 1$ die Zahl 81, also 9^2.
Die gesuchte Menge enthält daher als einziges Element die Zahl 5.

Bemerkung
Erweitert man die betrachtete Grundmenge auf die nichtnegativen ganzen Zahlen, erhält man mit $n = 0$ wegen $0 \cdot 2^{0-1} + 1 = 1 = 1^2$ eine zweite Lösung.

Hinweis
Um für $n = 6, 7, 8, 9, \ldots$ die Ungleichung $n < 2^{n-3}$ zu beweisen, kann es nicht genügen, einige Paare $(n, 2^{n-3})$ zu betrachten, also z. B. (6, 8), (7, 16), (8, 32), (9, 64), und dann zu argumentieren, daß offensichtlich die ohnehin schon größere zweite Komponente des Paares schneller wächst als die erste. Wenn sich aber diese Argumentation nicht nur qualitativ auf die betrachteten Beispiele stützt, sondern inhaltlich die Übergänge von einem Paar zum nächsten beschreibt - die erste Komponente wird um 1 vergrößert, die zweite wird verdoppelt - dann ist der fehlende Schritt zu einem korrekten Induktionsbeweis minimal. Zu einer vollständigen Lösung reicht es nicht, diesen Beweis nur zu nennen und in seiner Durchführung dem Leser zu überlassen („Durch Induktion zeigt man leicht, daß für $n \geq 6$ die Ungleichung $n < 2^{n-3}$ gilt"), vielmehr ist der Beweis konkret durchzuführen.