BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
53144 Bonn

Aufgaben und Lösungen 1995
1. Runde

Stand 22. Mai 95

Aufgabe 1

Ein Spiel startet mit zwei Haufen von p bzw. q Steinen. Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muß einen Haufen wegnehmen und den anderen in zwei Haufen zerlegen. Verloren hat, wer als erster keinen vollständigen Zug mehr ausführen kann.
Bei welchen Werten von p und q kann A den Gewinn erzwingen, bei welchen nicht ?

Lösung

Der Spieler A kann genau dann den Gewinn erzwingen, wenn wenigstens eine der beiden Zahlen p, q gerade ist, wie nachfolgend bewiesen wird.

Ein Haufen heiße *gerade*, wenn er aus einer geraden Anzahl von Steinen besteht, sonst *ungerade*. Weiterhin heiße eine Spielstellung *ausgezeichnet*, wenn mindestens einer der beiden Spielsteinhaufen auf dem Tisch gerade ist. Dann gilt folgendes:

(1) Ist die vorliegende Stellung ausgezeichnet, kann der Spieler, der am Zug ist, daraus stets eine nicht ausgezeichnete Stellung machen. Er braucht nur einen geraden Haufen - den gibt es ja bei einer ausgezeichneten Stellung - auf dem Tisch liegen zu lassen und den anderen Haufen wegzunehmen. Danach zerlegt er den zurückbleibenden geraden Haufen in zwei ungerade Haufen, z. B. bestehend aus 1 bzw. n-1 Steinen, wenn der gerade Haufen aus n Steinen bestand.
Insbesondere ist es bei einer ausgezeichneten Stellung also stets möglich, das Spiel fortzusetzen.

(2) Ist die vorliegende Stellung nicht ausgezeichnet, bleibt nach Entfernen eines der beiden Haufen ein ungerader Haufen auf dem Tisch liegen. Falls dieser noch zerlegt werden kann, also nicht aus nur einem Stein besteht, ergibt die Zerlegung einen geraden und einen ungeraden Haufen, führt also zu einer ausgezeichneten Stellung, da eine ungerade Zahl sich nur als Summe von ganzzahligen Summanden verschiedener Parität erhalten läßt.

Der Spieler, der in einer ausgezeichneten Stellung am Zug ist, kann also stets ziehen und hat beim Spiel nach (1) beim nächsten Mal wieder eine ausgezeichnete Stellung vor sich, kann also nicht verlieren. Da bei jedem Zug die endliche Gesamtanzahl der Steine auf dem Tisch abnimmt und zum Teilen eines Haufens dieser aus mindestens zwei Steinen bestehen muß, endet das Spiel damit, daß einer der Spieler nicht mehr ziehen kann.

Ist daher eine der beiden Zahlen p, q gerade, startet A mit einer ausgezeichneten Stellung und gewinnt beim Spielen nach obiger Strategie. Sind dagegen p und q beide ungerade, muß A, falls er überhaupt ziehen kann, für B eine ausgezeichnete Stellung erzeugen, mithin gewinnt dann B, wenn er obiger Strategie folgt.

Aufgabe 2

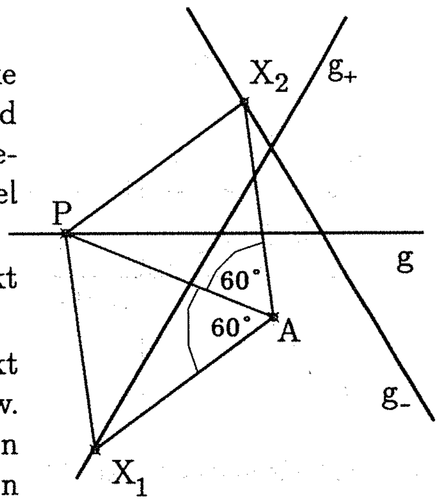
In der Ebene liegen eine Gerade g und ein Punkt A außerhalb von g. Der Punkt P durchlaufe die Gerade g.

Man bestimme die Menge aller Punkte X der Ebene, die zusammen mit A und P die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Ergebnis

Die gesuchte Punktmenge besteht aus den Punkten zweier Geraden, nämlich den Bildern g_+ und g_-, die aus g durch eine 60°-Drehung bzw. eine 300°-Drehung um A hervorgehen. Dies sind offensichtlich die beiden Geraden, die durch den zu A bezüglich g spiegelbildlich liegenden Punkt verlaufen und mit g jeweils Winkel von 60° bzw. 120° einschließen.

Erster Beweis



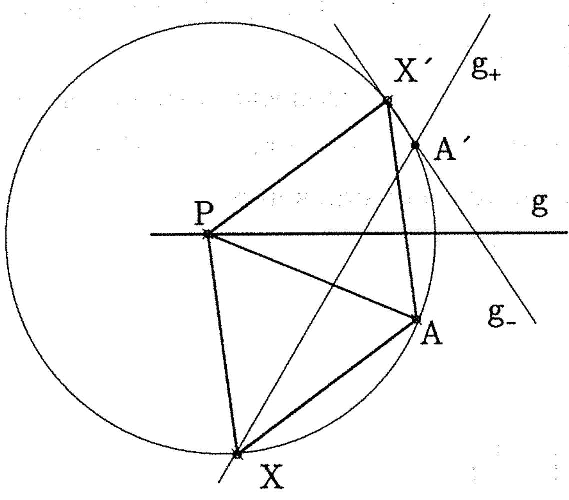
Für jeden Punkt P auf g lassen sich über der Strecke AP genau zwei gleichseitige Dreiecke APX_1 und AX_2P errichten. Ihre Seiten AX_1 und AX_2 entstehen durch Drehung von AP um A mit Drehwinkel 60° bzw. 300° (= 360° - 60°).

Jeder gemäß der Aufgabenstellung erhaltene Punkt X liegt also auf g_+ oder auf g_-.

Umgekehrt wird jeder auf g_+ oder g_- liegende Punkt X als Ecke im gleichseitigen Dreieck AXP bzw. APX erhalten: Man wähle hierzu als P denjenigen Punkt, den die -60°-Drehung bzw. 60°-Drehung von X um A liefert und der nach Konstruktion von g_+ und g_- auf g liegt.

Zweiter Beweis (nach einem Ansatz von P. Busley)

Zu gegebenem A, g und P auf g sei der Punkt X so gewählt, daß das Dreieck APX gleichseitig ist; X´ gibt die zweite mögliche Lage von X an. Ferner entstehe A´ durch Spiegelung von A an g. Nach Konstruktion ist dann $\overline{AP} = \overline{A'P} = \overline{XP}$. Somit liegen die Punkte A, A´, X alle auf dem Kreis um P mit Radius $\overline{AP}$, außerdem hat der zur Sehne AX gehörende Mittelpunktswinkel die Weite 60°.



Nach dem Umfangswinkelsatz gilt nun eine der drei folgenden Aussagen:

(1) X = A,

(2) Winkel AA´X hat die Weite 30°.

(3) Winkel AA´X hat die Weite 180° – 30°, also 150°.

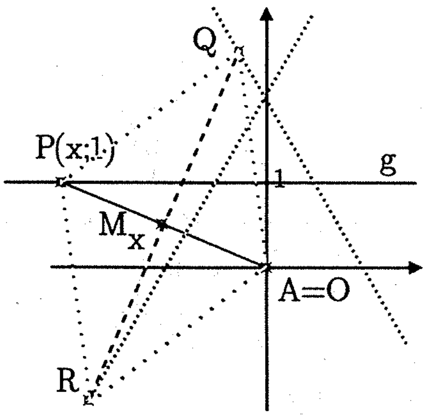
In jedem Fall liegt X auf einer der beiden Geraden g_+ und g_-, die durch A´gehen und und mit (AA´) einen Winkel von 30° bzw. 150° bilden.

Umgekehrt ist nun nachzuweisen, daß es zu jedem Punkt X auf diesen beiden Geraden einen Punkt P_X gibt, so daß Dreieck AP_XX gleichseitig ist. Hierzu betrachte man (aus Symmetriegründen oBdA) z. B. einen Punkt X auf g_+.

Ist X = A´, dann ist g die Mittelsenkrechte zu XA, auf der sogar zwei Punkte mit der verlangten Eigenschaft liegen.

Ist X verschieden von A´, ist P_X der Schnittpunkt von g mit der Mittelsenkrechten von AX; dieser Schnittpunkt existiert, da (AX) nicht parallel zu g ist. Auf dem Kreis um P_X durch A liegen dann auch A´ und X, und da der Winkel AA´X die Weite 30° oder 150° hat, beträgt die Weite des zu diesem Umfangswinkel gehörenden Mittelpunktswinkels 60°. Dreieck AP_XX ist also nicht nur gleichschenklig, sondern sogar gleichseitig, wie zu zeigen war.

<u>Dritter Beweis</u> (mit analytischer Geometrie)



Ein kartesisches Koordinatensystem sei so über die Ebene gelegt, daß A im Ursprung O liegt und g parallel zur x-Achse durch den Punkt mit den Koordinaten (0;1) läuft. Jedem Punkt von g ist dann umkehrbar eindeutig ein Koordinatenpaar (x; 1) mit $x \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Der (für fest gewähltes x) zum Mittelpunkt der Strecke AP (= OP) gehörende Vektor hat die Komponenten $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}$; ein hierzu orthogonaler Vektor ist $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$.

Die Mittelsenkrechte zu AP hat also die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix};$$

hierbei wurde der Richtungsvektor normiert, so daß der Betrag des Parameters t die Entfernung angibt, die der Punkt mit Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von M_X hat.

Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a hat die Höhe $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$, wie unmittelbar mit dem Satz des Pythagoras zu bestätigen ist.

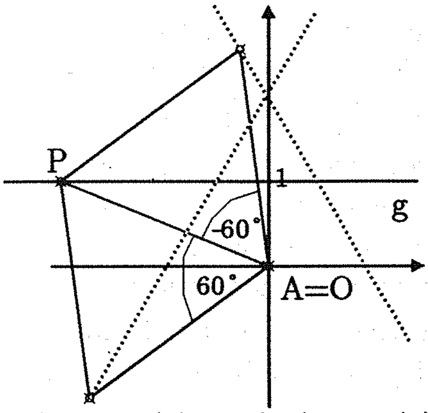
Die Scheitel Q, R der über AP errichteten gleichseitigen Dreiecke werden also in der Parameterdarstellung $\mathfrak{x}$ für die Parameter $t = \frac{\overline{AP}}{2} \cdot \sqrt{3}$ und $t = -\frac{\overline{AP}}{2} \cdot \sqrt{3}$ erhalten. Die Ortsvektoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ dieser Scheitelpunkte sind somit

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Für x als Parameter liefern $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ die Parameterdarstellungen von zwei Geraden, die - wie am Richtungsvektor ablesbar - die Steigungen $\sqrt{3}$ bzw. $-\sqrt{3}$ haben und durch den Punkt mit den Koordinaten (0; 2) gehen, wie sich durch Einsetzen des Parameters $x = -\sqrt{3}$ bzw. $x = \sqrt{3}$ ergibt.
Die Menge M besteht also aus Punkten der beiden Geraden. Dabei gehören zu M sogar alle Punkte dieser beiden Geraden, denn zu jedem Punkt Q bzw. R dieser Menge gehört eindeutig ein Parameter x und hierzu wiederum eindeutig der Punkt P=(x; 1), von dem man entsprechend der Aufgabenstellung zu Q bzw. R gelangt.

Vierter Beweis (mit analytischer Geometrie)
Ein kartesisches Koordinatensystem sei so über die Ebene gelegt, daß A im Ursprung O liegt und g parallel zur x-Achse durch den Punkt mit den Koordinaten (0;1) läuft. Jedem Punkt von g ist dann umkehrbar eindeutig ein Koordinatenpaar (x; 1) mit $x \in \mathbb{R}$ zugeordnet.



Aus der analytischen Geometrie, linearen Algebra oder Rechnung mit komplexen Zahlen ist folgendes bekannt: Eine Drehung mit Zentrum O und Winkelmaß α führt den Punkt mit den Koordinaten (x;y) in den Punkt mit den Koordinaten $\left(x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha);\ -x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)\right)$ über.
Wegen $\sin(60^\circ)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ und $\cos(60^\circ)=\frac{1}{2}$ sowie $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$ haben daher die beiden gemäß Aufgabenstellung zu (x;1) zu betrachtenden Punkte die Koordinaten $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3};-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}x+\frac{1}{2})$ bzw. $(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3};\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}x+\frac{1}{2})$.
Man substituiert nun für den ersten Fall $t := \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$, also $x = 2t-\sqrt{3}$, und für den zweiten Fall $t := \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$, also $x = 2t+\sqrt{3}$.

Wegen $\quad -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}x+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(2t-\sqrt{3})+\frac{1}{2} = -\sqrt{3}\cdot t+2$

und $\quad \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}x+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(2t+\sqrt{3})+\frac{1}{2} = \sqrt{3}\cdot t+2$

erhalten die Koordinaten der beiden betrachteten Punkte die Form $(t; -\sqrt{3}\cdot t+2)$ und $(t; \sqrt{3}\cdot t+2)$.

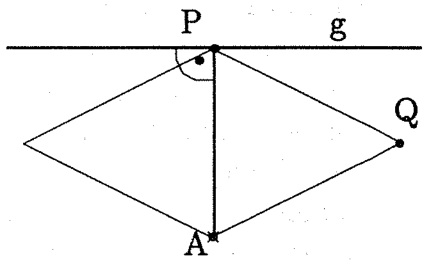
Jeder in Befolgung der Aufgabenstellung zu betrachtende Punkt X liegt also auf einer der beiden Geraden mit den Gleichungen $s = -\sqrt{3}\cdot t+2$ bzw. $s = \sqrt{3}\cdot t+2$, also auf einer der beiden Geraden, die mit der Steigung $-\sqrt{3}$ bzw. $\sqrt{3}$ durch den Punkt mit den Koordinaten (0;2) verlaufen.
Die Menge M besteht hierbei aus allen Punkten der beiden Geraden, denn zu jedem Punkt Q dieser Menge gehört eindeutig ein Parameter t und hierzu wiederum eindeutig eine Koordinate x ($= 2t-\sqrt{3}$ bzw. $= 2t+\sqrt{3}$), für die man gemäß Aufgabenstellung vom Punkte $P=(x;1)$ zu Q gelangt.

Der nachfolgende Beweis läßt die Lösung der Aufgabe als Sonderfall zu einem allgemeineren abbildungsgeometrischen Beweis erkennen:

Fünfter Beweis

Zunächst wird ein Hilfssatz formuliert: Es seien A, P, Q Punkte der Ebene, M eine Menge von Drehstreckungen mit dem Zentrum A. Für jeden Punkt X der Ebene sei mit M(X) die Menge aller Bilder bezeichnet, die durch Anwendung eines Elements von M auf X entstehen, also $M(X) := \{ \Phi(X) \mid \Phi \in M \}$. Dann sind die Figuren M(P) und M(Q) ähnlich.

Zum Beweis betrachte man die Drehstreckung Φ_0 mit Zentrum A, welche P auf Q abbildet. Dann ist $\Phi_0(M(P)) = M(Q)$. Denn liegt X in M(P), läßt sich also als $\Phi(P)$ mit $\Phi \in M$ darstellen, dann ist $\Phi_0(\Phi(P)) = \Phi(\Phi_0(P)) = \Phi(Q) \in M(Q)$. Hierbei wird benutzt, daß die Verkettung von Drehstreckungen mit gleichem Zentrum kommutativ ist. Die Umkehrbarkeit der Überlegung zeigt, daß alle Punkte von M(Q) hierbei als Bildpunkte erfaßt werden; M(P) geht also durch die Drehstreckung Φ_0 in M(Q) über; insbesondere sind die beiden Figuren ähnlich.



Nun wird dieser Hilfssatz auf die gestellte Aufgabe angewendet: Von A fälle man das Lot auf g und nenne den Fußpunkt P. Über der Strecke AP zeichne man ein gleichseitiges Dreieck PAQ.

Durch jeden Punkt X auf g wird eine Drehstreckung Φ_X mit Zentrum A festgelegt, die P in X überführt. Diese Drehstreckung wende man auf Q an. Nach dem Hilfssatz bildet dann die Menge aller Bildpunkte von Q bei Durchlaufen von g durch X eine zu g ähnliche Figur, also eine Gerade h_1. Diese geht durch diejenige Drehstreckung mit dem Zentrum A aus g hervor, die P in Q überführt, entsteht also durch $-60°$-Drehung von g um A.

Betrachtet man entsprechend das zu AQP spiegelbildliche Dreieck ARP und konstruiert wie oben, so erhält man eine zweite Gerade; diese - sie sei mit h_2 bezeichnet - entsteht durch $60°$-Drehung von g um A.

Auf Grund der Konstruktion ergibt sich, daß mit dem Geradenpaar h_1, h_2 alle gesuchten Punkte gefunden sind.

Die Lösung zeigt, daß ein wesentlich allgemeinerer Zusammenhang vorliegt, als in der Aufgabe angesprochen: Wenn man den Punkt P nicht eine Gerade, sondern irgendeine Kurve (zB einen Kreis) durchlaufen läßt, findet man in entsprechender Weise die gesuchten dritten Punkte der gleichseitigen Dreiecke.

Aufgabe 3
Eine natürliche Zahl n heiße *zerbrechlich,* wenn es positive ganze Zahlen a, b, x, y gibt, für die $a+b=n$ und $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ gilt.
Man bestimme die Menge aller zerbrechlichen Zahlen.

Lösung
Die gesuchte Menge ist die Menge aller zusammengesetzten Zahlen, also aller Zahlen, die größer als 1 und keine Primzahlen sind.
Zum Nachweis zeigt man
(A) Jede zerbrechliche Zahl n ist zusammengesetzt.
(B) Jede zusammengesetzte Zahl n ist zerbrechlich.

Erster Beweis
Alle vorkommenden Variablen bedeuten positive ganze Zahlen. Die nach Definition der Zerbrechlichkeit auftretende Bedingung

(1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

ist äquivalent zu $bx+ay=ab$. Eine weitere Äquivalenzumformung liefert hieraus $ab-bx-ay+xy=xy$ und somit

(2) $(a-x)\cdot(b-y)=xy$.

Dabei ist der Faktor $a-x$ positiv, da sich aus (1) die Folgerung $\frac{x}{a}<1$ und mithin $x<a$ ergibt; aus dem entsprechenden Grunde (oder wegen des positiven Produktes xy) ist auch $b-y$ positiv.
Die nachfolgend mit (3) definierten Zahlen p, q sind also positive ganze Zahlen:

(3) $p:=a-x, \quad q:=b-y$.

Einsetzen von (3) in (2) ergibt $pq=xy$ und daher $\frac{p}{x}=\frac{y}{q}$.
Da die Brüche $\frac{p}{x}$ und $\frac{y}{q}$ den gleichen Wert haben, lassen sie sich beide durch Erweitern aus dem gleichen vollständig gekürzten Bruch $\frac{r}{s}$ erhalten; es gibt also Zahlen t und u, für die (4) gilt:

(4) $p=rt, \quad y=ru, \quad x=st, \quad q=su$.

Durch Einsetzen von (4) in (3) gelangt man zu $rt=a-st$ und $su=b-ru$, erhält also $a+b=rt+st+su+ru$ und somit

(5) $a+b=(r+s)\cdot(t+u)$.

Ist nun die positive ganze Zahl n zerbrechlich, so ist $n=a+b$ mit a, b gemäß (1) und gestattet daher nach (5) die Zerlegung in zwei Faktoren, die beide größer als 1 sind; n ist also zusammengesetzt, womit (A) gezeigt ist.

Ist umgekehrt n zusammengesetzt, läßt es sich als Produkt zweier natürlicher Zahlen schreiben, die beide größer als 1 sind; n erlaubt also eine Darstellung der Form $(r+s)\cdot(t+u)$ mit positiven ganzen Zahlen r, s, t, u. Definiert man nun a und b sowie x, y, p, q gemäß (4) und (5), so gilt offensichtlich $n=a+b$ sowie (3), (2) und damit auch (1); n ist also zerbrechlich, wie zum Beweis von (B) zu zeigen war. Damit ist der erste Beweis abgeschlossen.

Zweiter Beweis

Zu (A):

Es sei n eine zerbrechliche Zahl. Man betrachte eine laut Definition dann existierende Darstellung $n = a+b$ mit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Aus der letzten Gleichung folgt $bx + ay = ab$, also $ay = b\cdot(a-x)$. Wären a, b teilerfremd, müßte y ein Vielfaches von b sein. Dann wäre aber $\frac{y}{b}$ nicht kleiner als 1 - mit Widerspruch zur Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Also haben a und b einen gemeinsamen Teiler t ($1<t<n$), der wegen $a+b = n$ auch ein Teiler von n ist. Mithin ist n zusammengesetzt.

Zu (B):

Es sei n eine zusammengesetzte Zahl mit der Darstellung $n = pq$ und $p, q>1$. Man setze $a := p$ sowie $b := (q-1)\cdot p$. Dann sind a, b positive ganze Zahlen mit $a+b = n$. Setzt man weiter $x := 1$ und $y := (p-1)\cdot(q-1)$, sind auch x, y positive ganze Zahlen und man hat:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{p} + \frac{(p-1)\cdot(q-1)}{(q-1)\cdot p} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1 .$$

Also ist n eine zerbrechliche Zahl.

Bemerkung zu (B): Anstelle der oben gewählten Werte für x, y ist jedes Paar (x,y) mit $x \in \mathbb{N}$ und $1 \leq x \leq p-1$ und $y := (p-x)\cdot(q-1)$ geeignet, weil dann auch y eine positive ganze Zahl ist, und außerdem $\frac{x}{p} + \frac{(p-x)\cdot(q-1)}{(q-1)\cdot p} = 1$ ist.

Aufgabe 4

In einem Quadrat mit der Seitenlänge 100 befinden sich Kreisscheiben vom Radius 1. Sie liegen so, daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Keine zwei der Kreisscheiben haben gemeinsame innere Punkte.
2. Jede Strecke der Länge 10, die ganz in dem Quadrat liegt, trifft mindestens eine Scheibe.

Man beweise, daß dann in dem Quadrat mindestens 400 Scheiben liegen.

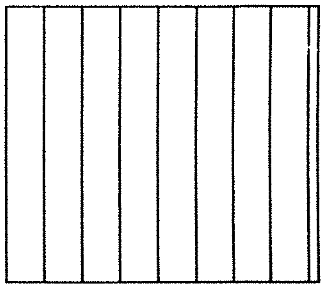
Hinweis: Eine Strecke *trifft* eine Kreisscheibe bedeutet, daß Strecke und Kreisscheibe mindestens einen Punkt gemeinsam haben.

Erster Beweis

Das betrachtete Quadrat sei mit Q bezeichnet. Es genügt zu zeigen, daß man 400 Strecken der Länge 10 derart in Q plazieren kann, daß - unabhängig von der Verteilung der Scheiben - keine zwei Strecken dieselbe Scheibe treffen. Da nach Voraussetzung jede dieser Strecken mindestens eine Scheibe trifft, folgt damit die Richtigkeit der Behauptung.

Man pflastere Q nun (teilweise) mit Rechtecken der Breite $b = \frac{100}{49}$ und der Länge $l = \frac{600}{49}$ auf die nachstehend beschriebene Weise.

Wegen $100:l = 4900:600 = 8 + \frac{1}{6}$ hat man $100 = 8l + \frac{1}{6}l = 8l + b$.



Teilt man also zunächst - etwa linksbündig beginnend - das Quadrat in seitenparallele rechteckige Streifen S_1, $S_2, \ldots, S_8$ der Maße $100*l$ auf, so bleibt rechts ein schmaler Streifen S_0 mit den Maßen $100*b$ übrig.
Wegen $49b=100$ passen in jeden der Streifen $S_1, S_2, \ldots, S_8$ übereinander 49 kleine $l*b$-Rechtecke.
Und wegen $100:l > 8$ passen in den Streifen S_0 übereinander noch einmal 8 der $b*l$-Rechtecke.
Insgesamt finden also $8\cdot 49 + 8 = 400$ Rechtecke mit den Maßen $l*b$ auf Q überschneidungsfrei (also ohne gemeinsame innere Punkte) Platz. Diese Rechtecke seien (in beliebiger Reihenfolge numeriert) mit $R_1, R_2, \ldots, R_{400}$ bezeichnet.
Für $i = 1, 2, \ldots, 400$ sei nun M_i der Mittelpunkt von R_i ; s_i sei die zur längeren Seite von R_i parallele Strecke der Länge 10 durch M_i mit M_i als Mittelpunkt..
Jeder Punkt von s_i hat zur längeren Seite von R_i den Abstand $\frac{1}{2}b$, zur kürzeren

Seite von R_i einen Abstand von mindestens $\frac{1}{2}(l\text{-}10)$. Beide dieser Abstände sind größer als 1, denn man hat $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\cdot\frac{100}{49} > 1$ und $\frac{1}{2}(l\text{-}10) = \frac{300}{49} - 5 = \frac{55}{49} > 1$.
Wenn s_i also eine Kreisscheibe vom Radius 1 trifft, muß deren Mittelpunkt im Inneren von R_i liegen, kann mithin nicht gleichzeitig in einem Rechteck R_j mit $i \neq j$ enthalten sein und wird somit auch nicht von s_j getroffen.
Die Anzahl der Kreisscheiben kann also nicht kleiner als die Anzahl der Strecken sein und beträgt somit mindestens 400.

<u>Zweiter Beweis</u>

Man lege derart ein kartesisches Koordinatensystem über das Quadrat, daß die Ecken die Koordinaten $(0|0)$, $(100|0)$, $(100|100)$, $(0|100)$ haben.
Für $i = 1, 2, 3, \ldots, 50$ und $j = 1, 2, 3, \ldots, 8$ definiere man nun die Punkte $P_{ij} = (x_i|y_j)$ und $Q_{ij} = (x_i|y_j{+}10)$ durch

$$x_i := 1 + \frac{201}{100}\cdot(i\text{-}1)\,, \qquad y_j := 1 + \frac{25}{2}\cdot(j\text{-}1)\,.$$

Die kleinsten Koordinaten x_1, y_1 sind positiv, die größten auftretenden Koordinaten sind $x_{50} = 1+\frac{201}{100}\cdot 49 = 9949:100<100$ und $y_8+10=11+\frac{25}{2}\cdot 7 = 197:2<100$.

Erklärt man daher s_{ij} als Strecke mit den Endpunkten P_{ij} und Q_{ij} $(1\le i\le 50$, $1\le j\le 8)$, liegen alle 400 Strecken s_{ij} ganz im Inneren des Quadrats.
Der Abstand zweier Punkte auf verschiedenen dieser 400 Strecken kann offensichtlich nicht kleiner sein, als der minimale Abstand von zwei Punkten auf horizontal bzw. vertikal benachbarten Strecken. Für diese Abstände dx bzw. dy gilt:

$$dx = \overline{P_{ij}P_{i+1,j}} = x_{i+1} - x_i = \frac{201}{100} > 2\,,\ dy = \overline{Q_{ij}P_{i,j+1}} = y_{j+1} - (y_j + 10) = \frac{5}{2} > 2.$$

Keine Kreisscheibe vom Durchmesser 2 kann also mehr als eine dieser Strecken treffen, die Anzahl der Kreisscheiben beträgt mithin mindestens 400, w.z.b.w.

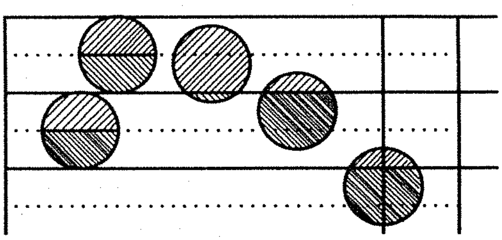
Dritter Beweis

Man zeichne eine Seite des Quadrats als Grundseite g aus und teile es dann in 50 zu g parallele Streifen der Breite 2 auf. Zu einer der zu g senkrechten Quadratseiten zeichne man Parallelen in den Abständen 12, 24, 36, 48, … , 84, 96 sowie in den Abständen 10, 22, 34, … , 82, 94.

Jeder der Streifen (in der Skizze ist g horizontal gewählt) wird hierdurch in 8 Rechtecke im Format 10×2 sowie Quadrate der Seitenlänge 2 und ein 4×2 Rechteck zerlegt. Mit *Rechtecken* sind nachfolgend stets die 10×2-Rechtecke gemeint.

Die Skizze zeigt zwei der fünfzig Streifen in ihrer Aufteilung.

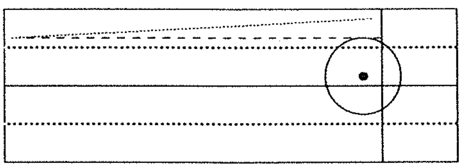
In jedes der 400 Rechtecke denke man sich eine Strecke der Länge 10 so gelegt, daß sie den Rand des Rechtecks nicht trifft. Bei einer Belegung mit Kreisscheiben gemäß der Aufgabenstellung muß jede von diesen Strecken eine der Kreisscheiben treffen, insbesondere muß es zu jedem Rechteck mindestens eine Kreisscheibe geben, die mit dem Rechteck gemeinsame innere Punkte hat. Nur solche Kreisscheiben werden nun betrachtet.



Man zerlege jede dieser Kreisscheiben auf folgende Weise in zwei Segmente: Wenn der Mittelpunkt der Kreisscheibe auf einer der waagerechten Mittelparallelen eines Streifens liegt, teilt <u>diese</u> die Kreisscheibe in zwei (kongruente) Segmente.

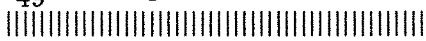
Andernfalls wird die Kreisscheibe durch einen der waagerechten Streifenränder in zwei (nicht notwendig kongruente) Segmente zerlegt; die Mittelparallelen werden in diesem zweiten Fall <u>nicht</u> zur Zerlegung der Kreisscheibe verwendet.

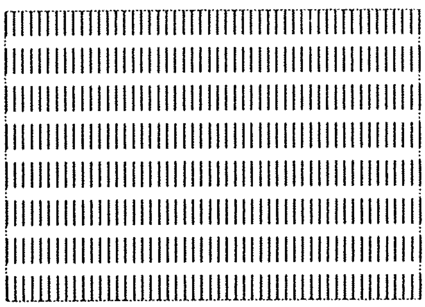
Wenn der Mittelpunkt einer Kreisscheibe s, die mit einem Rechteck r gemeinsame innere Punkte hat, nicht auf der langen Mittelparallele von r liegt, kann man offensichtlich - vgl. Skizze links - in r eine Strecke der Länge 10 unterbringen, die s nicht trifft und aus inneren Punkten von r besteht; dann hat r also noch mit einer weiteren Kreisscheibe gemeinsame innere Punkte.



Somit gehören zu jedem der 400 Rechtecke mindestens zwei Segmente; diese können auch in die kleinen Quadrate hineinragen, wegen der gewählten Maße aber mit höchstens einem der Rechtecke innere Punkte gemeinsam haben; sie werden dann diesem zugerechnet. Es gibt also mindestens 2·400 = 800 Segmente im obigen Sinn. Da jede Kreisscheibe genau 2 Segmente liefert, beträgt die Gesamtzahl der Kreisscheiben mindestens 400; das war zu zeigen.

Vierter Beweis

Man verschiebe eine Strecke der Länge 10 neunundvierzigmal senkrecht zur Richtung der Strecke um jeweils $\frac{100}{49}$. Original- und Bildstrecken bilden dann die nachfolgend skizzierte Figur:  . Diese wird nun siebenmal in Richtung der Strecken um jeweils $\frac{90}{7}$ verschoben, so daß schließlich die links skizzierte (nicht maßstabsgetreu dargestellte) Figur erhalten wird. Nach Konstruktion läßt sie sich vollständig in ein Quadrat der Seite 100 legen.



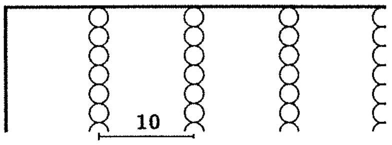
Da je zwei der 400 Strecken wegen $\frac{100}{49} > 2$ und $(\frac{90}{7} - 10) > 2$ einen Abstand von mehr als 2 haben, kann keine Kreisscheibe vom Radius 1 mit mehr als einer der Strecken Punkte gemeinsam haben. Wenn also bei einer Belegung mit derartigen Kreisscheiben jede von mindestens einer Strecke getroffen wird, muß die Anzahl der Kreisscheiben mindestens 400 betragen.

Ergänzende Bemerkungen

1. Die erste der beiden Bedingungen in der Aufgabenstellung wird für keinen der Beweise benötigt.
2. Es ist mit den gleichen Grundgedanken wie im ersten Beweis zu zeigen, daß die Zahl 400 in der Aufgabenstellung durch 416 ersetzt werden kann, indem durch Verwendung von Rechtecken zweierlei Formats der Randstreifen des Quadrats besser ausgenutzt wird. Hierzu benutzt man Rechtecke der Formate $(1+2\delta)*(12\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\delta)$ und $(2+2\delta)*(12\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\delta)$ mit $\delta = \frac{1}{50}$.
   Insbesondere zeigt dies, daß es sich bei der Zahl 400 nicht um die minimale ausreichende Anzahl handelt.

Bemerkung zur Bearbeitung durch die Teilnehmer

Bei dieser Aufgabe sind die meisten Denkfehler gemacht worden. Besonders oft lag ein solcher Fehler in einem Ansatz, bei dem - ggfs. für spezielle (waagerechte) Lagen der Strecken - eine vermeintlich optimale Anordnung der Scheiben angegeben wurde, bei der z. B. mindestens 450 Scheiben benötigt wurden (s. Skizze). Bei beliebiger Lage der Strecken ergab sich dann erst recht die Notwendigkeit von mindestens 450 Scheiben und natürlich auch von 400 Scheiben.



Der Nachweis, daß eine bestimmte Anordnung die „scheibensparsamste" ist, dürfte äußerst schwer zu erbringen sein.