BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
53144 Bonn

Aufgaben und Lösungen 1995
2. Runde

Stand 23. Oktober 95

Aufgabe 1

Ein Spielstein steht zunächst auf dem Punkt $(1|1)$ der Koordinatenebene und kann nach folgenden Regeln auf den Punkten der Ebene bewegt werden:

1) Steht der Stein auf $(a|b)$, darf er nach $(2a|b)$ oder nach $(a|2b)$ gehen.
2) Steht der Stein auf $(a|b)$, darf er im Falle $a > b$ nach $(a-b|b)$ gehen und im Falle $a < b$ nach $(a|b-a)$ gehen.

Welche Beziehung zwischen den Zahlen x und y ist notwendig und hinreichend dafür, daß der Stein irgendwann auf dem Punkt $(x|y)$ stehen kann ?

Ergebnis

Da die positiven ganzen Zahlen gegenüber der Subtraktion mit kleinerem Subtrahenden und gegenüber der Multiplikation abgeschlossen sind, sind die Koordinaten x, y eines Punktes, auf dem der Stein irgendwann steht, stets wieder positive ganze Zahlen. Genau dann kann der Stein irgendwann auf dem Punkt $(x|y)$ stehen, wenn die Zahlen x und y außer der Zahl 1 keinen gemeinsamen ungeraden Teiler haben, d. h. wenn der größte gemeinsame Teiler von x und y sich in der Form 2^s mit einer nichtnegativen ganzen Zahl s darstellen läßt.

Der Nachweis läßt sich in die folgenden Teile a) und b) zerlegen:

a) Wenn der Stein irgendwann auf dem Punkt $(x|y)$ stehen kann, dann ist der größte gemeinsame Teiler von x und y eine Zweierpotenz.

b) Wenn der größte gemeinsame Teiler von x und y eine Zweierpotenz ist, dann kann der Stein irgendwann auf dem Punkt $(x|y)$ stehen.

Beweis zu a):

Für zwei natürliche Zahlen p , q $(p \leq q)$ ist bekanntlich jeder gemeinsame Teiler von p und $q - p$ auch ein gemeinsamer Teiler von p und q. Durch die Anwendung von Schritt 2) können sich also die gemeinsamen Teiler der beiden Koordinaten des besetzten Punktes nicht ändern, insbesondere kann kein ungerader gemeinsamer Teiler hinzukommen.

Bei der Anwendung von Schritt 1) wird eine der Koordinaten mit 2 multipliziert, auch hierbei kann also nicht ein neuer gemeinsamer ungerader Teiler der Koordinaten hinzukommen.

Da somit bei keinem der beiden zulässigen Schritte ein gemeinsamer ungerader Teiler hinzukommt, ist in jeder erreichbaren Position $(x|y)$ der größte gemeinsame ungerade Teiler von x und y der gleiche wie in der Startposition $(1|1)$, also 1.

Erster Beweis zu b):

Es seien nun x und y zwei positive ganze Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen ungeraden Teiler haben. Es ist zu zeigen, daß der Spielstein unter Verwendung der Regeln 1) und 2) den Punkt $(x|y)$ erreichen kann. Da sich - ausgehend von einem Punkt $(a|b)$ - der Punkt $(2^m \cdot a|2^n \cdot b)$ durch $(n+m)$ - maliges Anwenden von Regel 1) erreichen läßt, darf oBdA angenommen werden, daß die Zahlen x und y nicht nur keinen gemeinsamen ungeraden Teiler außer 1 haben, sondern

auch beide nicht den Teiler 2 enthalten, also sogar teilerfremd sind.
Es wird nun durch Induktion über n die folgende Aussage bewiesen:
Sind x, y, n positive ganze Zahlen ($n \geq 2$) mit $x + y = n$, und sind x und y teilerfremd, dann kann der Spielstein auf der Position $(x|y)$ stehen.
Für $n=2$ ist diese Aussage offensichtlich wahr, da die einzige Möglichkeit $x=y=1$ ist und $(1|1)$ die Startposition des Spielsteins ist.
Es wird nun vorausgesetzt, daß n ($n \geq 3$) eine natürliche Zahl ist und die Aussage für alle kleineren positiven ganzen Zahlen gilt. Für die beiden teilerfremden positiven ganzen Zahlen x, y mit $x + y = n$ ist die Erreichbarkeit des Punktes $(x|y)$ zu zeigen.

Falls eine der Zahlen x, y gerade ist, setze man für den Fall, daß y gerade ist, $z := \frac{y}{2}$. Dann sind auch x und z teilerfremd, und wegen $x + z < x + y$ hat man $x + z \leq n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung kann man also den Punkt $(x|z)$, somit nach Regel 1) auch den Punkt $(x|2z)$, also $(x|y)$ erreichen. Falls x gerade ist, wird der Beweis analog geführt.

Sind aber x und y beide ungerade und $x < y$, dann ist $z := \frac{y+x}{2}$ ganz, und wegen der Teilerfremdheit von x und y sind auch die Zahlen x und x+y, also auch x und z teilerfremd. Wegen $x + z = x + \frac{y+x}{2} < x + y = n$, also $x + z \leq n - 1$ ist nach Induktionsvoraussetzung der Punkt $(x|z)$ erreichbar. Von hier aus ist aber mit Regel 1) auch der Punkt $(x|2z)$, also $(x|y + x)$ erreichbar, und von diesem Punkt gelangt man schließlich nach Regel 2) zu $(x|y)$. Im Falle $x > y$ führt man den Nachweis analog.

<u>Zweiter Beweis zu b):</u>
Wieder ist zu zeigen, daß für zwei beliebige positive ganze Zahlen x und y, die außer 1 keinen gemeinsamen ungeraden Teiler haben, der Spielstein unter Verwendung der Regeln 1) und 2) den Punkt $(x|y)$ erreichen kann.
Hierzu betrachte man die umgekehrte Zugrichtung, also zu gegebenem Punkt A nicht die Punkte X, zu denen man von A aus gelangen kann, sondern diejenigen Punkte X, von denen man zu A ziehen kann. Ein derartiger (Rück-)Zug von A nach X wird nachfolgend als β-Zug bezeichnet. Dann ist zu zeigen, daß man durch Nacheinanderausführen von β-Zügen vom Punkt $(x|y)$ zum Punkt $(1|1)$ gelangen kann.

Für alle von $(x|y)$ aus durch Nacheinanderausführen von β-Zügen erreichbaren Punkte $(p|q)$ betrachte man die Summe $p+q$ (aus $\mathbb{N}$). Da jede nicht-leere Menge aus natürlichen Zahlen ein Minimum hat, gibt es unter den betrachteten Punkten einen Punkt $(p_0|q_0)$, für den diese Summe minimal ist.
Wäre nun eine der beiden positiven ganzen Zahlen p_0, q_0 gerade, so wäre gemäß Regel 1 ein β-Zug auf das Feld $(\frac{p_0}{2}|q_0)$ bzw. auf das Feld $(p_0|\frac{q_0}{2})$ möglich, - im Widerspruch zur Minimalität der Koordinatensumme.
Sind dagegen beide Komponenten p_0, q_0 ungerade und verschieden, so kann man im Falle $p_0 > q_0$ mit Regel 2 durch einen β-Zug zu $(p_0 + q_0|q_0)$ und dann gemäß Regel 1 durch einen weiteren β-Zug zu $(\frac{p_0 + q_0}{2}|q_0)$ gelangen, - wieder im Widerspruch zur Minimalität der Koordinatensumme, denn $\frac{p_0 + q_0}{2} + q_0 < p_0 + q_0$.

Im Falle $p_0 < q_0$ verläuft der Nachweis analog.

Die Koordinaten p_0 und q_0 sind somit ungerade und gleich. Wie in Teil a) sieht man, daß bei β-Zügen kein von 1 verschiedener ungerader gemeinsamer Teiler der beiden Koordinaten hinzukommt. Da nach Voraussetzung x und y keinen derartigen Teiler haben, muß $p_0 = q_0 = 1$ gelten.

Man kann also durch eine Folge von β-Zügen von $(x|y)$ zu $(1|1)$ gelangen; das war zu zeigen.

Anmerkung

Bezeichnet man für $n \in \mathbb{N}$ mit E(n) die Anzahl der erreichbaren Gitterpunkte unter den n^2 Gitterpunkten $(x|y)$ mit $1 \le x \le n$, $1 \le y \le n$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E(n)}{n^2} = \frac{8}{\pi^2}$.
Für große Werte von n sind also rund 81% dieser Punkte erreichbar. Zur Illustration: $\frac{E(100)}{100^2} = 0{,}8155$, $\frac{8}{\pi^2} \approx 0{,}8105...$.

Aufgabe 2

Auf einer Strecke der Länge 1 sind endlich viele, paarweise disjunkte Teilstrekken gefärbt. Der Abstand zweier gefärbter Punkte beträgt nie genau $\frac{1}{10}$.

Man beweise, daß die Gesamtlänge der gefärbten Teilstrecken nicht größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Beweis

Man zerlege zunächst die gegebene Strecke in eine Folge von 5 Teilstrecken der Länge $\frac{1}{5}$ und betrachte eine beliebige dieser Teilstrecken. Ihre Endpunkte seien mit A und B, ihr Mittelpunkt mit M bezeichnet. Verschiebt man nun die Strecke AM punktweise um den Pfeil von B nach M, so hat kein gefärbter Punkt einen gefärbten Bildpunkt, da Urbild und Bild jeweils den Abstand $\frac{1}{10}$ haben, also nach Voraussetzung nicht beide gefärbt sein können. Alle gefärbten Teilstrecken von AB lassen sich also durch Verschieben überschneidungsfrei auf der Strecke MB unterbringen, die Gesamtlänge der gefärbten Teilstrecken von AB ist mithin nicht größer als $\frac{1}{10}$.
Somit ist die Gesamtlänge aller gefärbten Teilstrecken nicht größer als $\frac{1}{2}$.

Algebraische Fassung des Beweises

Nach Voraussetzung wird auf dem Zahlenstrahl das abgeschlossene Intervall $[0\,,1]$ durch Färben von Punkten in endlich viele (abgeschlossene) Intervalle mit gefärbten Punkten und in endlich viele (offene oder halboffene) Intervalle mit ungefärbten Punkten zerlegt.

Die Definition $T_i := [\frac{i}{10}\,, \frac{i+1}{10}]$ für $i = 0, 1, 2, ..., 9$ liefert eine Zerlegung des Intervalls $[0\,,1]$ in 10 Teilintervalle der Länge $\frac{1}{10}$.

Für alle Indizes i von 0 bis 8 gilt: Ist x ein gefärbter Punkt in T_i, dann ist der (in T_{i+1} liegende) Punkt $x + \frac{1}{10}$ nicht gefärbt.

Die Summe der Längen der gefärbten Intervalle in T_i sei mit f_i bezeichnet. Dann gilt für die Summe $\frac{1}{10} - f_{i+1}$ der Längen der Intervalle aus ungefärbten Punkten in T_{i+1} die Ungleichung

$$f_i \le \frac{1}{10} - f_{i+1}, \text{ also } f_i + f_{i+1} \le \frac{1}{10} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \ldots, 8.$$

Bezeichnet man die Gesamtlänge aller gefärbten Teilstrecken mit f, erhält man daher

$$\begin{aligned} f = \sum_{i=0}^{9} f_i &= (f_0 + f_1) + (f_2 + f_3) + (f_4 + f_5) + (f_6 + f_7) + (f_8 + f_9) \\ &\le 5 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Gesamtlänge aller gefärbten Teilstrecken ist somit nicht größer als $\frac{1}{2}$, was zu zeigen war.

Verallgemeinerung und Verschärfung

Man sieht, daß in Voraussetzung (bei $\frac{1}{2 \cdot 5}$) und Beweis die Zahl 5 durch eine beliebige andere positive ganze Zahl n ersetzt werden kann; von den gefärbten Teilstrecken wird also vorausgesetzt, daß nie zwei ihrer Punkte die Entfernung $\frac{1}{2n}$ haben. Es gilt daher allgemeiner der Satz:

> Ist n eine positive ganze Zahl und sind auf einer Strecke der Länge 1 endlich viele paarweise disjunkte Teilstrecken so gefärbt, daß der Abstand zweier gefärbter Punkte nie genau $\frac{1}{2n}$ beträgt, dann kann die Gesamtlänge aller gefärbten Teilstrecken nicht größer als $\frac{1}{2}$ sein.

Schärfer als diese naheliegende Verallgemeinerung gilt aber sogar die folgende Äquivalenzbeziehung:

> Es sei d eine positive Zahl ($d<1$). Auf einer Strecke der Länge 1 seien endlich viele paarweise disjunkte Teilstrecken so gefärbt, daß der Abstand zweier gefärbter Punkte nie genau d beträgt. Dann ist die Gesamtlänge aller gefärbten Teilstrecken genau dann nicht größer als $\frac{1}{2}$, wenn d eine Darstellung der Form $d = \frac{1}{2n}$ zuläßt, wobei n eine positive ganze Zahl ist.

Zu beweisen ist hierzu nur noch:

Ist der Kehrwert von 2d keine natürliche Zahl, dann gibt es ein System von endlich vielen, paarweise disjunkten Teilstrecken der Einheitsstrecke mit folgenden Eigenschaften: Innerhalb der Punkte der Vereinigung dieser Teilstrecken wird die Entfernung d nicht realisiert, und die Gesamtlänge der Teilstrecken des Systems ist größer als $\frac{1}{2}$.

Durch die Ungleichungskette $n - 1 < \frac{1}{2d} < n$ wird eindeutig eine natürliche Zahl n festgelegt.

Da man für $n=1$, also $d > \frac{1}{2}$ mit der Färbung einer einzelnen Teilstrecke der Länge $\frac{1}{2} \cdot (d+\frac{1}{2})$ innerhalb der Einheitsstrecke wegen $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \cdot (d+\frac{1}{2}) < d$ sofort ein System der verlangten Art gefunden hat, genügt die Betrachtung des Falles $n \ge 2$.

Für $d_0 := \frac{1}{2n}$, $d_1 := \frac{1}{2n-2}$ gilt dann

$$0 < d_0 < d < d_1, \qquad n \cdot d_0 = (n-1) \cdot d_1 = \frac{1}{2}, \text{ also } n \cdot d_0 + (n-1) \cdot d_1 = 1.$$

Man kann daher, an einem Endpunkt der Einheitsstrecke beginnend und am anderen endend, n disjunkte Teilstrecken der Länge d_0 (< d) so wählen, daß jede der $n-1$ Lücken zwischen ihnen die Länge d_1 (> d) hat. Die ausgewählten Teilstrecken haben dann die Gesamtlänge $\frac{1}{2}$ und je zwei Punkte dieser Teilstrecken sind nach Konstruktion entweder höchstens d_0, also weniger als d, oder mindestens d_1, also mehr als d voneinander entfernt.

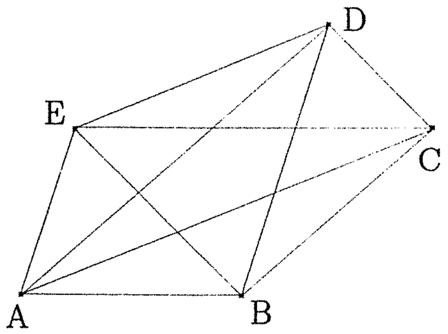
Wählt man nun die positive Zahl ε kleiner als das Minimum von $d - d_0$ und $d_1 - d$ und verlängert die erste Teilstrecke der Einheitsstrecke um ε, so haben auch die hinzugekommenen Punkte von den Punkten der ersten Teilstrecke eine Entfernung < d, von den Punkten der anderen Teilstrecken des Systems eine Entfernung > d. Die Gesamtlänge der ausgewählten Teilstrecken ist aber nun $\frac{1}{2} + \varepsilon$, also größer als $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3

Jede Diagonale eines konvexen Fünfecks sei parallel zu einer Seite.
Man beweise, daß das Verhältnis einer Diagonale zur entsprechenden Seite in allen fünf Fällen den gleichen Wert hat, und berechne diesen Wert.

Lösung (Vorbemerkung)

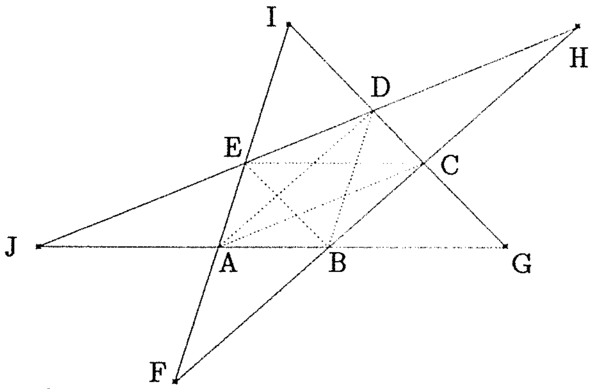
Die Ecken des Fünfecks seien mit A, B, C, D, E bezeichnet. In den folgenden Beweisen wird gezeigt, daß jede Diagonale zu der zu ihr parallelen Seite das Längenverhältnis $\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{5})$ hat. Dieses Verhältnis, bekannt als *Goldener Schnitt*, ergibt sich (bekanntlich) als positive Lösung der Gleichung $x^2 = x + 1$.



Da die Wahl der Ecke A beliebig ist, genügt zur Lösung der Aufgabe also der Nachweis, daß das Verhältnis $\overline{EC} : \overline{AB} := x$ die Gleichung $x^2 = x + 1$ erfüllt.

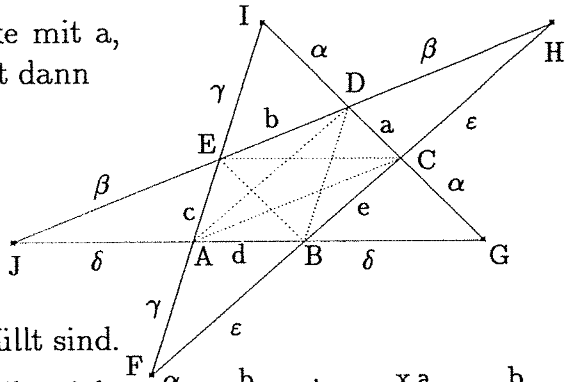
Erster Beweis

Da z. B. der Punkt C in der einen Halbebene von (BD) liegt und EA in der anderen Halbebene parallel zu BD verläuft, schneiden sich (BC) und (EA) in einem Punkte F, der nicht in der gleichen Halbebene von (AB) wie das Fünfeck liegt.



In entsprechender Weise werden die anderen Punkte der links skizzierten sternförmigen Figur als Schnittpunkte von Fünfeckseiten erhalten.

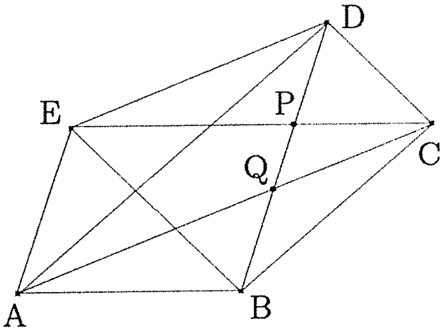
Da die Vierecke DIEB und GCEB Parallelogramme sind, haben die Seiten DI und CG die gleiche Länge; diese sei mit α bezeichnet. Entsprechendes gilt für die anderen Seiten des Sterns; die Streckenlängen werden hier - gemäß Skizze - β, γ, δ, ε genannt. Schließlich bezeichnet man die Seitenlängen des Fünfecks jeweils



entsprechend der gegenüberliegenden Ecke mit a, b, c, d, e. Nach dem ersten Strahlensatz gilt dann
$\frac{\alpha}{a} = \frac{\gamma}{c} = \frac{\varepsilon}{e} = \frac{\beta}{b} = \frac{\delta}{d}$.
Für alle Seiten des Fünfecks ergibt sich also als Verhältnis von Diagonale zu paralleler Seite der gleiche Wert x, so daß die folgenden Gleichungen
$\alpha = x{\cdot}a$, $\beta = x{\cdot}b$, $\gamma = x{\cdot}c$, $\delta = x{\cdot}d$, $\varepsilon = x{\cdot}e$ erfüllt sind.
Aus dem 2. Strahlensatz (Zentrum I) ergibt sich $\frac{\alpha}{\alpha+a} = \frac{b}{\beta}$, also $\frac{x\,a}{x\,a+a} = \frac{b}{x\,b}$.
Man erhält $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x}$, also $x^2 = x + 1$; was nach der Vorbemerkung genügt.

Zweiter Beweis

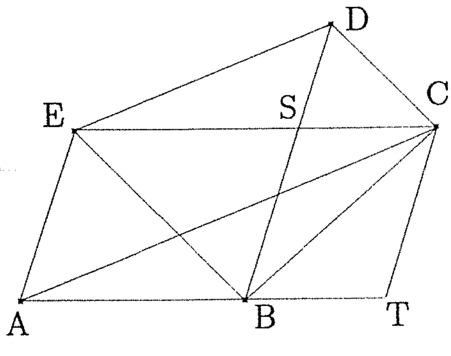
Der Schnittpunkt der Diagonalen EC und BD sei mit P bezeichnet. Nach dem ersten Strahlensatz ist dann $\overline{PE}{:}\overline{PC} = \overline{PB}{:}\overline{PD}$. Da P ein beliebiger Diagonalenschnittpunkt innerhalb des Fünfecks ist, folgt allgemeiner: Der Schnittpunkt von zwei Diagonalen, die nicht durch einen gemeinsamen Eckpunkt gehen, teilt beide Diagonalen im gleichen Verhältnis. Bezeichnet man mit Q den Schnittpunkt der



Diagonalen AC und BD, gilt also z. B. auch $\overline{QA} : \overline{QC} = \overline{QD} : \overline{QB}$. Wiederum nach dem ersten Strahlensatz ergibt sich $\overline{PE}{:}\overline{CP} = \overline{QA}{:}\overline{CQ}$. Die Diagonale BD wird also von Q im gleichen Verhältnis geteilt wie EC von P; zyklisches Weitergehen zeigt, daß alle Diagonalen von den Diagonalenschnittpunkten jeweils im gleichen allen gemeinsamen Verhältnis geteilt werden.
Nach dem zweiten Strahlensatz ist z. B. $\overline{EB}{:}\overline{CD} = \overline{PE}{:}\overline{PC}$. Jede Diagonale steht also ebenfalls zu der parallelen Seite im gleichen Verhältnis wie oben betrachtet. Der Verhältnisfaktor - er sei mit x bezeichnet - wird nachfolgend berechnet.
Da Viereck ABPE ein Parallelogramm ist, ist $\overline{EP} = \overline{AB} =: d$; die Länge des Diagonalenabschnitts PC sei mit p bezeichnet. Da nach der obigen Überlegung die Verhältnisgleichung $\overline{EC} : \overline{AB} = \overline{EP} : \overline{PC} = x$ gilt, hat man $(d + p) : d = d : p = x$.
Folglich ist $d = px$ und somit $(px + p) : px = x$, also $x + 1 = x^2$.
Gemäß der Vorbemerkung ist damit der Beweis geführt.

Dritter Beweis

Mit S sei der Schnittpunkt der Diagonalen EC und BD bezeichnet, T sei der Schnittpunkt von (AB) mit der Parallelen zu AE durch C. Aufgrund der Konvexität des Fünfecks liegt S innerhalb und T außerhalb des Fünfecks.

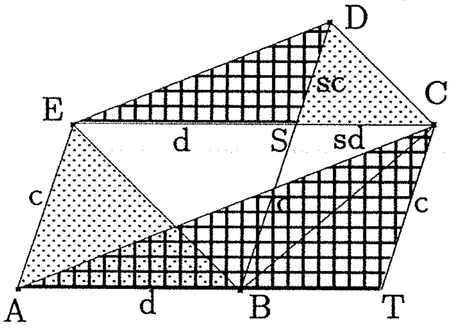


Die Länge der Seite AB sei mit d, die Länge der Seite AE sei mit c bezeichnet.
Aus der Parallelität der Seiten folgt, daß die Dreiecke SCD und ABE ähnlich sind. Setzt man $s := \frac{\overline{SC}}{\overline{AB}}$, hat man daher $\overline{SC} = s{\cdot}d$, $\overline{SD} = s{\cdot}c$.

Da die Vierecke ABSE, ATCE, BTCS Parallelogramme sind, gilt $\overline{SE} = d$, $\overline{TC} = c$, $\overline{BT} = s{\cdot}d$.

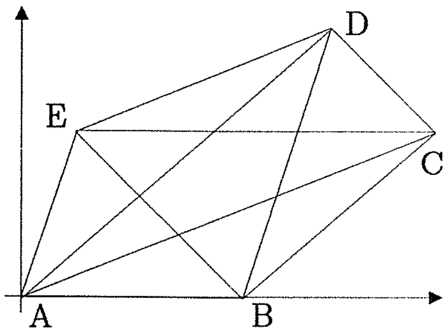
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ESD und ATC folgt $\overline{SD} : \overline{TC} = \overline{SE} : \overline{TA}$, also $sc : c = d : (d{+}sd)$, also $s{\cdot}(1{+}s) = 1$. Daraus folgt $s^2 + s - 1 = 0$, woraus sich wegen der Positivität von s ergibt: $s = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5} - 1)$.

Also ist $\overline{EC} = d{\cdot}(1{+}s) = d \cdot \frac{1}{2}\cdot(1{+}\sqrt{5}\,)$ und somit $\overline{EC} : \overline{AB} = \frac{1}{2}\cdot(1{+}\sqrt{5}\,)$, was gemäß Vorbemerkung zu zeigen war.



Vierter Beweis (vektoriell)

Man lege das Fünfeck ABCDE so in ein ebenes kartesisches Koordinatensystem, daß A im Ursprung und B auf der waagerechten Achse liegt. Die Ortsvektoren der Ecken des Fünfecks seien gemäß den Eckpunkten bezeichnet, insbesondere ist dann $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$; die Vektoren $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ sind paarweise linear unabhängig.



Nach Voraussetzung sind die fünf Vektorpaare $\mathfrak{b}$ und $(\mathfrak{c} - \mathfrak{e})$, $(\mathfrak{c} - \mathfrak{b})$ und $\mathfrak{d}$, $(\mathfrak{d} - \mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{e} - \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{d} - \mathfrak{e})$ und $\mathfrak{c}$ sowie $\mathfrak{e}$ und $(\mathfrak{d} - \mathfrak{b})$ jeweils linear abhängig. Für geeignete reelle Zahlen p, q, r, s, t sind also die folgenden fünf Gleichungen erfüllt:

(1) $\mathfrak{b} = p \cdot (\mathfrak{c} - \mathfrak{e})$, (2) $\mathfrak{c} - \mathfrak{b} = q \cdot \mathfrak{d}$,
(3) $\mathfrak{d} - \mathfrak{c} = r \cdot (\mathfrak{e} - \mathfrak{b})$, (4) $\mathfrak{d} - \mathfrak{e} = s \cdot \mathfrak{c}$,
(5) $\mathfrak{e} = t \cdot (\mathfrak{d} - \mathfrak{b})$.

Die Koeffizienten p, q, r, s, t geben hierbei gleichzeitig das Verhältnis der entsprechenden Seite zu der zu ihr parallelen Diagonale an.

Aus (2) folgt $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + q \cdot \mathfrak{d}$; setzt man diese Darstellung für $\mathfrak{c}$ und die in (5) erhaltene Darstellung von $\mathfrak{e}$ in (1) ein, so gelangt man zu der Gleichung

$\mathfrak{b} = p \cdot (\ \mathfrak{b} + q \cdot \mathfrak{d}\ -\ t \cdot (\mathfrak{d} - \mathfrak{b})\ )$, also zu

(*) $(p - 1 + pt){\cdot}\mathfrak{b} + p \cdot (q - t){\cdot}\mathfrak{d} = \mathfrak{o}$.

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ sind die Koeffizienten in der Gleichung (*) null; insbesondere ist $q = t$. Da die Zahlen p, q, r, s, t als Längenverhältnisse in der Figur unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems und symmetrisch definiert sind, ergibt sich aus $q = t$ durch zyklisches Weitergehen nacheinander $t = r$, $r = p$, $p = s$, $s = q$; daher haben alle Koeffizienten p, q, r, s, t den gleichen Wert t.

Weiter folgt aus (*) dann: $t^2 + t - 1 = 0$, also (wegen $t > 0$) : $t = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5} - 1)$. Das Verhältnis jeder Seite zur parallelen Diagonale hat also den Wert $\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5} - 1)$, das Verhältnis jeder Diagonalen zur parallelen Seite berechnet sich somit zu $\frac{1}{t} = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5} + 1)$.

Vorbemerkung zum fünften Beweis

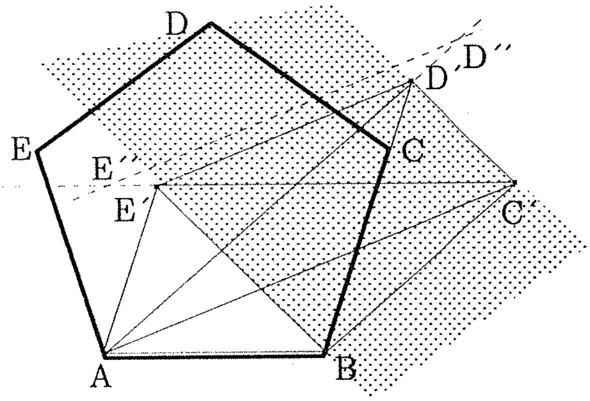
Aufgrund seiner Symmetrieeigenschaften ist jedes regelmäßige Fünfeck ein Fünfeck der in der Aufgabe betrachteten Art. Da bei einer affinen Abbildung Parallelität erhalten bleibt, erfüllt auch jedes affine Bild eines regelmäßigen Fünfecks die im Beweis benutzen Voraussetzungen.

Bemerkenswert ist, daß jedes konvexe Fünfeck $A'B'C'D'E'$, bei dem jede Diagonale parallel zu einer Seite ist, als affines Bild eines beliebigen regulären Fünfecks ABCDE erhalten werden kann. Denn nach dem Hauptsatz der affinen Geometrie gibt es (genau) eine affine Transformation der Ebene, bei der (A,B,C) in (A',B',C') übergeht; der Nachweis, daß D' und E' die Bilder von D und E sind, ergibt sich dann unter Benutzung der Verhältnisinvarianz bei affinen Abbildungen und der Aussage von Aufgabe 3.

Insofern stellt diese Überlegung noch keine mögliche Alternativlösung dar. Der angegebene Nachweis läßt sich aber auch ohne Verwendung der Teilergebnisses von Aufgabe 3 führen und führt zum folgenden Beweis:

Fünfter Beweis (skizziert)

Vorgegeben sei ein Fünfeck $ABCD'E'$ mit den in der Aufgabe vorausgesetzten Eigenschaften sowie das reguläre Fünfeck ABCDE - beide im positiven Umlaufsinn bezeichnet.



Nach dem Hauptsatz der affinen Geometrie gibt es (genau) eine affine Transformation der Ebene, bei der (A,B,C) in (A,B,C') übergeht; die Bildpunkte von D und E seien mit D'' bzw. E'' bezeichnet. Zu zeigen ist nun, daß D' und E' die Bilder von D und E sind; die Behauptung der Aufgabe ergibt sich dann aus den bekannten Eigenschaften des regulären Fünfecks und der Verhältnisinvarianz bei affinen Abbildungen.

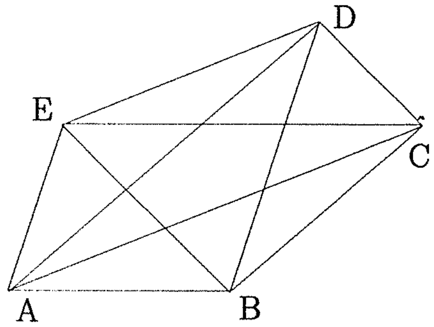
D'' und E'' liegen auf einer Parallelen p zu (AC') und somit auf einer Parallelen zu $(E'D')$. D'' liegt auf (AD'), E'' liegt auf $(C'E')$.

Läge nun $(E''D'')$ außerhalb von $(D'E')$, so lägen D'' und E'' außerhalb des von den Parallelen (BE') und $(C'D')$ gebildeten Streifens: $(C'D'')$ und (BE'') könnten somit nicht parallel sein. Der entsprechende Widerspruch ergibt sich bei Ersetzen von „außerhalb“ durch „innerhalb“. Also ist $D' = D''$ und $E' = E''$.

Bemerkungen

1. Um alle in Frage kommenden Fünfecke konstruktiv zu erhalten, wähle man ein beliebiges Parallelogramm ABPE (vgl. Bezeichnungen und Skizze im zweiten Beweis). C ist dann der Punkt auf der Halbgeraden von E aus durch P, für den das Streckenverhältnis $\overline{EP} : \overline{PC}$ den Wert $\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{5}\,)$ hat. Entsprechend erhält man D als Punkt auf dem Strahl von B durch P.

2. Die Forderung, daß alle fünf Seiten parallel zu den entsprechenden Diagona
Denn setzt man für alle Seiten außer EA Parallelität zur entsprechenden Diagonale voraus, so folgt aus der Parallelität von (AB) und (EC) die Flächengleichheit der Dreiecke ABE und ABC. Zyklisches Weitergehen liefert entsprechend $|BCA| = |BCD|$, $|CDB| = |CDE|$, $|DEC| = |DEA|$; aufgrund der Transitivität der Gleichheitsbeziehung folgt hieraus $|EAD| = |EAB|$. Die Dreiecke EAD und EAB



haben also neben der gemeinsamen Grundseite EA auch die gleiche Höhe, daher verläuft die Gerade durch B und D parallel zur Seite EA.

Aufgabe 4

Man beweise, daß jede natürliche Zahl k (k>1) ein Vielfaches besitzt, das kleiner als k^4 ist und im Zehnersystem mit höchstens vier verschiedenen Ziffern geschrieben wird.

Lösung

Zu der gegebenen Zahl k gibt es eine eindeutig bestimmte positive ganze Zahl n, für welche $2^{n-1} \leq k < 2^n$ gilt. Für $n \leq 6$ ist die Behauptung der Aufgabe offensichtlich richtig, da die Dezimaldarstellung von k wegen $k \leq 2^6$ höchstens zwei verschiedene Ziffern hat. Nachfolgend darf also $n > 6$ vorausgesetzt werden.

Mit M sei die Menge aller nicht-negativen ganzen Zahlen bezeichnet, in deren Dezimaldarstellung nur die Ziffern 0 und 1 vorkommen und die in dieser Darstellung höchstens n Stellen haben. Da diese Zahlen dadurch erzeugt werden können, daß man jede von n Stellen mit einer der beiden Möglichkeiten 0 bzw. 1 versieht, enthält die Menge M genau 2^n Elemente.

Da nach Wahl von n somit die Anzahl der Elemente von M größer als k ist, gibt es in M mindestens zwei Elemente, die bei Division durch k den gleichen der k möglichen Reste $0, 1, 2, ..., k-1$ lassen, deren Differenz also durch k teilbar ist. Zwei derartige Zahlen seien mit a und b bezeichnet, wobei o.B.d.A. $a < b$ sei.

In der Dezimaldarstellung von $b - a$ können höchstens die vier Ziffern 0, 1, 8, 9 auftreten, denn bei der schriftlichen Subtraktion gibt es ja nur die vier Differenzen $0 - 0$, $1 - 0$, $1 - 1$, $10 - 1$ und $10 - 1 - 1$ („geborgt").

Es ist nun zum Abschluß des Beweises nur noch zu zeigen, daß die durch k teilbare Zahl $b - a$ kleiner als k^4 ist. Bezeichnet man mit m die größte Zahl in der Menge M (also die Zahl mit einer Dezimaldarstellung aus n Einsen), dann hat man

$$b - a \leq b \leq m = \sum_{i=0}^{n-1} 10^i = \frac{10^n - 1}{9} < 10^n = 10 \cdot 10^{n-1}$$

und daher wegen $1{,}6^{n-1} > 1{,}6^5 = 10{,}48... > 10$ weiter

$$10 \cdot 10^{n-1} < 1{,}6^{n-1} \cdot 10^{n-1} = 16^{n-1} = (2^{n-1})^4 \leq k^4 .$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.