BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
53144 Bonn

2+4

Tunay Gün 06

Aufgaben und Lösungen 1994
1. Runde

Stand 20. Mai 1994

Aufgabe 1

Gegeben seien elf reelle Zahlen. Man beweise, daß immer mindestens zwei von ihnen Dezimaldarstellungen haben, die an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen.

Beispiele von Dezimaldarstellungen:

$\frac{1}{4} = 0{,}250\,000\,000\ldots$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,333\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\ldots$.

Vorbemerkung

Jede reelle Zahl besitzt eine Dezimaldarstellung mit unendlich vielen Nachkommastellen, wenn man abbrechende Dezimalbruchentwicklungen wie im obigen Beispiel durch Nullen ergänzt.

Erste Lösung

Da elf Zahlen betrachtet werden, aber bei einer Dezimalentwicklung nur zehn verschiedene Ziffern auftreten, gibt es für jede Nachkommastelle wenigstens ein Paar aus den elf Zahlen mit gleicher Ziffer. Nacheinander werden die Ziffern an der 1., 2., 3., ... Stelle hinter dem Komma verglichen. Da es nur endlich viele (nämlich $\binom{11}{2} = 55$) verschiedene Möglichkeiten gibt, zwei aus elf Zahlen auszuwählen, aber unendlich viele Nachkommastellen gibt, muß wenigstens ein Paar mit gleichen Ziffern an dieser Nachkommastelle unendlich oft vorkommen. Die beiden Zahlen dieses Paars erfüllen die Behauptung.

Bemerkung

Eine formalisierte Darstellung des Beweisgedankens der ersten Lösung läßt sich in der folgenden Form geben: Die betrachteten elf Zahlen seien $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Man numeriere zunächst, beim Komma beginnend, die Nachkommastellen mit 1, 2, ... Da für jede Nachkommastelle n nur zehn verschiedene Dezimalziffern zur Verfügung stehen, stimmen stets mindestens zwei der elf Ziffern an dieser Stelle n überein. Für $i,j \in \mathbb{N}$ mit $0 \le i < j \le 11$ sei M_{ij} die Menge der Nummern aller Nachkommastellen, an denen a_i und a_j übereinstimmen. Dann ist die Vereinigung der endlich vielen Mengen M_{ij} die unendliche Menge $\mathbb{N}$:

$$\bigcup_{i=1}^{10} \bigcup_{j=i+1}^{11} M_{ij} = \mathbb{N}.$$ Für mindestens ein Paar (i,j) ist also M_{ij} unendlich.

Zweite Lösung

Man denke sich die elf gegebenen Zahlen, ausgerichtet nach dem Komma, untereinander aufgeschrieben und betrachte jeweils hinter dem Komma die Ziffern der ersten Spalte, der zweiten Spalte, der dritten Spalte usw. . Diese elf Ziffern an der jeweils i-ten Nachkommastelle ($i = 1, 2, 3, \ldots$) ergeben von oben nach unten gelesen die Dezimaldarstellung einer höchstens elfstelligen nichtnegativen ganzen Zahl $\le 99\,999\,999\,999$.

Hierbei kann nicht jede der Zahlen von 0 bis 99 999 999 999 höchstens endlich oft auftreten, mindestens eine kommt also unendlich oft vor. Da in dieser (ggfs. mit führenden Nullen zu schreibenden) elfstelligen Zahl mindestens eine der zehn Ziffern mehrfach auftreten muß, stimmen die beiden der elf Zahlen, aus deren Dezimaldarstellung diese Ziffern stammen, an unendlich vielen Stellen überein.

Aufgabe 2
Anna und Bernd spielen nach folgender Regel: Beide schreiben auf je einen Zettel eine natürliche Zahl und geben ihren Zettel gefaltet dem Schiedsrichter. Dieser schreibt auf eine für Anna und Bernd sichtbare Tafel zwei natürliche Zahlen, von denen die eine beliebig, die andere aber die Summe der Zahlen auf den Zetteln ist. Danach fragt der Schiedsrichter Anna, ob sie die Zahl von Bernd nennen kann. Wenn Anna verneint, richtet er an Bernd die entsprechende Frage. Wenn Bernd verneint, geht die Frage wieder an Anna, usw.

Es wird vorausgesetzt, daß Anna und Bernd beide intelligent und ehrlich sind. Man beweise, daß nach endlich vielen Fragen die Antwort JA gegeben wird.

Erste Lösung

Die beiden von Anna und Bernd gewählten Zahlen seien mit a und b bezeichnet, die an die Tafel geschriebenen Zahlen seien p und q, wobei $p \le q$ gelte. Man darf voraussetzen, daß sogar $p < q$ gilt, da im Falle von Gleichheit Anna sofort auf die erste Frage mit JA antworten kann; es ist dann ja $b = p - a$.

Der Beweis benutzt die folgenden beiden Hilfssätze

(1) Wenn Anna und Bernd beide wissen, daß für die ganzen Zahlen v und w die Ungleichungskette $v < b < w$ gilt, und wenn Anna dann auf die Frage des Schiedsrichters mit NEIN antwortet, dann wissen Anna und Bernd, daß auch die Ungleichungskette $q - w < a < p - v$ erfüllt ist.

(2) Wenn Anna und Bernd beide wissen, daß für die ganzen Zahlen v und w die Ungleichungskette $v < a < w$ gilt, und wenn Bernd dann auf die Frage des Schiedsrichters mit NEIN antwortet, dann wissen Anna und Bernd, daß auch die Ungleichungskette $q - w < b < p - v$ erfüllt ist.

Aus Symmetriegründen genügt es, den ersten Hilfssatz zu beweisen. (Zum Beweis des zweiten vertausche man nur a mit b und Anna mit Bernd). Wäre bei (1) die Ungleichungskette $q - w < a < p - v$ nicht richtig, so müßte eine der beiden Ungleichungen $a \le q - w$ bzw. $a \ge p - v$ gelten.

Aber aus $a \le q - w$ und $b < w$ folgt $a+b < q$, also $a+b=p$; Anna würde also JA sagen.

Und aus $a \ge p - v$ und $b < v$ folgt $a+b > p$, also $a+b = q$; Anna könnte also auch in diesem Fall JA sagen.

Damit ist Hilfssatz (1) und - gemäß Symmetriebemerkung - auch Hilfssatz (2) bewiesen.

Man definiere nun die Folgen (c_n) und (d_n) durch folgende Vorschrift: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ setze man $c_n := n \cdot (q-p)$, $d_n := q - n \cdot (q-p)$.

Da die arithmetischen Folgen (c_n), (d_n) nur ganzzahlige Werte haben, (c_n) offensichtlich (wegen $q-p \ge 1$) streng monoton steigt, und (d_n) streng monoton fällt, gilt für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $c_n > d_n$ (*).

Es wird nun gezeigt, daß die Annahme, Anna und Bernd würden nie mit JA antworten, dazu führt, daß <u>für alle</u> $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $c_n < d_n$ gilt - im Widerspruch zu (*).

Hierzu wird (unter der obigen Annahme) durch vollständige Induktion die Gültigkeit von $c_n < b < d_n$ bewiesen.

Für n = 0 bedeutet das die Ungleichungskette $0 < b < q$, ist also wahr.

Wenn Anna und Bernd nun die Gültigkeit von $c_n < b < d_n$ kennen, so wissen nach dem NEIN von Anna beide nach Hilfssatz (1), daß $q - d_n < a < p - c_n$ gilt. Gemäß Hilfssatz (2) wissen dann beide nach dem NEIN von Bernd, daß die Ungleichungskette $q-(p-c_n) < b < p-(q-d_n)$, also $c_{n+1} < b < d_{n+1}$ gilt.

Bemerkung

Die oben gelöste Aufgabe hat - das haben schon während der Bearbeitungszeit viele Rückfragen, ja Zweifel an der Lösbarkeit gezeigt - in besonderem Maße bei den Teilnehmern wie auch bei vielen Lehrern Interesse, aber auch Irritation ausgelöst. Nachfolgend wird daher eine Hinführung zum Lösungsweg gegeben. Dabei ist der entscheidende Schritt zur Lösungsfindung die Einsicht, inwiefern ein NEIN neue Informationen liefert. Einen möglichen Einstieg bieten die folgenden

Beispiele:

1) Anna möge sich 10 gedacht haben, an der Tafel stehen die Zahlen 30 und 45. Dann sagt Anna NEIN, weil beide Zahlen größer als 10 sind. Aber Bernd weiß dann, daß Annas Zahl kleiner als 30 sein muß. Wäre seine Zahl nun 35, so könnte er JA sagen. Sagt er aber NEIN, weiß Anna, daß Bernd die Zahl 20 aufgeschrieben hat.

2) Schon etwas schwieriger: Anna möge sich 20 gedacht haben, an der Tafel stehen (wieder) 30 und 45. Anna sagt NEIN, Bernd weiß daher, daß Annas Zahl kleiner als 30 ist. Wenn er sich 10 gedacht hätte, könnte daher zusammen mit Annas Zahl nicht die Summe 45 erzeugt worden sein, also hätte Anna 20 aufgeschrieben. Sagt er also NEIN, weiß Anna, daß Bernd sich 25 gedacht haben muß, und antwortet mit JA.

Diese Beispiele könnten zur folgenden allgemeineren Frage führen, wobei die von Anna und Bernd gedachten Zahlen wie in der Lösung mit a bzw. b, die Zahlen an der Tafel mit p bzw. q bezeichnet werden:

Wenn Anna Schranken für b kennt, also etwa weiß, daß die Ungleichung $x<b<y$ gilt, für welche Werte von a kann sie dann p , für welche Werte von a kann sie q als Summe der gedachten Zahlen ausschließen, weil a+b zu groß bzw zu klein wäre? In welchem Bereich muß a also liegen, wenn Anna NEIN sagt, also weder p noch q als Summen ausschließen kann.

Von dieser Fragestellung wird man dann zu dem in der ersten Lösung angegebenen Beweisgang geführt.

<u>Zweite Lösung</u>

Die Zahlen von Anna und Bernd seien wieder mit a und b bezeichnet; der Schiedsrichter schreibt dann an die Tafel a+b sowie eine von ihm frei gewählte natürliche Zahl s. Wenn $s \le a$ oder $s=a+b$ ist, kann Anna sofort JA sagen, denn im ersten Fall kann sie s als Summe der gedachten Zahlen ausschließen, im zweiten Fall b als s-a berechnen. In der folgenden Überlegung soll daher

(*) $s \geq a+1$ und $s \neq a+b$

vorausgesetzt werden.

Es wird nun - mit vollständiger Induktion - gezeigt, daß für jede natürliche Zahl n die folgende Aussage A(n) richtig ist:

A(n): Wenn Anna und Bernd beide n-mal NEIN geantwortet haben, gilt
$s \geq a+n$ und $b \geq n+1$.

Denn wäre $b=1$, lauteten die beiden angeschriebenen Zahlen s und $a+1$. Nach Annas erstem NEIN wüßte Bernd gemäß (*), daß $s > a+1$ wäre und somit die kleinere der angeschriebenen Zahlen $a+1$ sein müßte,- er würde also mit JA antworten. Somit muß bei einem NEIN-NEIN in der ersten Runde $s \geq a+1$ und $b \geq 2$ gelten.

Damit ist A(1) gezeigt.

Zum Schluß von n auf n+1 sei nun für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit von A(n) vorausgesetzt. Hiermit ist zu beweisen:

Lauten die Antworten von Anna und Bernd auch im (n+1)-ten Durchgang NEIN-NEIN, dann ist $s \geq a+n+1$ und $b \geq n+2$.

Wäre dies falsch, dann müßte $s < a+n+1$ oder $b < n+2$ gelten. Da nach der Induktionsvoraussetzung $s \geq a+n$ und $b \geq n+1$ bekannt ist, wäre dann (1) $s = a+n$ oder (2) $b = n+1$. Wie nachfolgend gezeigt wird, führt jede der Gleichungen (1), (2) entgegen der Voraussetzung zu einem JA in der (n+1)-ten Runde.

Zu (1): Im Fall $s=a+n$ sind die angeschriebenen Zahlen $a+n$ und $a+b$, wobei $a+b \geq a+n+1$ gilt (gemäß A(n)). Anna müßte in der (n+1)-ten Runde erkennen, daß die kleinere der angeschriebenen Zahlen gleich $a+n$ ist, die größere also $a+b$, und müßte mit JA antworten .

Zu (2): Im Fall $b = n+1$ wäre nach dem NEIN von Anna in der (n+1)-ten Runde für Bernd klar: $s \geq a+n+1$, $a+b = a+n+1$. Da die Zahlen s und $a+b$ nach (*) verschieden sind, muß $s > a+n+1 = a+b$ gelten; Bernd erkennt also $a+b$ als die kleinere der beiden an die Tafel geschriebenen Zahlen und antwortet mit JA .

Dies schließt den Nachweis ab, daß A(n) für alle natürlichen Zahlen n wahr ist.

Würden nun Anna und Bernd nie mit JA antworten, so gälte $b \geq n+1$ für jede natürliche Zahl n, was z.B. für $n=b$ falsch ist.

Damit ist der erforderliche Beweis erbracht.

Aufgabe 3

Gegeben sei das Dreieck $A_1A_2A_3$ und ein Punkt P in seinem Inneren. Für $i = 1,2,3$ sei B_i ein beliebiger Punkt auf der Gegenseite von A_i; ferner seien C_i und D_i die Mittelpunkte der Strecken A_iB_i bzw. PB_i.

Man beweise, daß die Dreiecke $C_1C_2C_3$ und $D_1D_2D_3$ den gleichen Flächeninhalt haben.

Vorbemerkung zur ersten Lösung

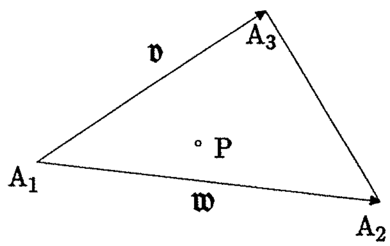
Die folgende Lösung verwendet das im Raum $\mathbb{R}^3$ definierte *Kreuzprodukt*. Bekanntlich gibt der Betrag von $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ den Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms an.

Erste Lösung

Allgemeiner als in der Aufgabenstellung gefordert ist, wird der Punkt P nicht unbedingt in der Ebene des gegebenen Dreiecks, sondern beliebig im Raum gewählt. Man lege den Ursprung eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems in A_1 und bezeichne die Ortsvektoren von A_3 und A_2 mit $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{w}$. Mit $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{p}$ werden - in dieser Reihenfolge - die Ortsvektoren der Punkte B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, P bezeichnet.

Gemäß der Lage der Punkte B_1, B_2, B_3 haben ihre Ortsvektoren Darstellungen der folgenden Form:

$$\mathfrak{b}_1 = r\cdot\mathfrak{v} + (1-r)\cdot\mathfrak{w}\ ,\quad \mathfrak{b}_2 = s\cdot\mathfrak{v}\ ,\quad \mathfrak{b}_3 = t\cdot\mathfrak{w}\ .$$



Dabei sind r, s, t sind reelle Parameter, die entsprechend der Aufgabenstellung aus dem Intervall $[0,1]$ sind, für diese Lösung aber beliebig sein dürfen.

Da C_i als Mittelpunkt von A_iB_i erklärt ist, hat man:

$$\mathfrak{c}_1 = \tfrac{1}{2}\,(r\mathfrak{v}+(1-r)\,\mathfrak{w})\ ,\quad \mathfrak{c}_2 = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{w}+s\mathfrak{v})\ ,\quad \mathfrak{c}_3 = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{v}+t\mathfrak{w}).$$

Entsprechend liefert die Lage von D_i als Mittelpunkt von PB_i die folgenden Ortsvektoren: $\mathfrak{d}_1 = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{p}+r\mathfrak{v}+(1-r)\mathfrak{w})$, $\mathfrak{d}_2 = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{p}+s\mathfrak{v})$, $\mathfrak{d}_3 = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{p}+t\mathfrak{w})$.

Damit erhält man:

$$4(\mathfrak{d}_1-\mathfrak{d}_2)\times(\mathfrak{d}_3-\mathfrak{d}_2) = \big((r-s)\mathfrak{v}+(1-r)\mathfrak{w}\big)\times(t\mathfrak{w}-s\mathfrak{v}) = ((r-s)t+(1-r)s)(\mathfrak{v}\times\mathfrak{w}) = (rt-st+s-rs)(\mathfrak{v}\times\mathfrak{w})$$

und $4(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)\times(\mathfrak{c}_3-\mathfrak{c}_2)$

$$= \big((r-s)\mathfrak{v}-r\mathfrak{w}\big)\times\big((1-s)\mathfrak{v}+(t-1)\mathfrak{w}\big) = ((r-s)(t-1)+r(1-s))(\mathfrak{v}\times\mathfrak{w}) = (rt-st+s-rs)(\mathfrak{v}\times\mathfrak{w}).$$

Die Dreiecke $C_1C_2C_3$ und $D_1D_2D_3$ haben somit, wie sich aus der geom. Bedeutung des Kreuzprodukts ergibt, beide den Inhalt A mit $8A = |rt-st+s-rs|\cdot\|\mathfrak{v}\times\mathfrak{w}\|$.

Bemerkung

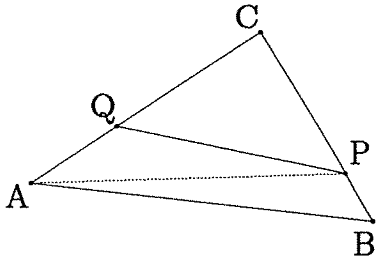
Für den Flächeninhalt F eines von den Vektoren $\mathfrak{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\mathfrak{b} = \binom{b_1}{b_2}$ aufgespannten Dreiecks gilt die Determinantenformel $2F = \left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right| = |a_1b_2-a_2b_1|$, die sich z.B. nach geeigneter Einbettung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in den dreidimensionalen Raum unmittelbar mit Hilfe des Kreuzproduktes ergibt. Beläßt man bei der Lösung P in der Ebene des Dreiecks, erhält man mit dieser Formel eine Lösung mit zur obigen Darstellung analoger Rechnung.

Zweite Lösung

Hilfssatz 1:

Für zwei Dreiecke ABC und CPQ mit P auf BC und Q auf AC gilt stets:

$$|\triangle QPC| : |\triangle ABC| = (\overline{CP}\cdot\overline{CQ}) : (\overline{CB}\cdot\overline{CA}).$$



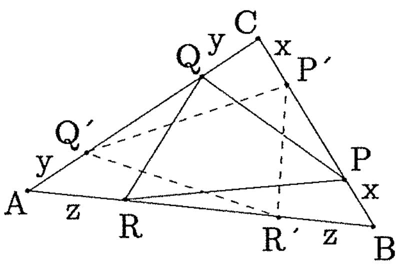
Beweis:

Bei Dreiecken mit gleicher Höhe ist der Flächeninhalt proportional zur Grundseite, wie unmittelbar aus der Flächeninhaltsformel folgt. Man hat daher

$$|\triangle QPC| = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}\cdot|\triangle APC| = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}\cdot\frac{\overline{CP}}{\overline{CB}}\cdot|\triangle ABC|\,,$$

woraus Division durch $|\triangle ABC|$ die behauptete Formel liefert.

Hilfssatz 2:



Gegeben seien das Dreieck ABC und die Punkte P und P´ auf der Seite BC, die Punkte Q und Q´ auf der Seite CA und die Punkte R und R´ auf der Seite AB, wobei gilt

$$\overline{BP} = \overline{P'C} \text{ und } \overline{CQ} = \overline{Q'A} \text{ und } \overline{AR} = \overline{R'B}.$$

Dann sind die Dreiecke PQR und P´Q´R´ flächengleich.

Beweis zu Hilfssatz 2

Mit den Standardbezeichnungen für die Dreiecksseiten sowie $x := \overline{BP}$, $y := \overline{CQ}$, $z := \overline{AR}$, $F := |\triangle ABC|$ gilt nach Hilfssatz 1:

$$|\triangle ARQ|:F = z(b-y):(bc);\quad |\triangle BPR|:F = x(c-z):(ac);\quad |\triangle CQP|:F = y(a-x):(ab) \text{ und}$$
$$|\triangle AR'Q'|:F=y(c-z):(bc);\quad |\triangle BP'R'|:F = z(a-x):(ac);\quad |\triangle CQ'P'|:F = x(b-y):(ab).$$

Nun ist

$$\frac{1}{F}\cdot abc\cdot(|\triangle ARQ| + |\triangle BRP| + |\triangle CPQ|) = abz - ayz + bcx - bxz + acy - cxy$$

und

$$\frac{1}{F}\cdot abc\cdot(|\triangle AR'Q'| + |\triangle BR'P'| + |\triangle CP'Q'|) = acy - ayz + abz - bxz + bcx - cxy\,.$$

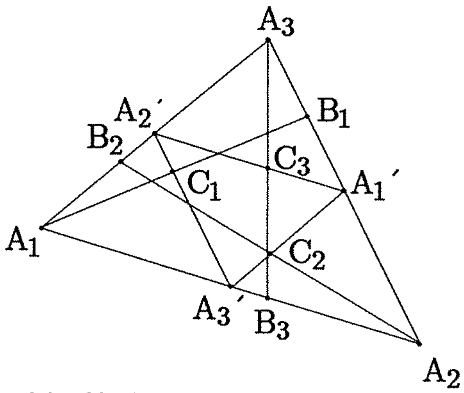
Somit ist

$\frac{1}{F}\cdot abc\cdot(F - |\triangle PQR|) = \frac{1}{F}\cdot abc\cdot(F - |\triangle P'Q'R'|)$, also $|\triangle PQR| = |\triangle P'Q'R'|$. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Man betrachte nun das Dreieck $A_1A_2A_3$ sowie die durch die Aufgabenstellung gegebenen Punkte P, B_i, C_i, D_i.

Aus $\overline{PD_i} = \overline{PB_i}:2$ folgt $\overline{D_iD_j} = \overline{B_iB_j}:2$ und damit (1) $|\triangle D_1D_2D_3| = |\triangle B_1B_2B_3|:4$.

Sei nun $A'_1A'_2A'_3$ das Mittendreieck von $A_1A_2A_3$.



Wenn B_1 die Strecke A_2A_3 im Verhältnis $r:(1-r)$ teilt, teilt C_1 (nach einem Strahlensatz) die Mittelparallele $A'_2A'_3$ zu A_2A_3 im umgekehrten Verhältnis $(1-r):r$. Entsprechendes gilt für B_2 und C_2, bzw. B_3 und C_3.

Man bezeichne den durch Spiegelung von C_1 am Mittelpunkt von $A'_2A'_3$ erhaltenen Punkt mit C'_1. Entsprechend sei C'_2 das Bild von C_2 bei Spiegelung am Mittelpunkt von $A'_1A'_3$; schließlich entstehe C'_3 durch Spiegelung von C_3 am Mittelpunkt der Strecke $A'_1A'_2$.

Nach Hilfssatz 2 folgt daher (2) $|\triangle C_1C_2C_3| = |\triangle C'_1C'_2C'_3|$

Die Punkte C'_1, C'_2, C'_3 liegen im Dreieck $A'_1A'_2A'_3$ ähnlich wie die Punkte B_1, B_2, B_3 im Dreieck $A_1A_2A_3$. Da Dreieck $A'_1A'_2A'_3$ (als Mittendreieck) aus Dreieck $A_1A_2A_3$ durch zentrische Streckung mit Faktor $-\frac{1}{2}$ (an dessen Schwerpunkt) hervorgeht, ist somit auch (3) $|\triangle C'_1C'_2C'_3| = \frac{1}{4}\cdot|\triangle B_1B_2B_3|$.

Aus (1), (3), (2) folgt $|\triangle D_1D_2D_3| = \frac{1}{4}\cdot|\triangle B_1B_2B_3| = |\triangle C'_1C'_2C'_3| = |\triangle C_1C_2C_3|$.

Also sind die Dreiecke $D_1D_2D_3$ und $C_1C_2C_3$ flächengleich.

Bemerkung:

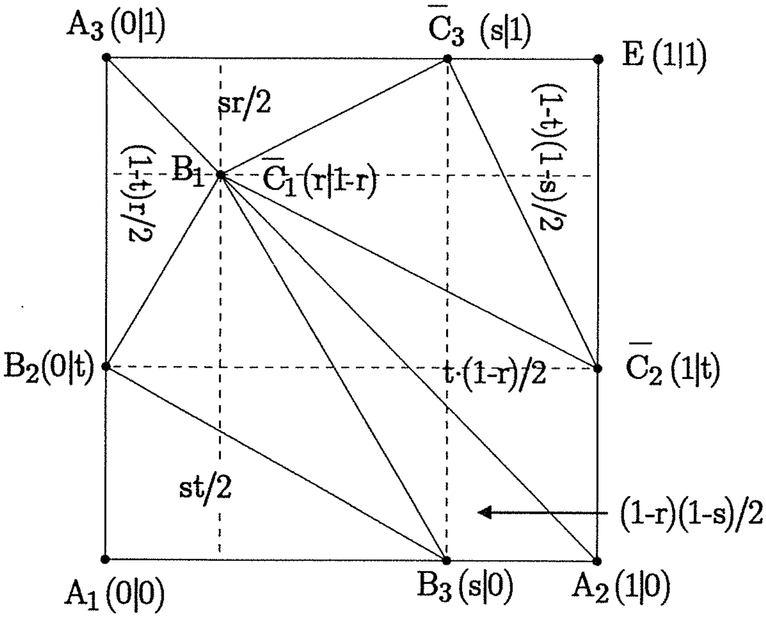
Der Punkt P kann überall im Raum liegen. Die Punkte B_1, B_2, B_3 dürfen auch auf den Verlängerungen der Seiten von $A_1A_2A_3$ liegen.

<u>Dritte Lösung</u>

Wegen Affininvarianz der Flächenverhältnisse darf angenommen werden, daß A_1, A_2, A_3 in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $(0|0)$ bzw. $(1|0)$ bzw. $(0|1)$ haben.

Dreieck $D_1D_2D_3$ entsteht aus Dreieck $B_1B_2B_3$ durch zentrische Streckung von P aus mit Streckfaktor $\frac{1}{2}$.

Also gilt für die Flächeninhalte $|\triangle D_1D_2D_3| = \frac{1}{4}\cdot|\triangle B_1B_2B_3|$.



Gemäß der Lage der Punkte B_1, B_2, B_3 auf den Seiten von Dreieck $A_1A_2A_3$ lassen sich die Koordinatenpaare dieser Punkte mit reellen Zahlen r, t, s $(0 \le r, t, s \le 1)$ in der folgenden Form angeben: $B_1 = (r|1-r)$, $B_2 = (0|t)$, $B_3 = (s|0)$. Daraus erhält man für C_1, C_2, C_3 die drei Koordinatendarstellungen $C_1 = (\frac{r}{2}|\frac{1}{2}-\frac{r}{2})$, $C_2 = (\frac{1}{2}|\frac{t}{2})$, $C_3 = (\frac{s}{2}|\frac{1}{2})$.

Dreieck $C_1C_2C_3$ geht durch zentrische Streckung mit Zentrum A_1 und Streckfaktor 2 in ein Dreieck $\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3$ über; dessen Ecken haben dann die Koordinatendarstellungen $\overline{C}_1 = (r|1-r)$, $\overline{C}_2 = (1|t)$, $\overline{C}_3 = (s|1)$.
Also gilt für die Flächeninhalte $|\triangle C_1C_2C_3| = \frac{1}{4}\cdot|\triangle\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3|$.

Nun ist (siehe obige Abbildung)

$$|\triangle B_1B_2B_3| = |\triangle A_1A_2A_3| - |\triangle B_1B_3A_2| - |\triangle A_1B_3B_2| - |\triangle A_3B_2B_1| \text{, also}$$
$$2\cdot|\triangle B_1B_2B_3| = 1 - (1-r)\cdot(1-s) - ts - (1-t)\cdot r \quad = s - rs - ts + rt.$$

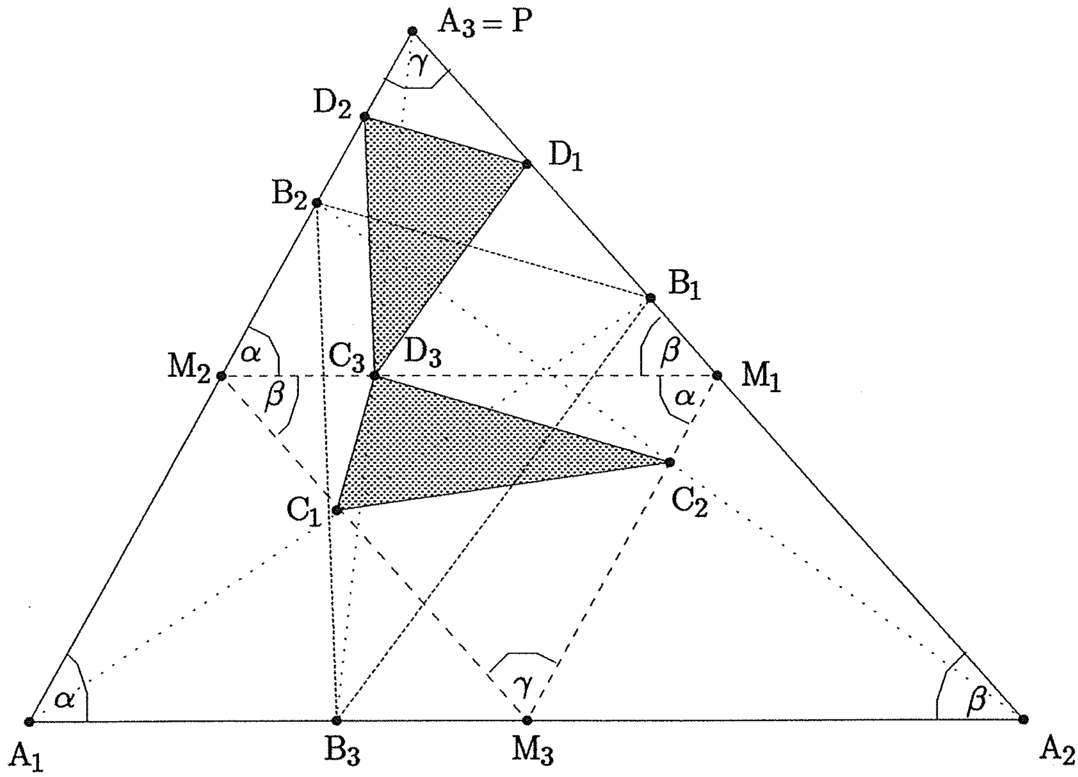
Entsprechend ergibt sich, wenn man mit E den Punkt mit dem Koordinatenpaar $(1|1)$ bezeichnet:

$$|\triangle\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3| = |\triangle A_3A_2E| - |\triangle A_3\overline{C}_1\overline{C}_3| - |\triangle A_2\overline{C}_2\overline{C}_1| - |\triangle\overline{C}_2E\overline{C}_3| \text{, also}$$
$$2\cdot|\triangle\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3| = 1 - rs - t\cdot(1-r) - (1-t)\cdot(1-s) \quad = s - rs - ts + rt.$$

Somit ist $|\triangle B_1B_2B_3| = |\triangle\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3|$ und damit $|\triangle C_1C_2C_3| = |\triangle D_1D_2D_3|$, was zu beweisen war.

Vierte Lösung

Dreieck $D_1D_2D_3$ entsteht aus Dreieck $B_1B_2B_3$ durch zentrische Streckung von P aus mit Streckfaktor $\frac{1}{2}$. Alle - bei Variation von P - derart erreichbaren Dreiecke sind kongruent, also insbesondere flächengleich. Da nur die Flächeninhalte untersucht werden, darf man also speziell $P = A_3$ wählen.



Man bezeichne die Seitenmitten des Dreiecks gemäß Skizze mit M_1, M_2, M_3. Das Viereck $M_2M_3M_1A_3$ ist (bekanntlich) ein Parallelogramm, die Dreiecke M_1PM_2

und $M_2M_3M_1$ sind gleichsinnig kongruent. Nach Strahlensatz liegen die Punkte C_1, C_2, C_3 auf den Strecken M_2M_3 bzw. M_3M_1 bzw. M_1M_2; wegen $A_3 = P$ fallen C_3 und D_3 zusammen.

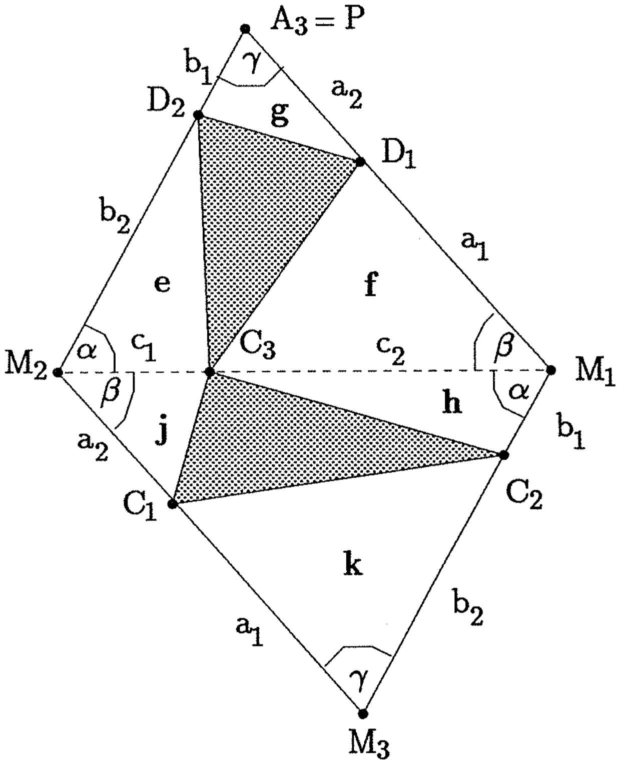
Im folgenden werden zwei den Beweis abschließende Nachweise für die Flächengleichheit der Dreiecke $D_1D_2D_3$ und $C_1C_2C_3$ gegeben:

Beweis (I) zeigt (in Analogie zur dritten Lösung), daß die Ergänzungsfläche zu Dreieck $C_1C_2C_3$ innerhalb von Dreieck $M_2M_3M_1$ den gleichen Inhalt hat wie die Ergänzungsfläche zu Dreieck $D_1D_2D_3$ innerhalb von $M_2M_1A_3$,

Beweis (II) verwendet den in der zweiten Lösung formulierten Hilfssatz 2.

(I): Für jede Permutation (i,j,k) von (1,2,3) teilt der Punkt C_i die Strecke M_jM_k im gleichen Verhältnis wie der Punkt B_i die Strecke A_kA_j teilt.

Die Flächeninhalte der Dreieck $D_1D_2D_3$ umgebenden Teildreiecke von Dreieck M_1PM_2 seien gemäß der Skizze mit e, f, g bezeichnet; entsprechend seien h, j, k die Inhalte der Teildreiecke von Dreieck $M_1M_2M_3$, die das Dreieck $C_1C_2C_3$ umgeben.



Schließlich werden unter Ausnutzung der vorangegangenen Überlegungen zur Gleichheit die Abschnitte der Seiten und der Diagonale des Parallelogramms $M_1PM_2M_3$ mit a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 bezeichnet.

Aus der - sofort nachzurechnenden - algebraischen Identität

$$c_1a_2\cdot(b_1+b_2)+c_2b_1\cdot(a_1+a_2)+a_1b_2\cdot(c_1+c_2) = c_1b_2\cdot(a_1+a_2)+a_2b_1\cdot(c_1+c_2)+a_1c_2\cdot(b_1+b_2)$$

gelangt man durch Multiplikation mit $\sin(\alpha)$ und Division durch a_1+a_2 zu

$$c_1a_2\cdot\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}\cdot\sin(\alpha)+c_2b_1\cdot\sin(\alpha)+a_1b_2\cdot\frac{c_1+c_2}{a_1+a_2}\cdot\sin(\alpha)$$
$$= c_1b_2\cdot\sin(\alpha)+a_2b_1\cdot\frac{c_1+c_2}{a_1+a_2}\cdot\sin(\alpha)+a_1c_2\cdot\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}\cdot\sin(\alpha).$$

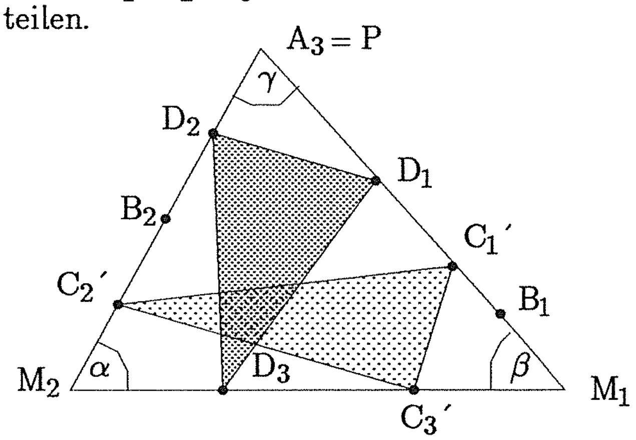
Nach dem Sinussatz ist $\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}\cdot\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ und $\frac{c_1+c_2}{a_1+a_2}\cdot\sin(\alpha) = \sin(\gamma)$, also

$$c_1a_2\cdot\sin(\beta)+c_2b_1\cdot\sin(\alpha)+a_1b_2\cdot\sin(\gamma) = c_1b_2\cdot\sin(\alpha)+a_2b_1\cdot\sin(\gamma)+a_1c_2\cdot\sin(\beta).$$

Nach einer bekannten Formel kann man den Flächeninhalt eines Dreiecks als halbes Produkt aus den Längen zweier Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels berechnen; dies liefert äquivalent zur letzten Gleichung

$$2j + 2h + 2k = 2e + 2g + 2f, \text{ also } e+f+g = h+j+k, \text{ wie zu zeigen war}.$$

(II): Wegen $\overline{PD_1} = \frac{1}{2}\overline{PB_1} = \overline{M_2C_1}$, $\overline{PD_2} = \frac{1}{2}\overline{PB_2} = \overline{M_1C_2}$ und $\overline{M_2D_3} = \overline{M_2C_3}$ teilen die Punkte D_1, D_2, D_3 die Dreiecksseiten M_1P, PM_2, M_2M_1 jeweils im umgekehrten Verhältnis wie die Punkte C_1, C_2, C_3 die entsprechenden Dreiecksseiten M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 teilen.



Man erhält die zur Verdeutlichung rechts dargestellte Skizze aus einem Teil der betrachteten Figur durch Spiegelung des Dreiecks $M_1M_2M_3$ am Mittelpunkt der Strecke M_1M_2; mit C_i' wird für $i = 1, 2, 3$ der Bildpunkt von C_i bezeichnet.

Nach dem in der zweiten Lösung angegebenen Hilfssatz 2 sind somit die betrachteten Dreiecke $C_1C_2C_3$ und $D_1D_2D_3$ flächengleich.

Aufgabe 4

Mit den reellen Zahlen a und b ($b \neq 0$) wird die unendliche arithmetische Folge a, a+b, a+2b, a+3b, ... gebildet.

Man beweise, daß diese Folge dann und nur dann eine unendliche geometrische Teilfolge enthält, wenn $\frac{a}{b}$ eine rationale Zahl ist.

Bezeichnung

Das allgemeine Glied der betrachteten arithmetischen Folge (a, a+b, a+2b, ...) wird nachfolgend mit c_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ bezeichnet, also $c_n := a + n \cdot b$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

<u>Erste Lösung</u>

Es genügt zu zeigen:

(1) Wenn (c_n) eine dreigliedrige geometrische Teilfolge hat, ist $\frac{a}{b}$ rational.

(2) Wenn $\frac{a}{b}$ rational ist, enthält (c_n) eine unendliche geometrische Teilfolge.

Zu (1): Wenn die Folgenglieder c_i, c_j, c_k eine dreigliedrige geometrische Teilfolge von (c_n) bilden $(i < j < k)$, dann ist $c_j^2 = c_i \cdot c_k$:

$(a + jb)^2 = (a + ib) \cdot (a + kb)$, also $a^2 + 2jab + j^2b^2 = a^2 + kab + iab + ikb^2$.

Durch Subtraktion von a^2, Division durch b ($\neq 0$), Umordnen und Zusammenfassen erhält man hieraus die Gleichung

$(*) \qquad (2j - i - k) \cdot a + (j^2 - ik) \cdot b = 0$.

Wäre in der Gleichung (*) der Koeffizient von a gleich null, also $2j = i + k$, so müßte wegen $b \neq 0$ gelten $j^2 - ik = 0$, also $j^2 = ik$. Somit hätte man $(i+k)^2 = 4j^2 = 4ik$, woraus folgt $(i+k)^2 - 4ik = 0$, also $(i-k)^2 = 0$. Das bedeutet aber i=k - im Widerspruch zur Voraussetzung über i, j, k.

Division durch die somit beide von null verschiedenen Ausdrücke 2j–i–k und b liefert aus (∗) die Gleichung

$\frac{a}{b} = \frac{ik - j^2}{2j - i - k}$, die $\frac{a}{b}$ als Quotienten ganzer Zahlen darstellt, also als rational nachweist.

Bemerkung

Kürzer als oben kann man unter Verwendung der bekannten Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel wie folgt schließen: Wären in (∗) die Koeffizienten von a und b beide 0, wäre j sowohl arithmetisches als auch geometrisches Mittel von i und k, also i = j = k.

Zu (2): Wenn $\frac{a}{b}$ rational ist, gibt es eine ganze Zahl m und eine natürliche Zahl n, welche die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ erfüllen. Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen k gilt dann

$$(**)\quad \frac{c_k}{b} = \frac{a}{b} + k = \frac{m}{n} + k = \frac{m + nk}{n}.$$

Für $k > -\frac{m}{n}$ haben alle Folgenglieder c_k das gleiche Vorzeichen.

Es wird nun in leichter Verschärfung der Behauptung gezeigt, daß jedes Folgenglied a_k mit $k > -\frac{m}{n}$ Anfangsglied von unendlich vielen unendlichen geometrischen Teilfolgen der gegebenen arithmetischen Folge ist.

Hierzu erkläre man auf $\mathbb{N}_0$ für eine beliebig gewählte natürliche Zahl p die Funktion f mit Werten in $\mathbb{N}_0$ auf folgende Weise:

$$f(t) := k + \frac{1}{n}\cdot\left((pn+1)^t - 1\right)\cdot(m+nk) \qquad (t \in \mathbb{N}_0).$$

Dann ist $f(0) = k$, und für alle weiteren $t \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{n}\cdot\left((pn+1)^t - 1\right)$ eine nichtnegative ganze Zahl (, denn nach Ausmultiplizieren von $(pn+1)^t$ enthalten außer dem Summanden 1 alle anderen Summanden mindestens einmal den Faktor n). Daher sind alle Werte von f nichtnegative ganze Zahlen; f wächst offensichtlich streng monoton.

Es muß nun noch gezeigt werden, daß durch f tatsächlich eine geometrische Teilfolge bestimmt wird, d.h. daß die Folge (g_t) mit $g_t := c_{f(t)}$ geometrisch ist:

Nach (∗∗) ist
$$\begin{aligned} \frac{n}{b}\cdot c_{f(t)} &= m + n\cdot f(t) \\ &= m + nk + \left((pn+1)^t - 1\right)\cdot(m+nk) \\ &= (pn+1)^t\cdot(m+nk) \end{aligned}$$

Folglich hat man für jedes $t \in \mathbb{N}_0$

$$c_{f(t+1)} = \frac{b}{n}\cdot(pn+1)^{t+1}\cdot(m+nk) = (pn+1)\cdot\left(\frac{b}{n}\cdot(pn+1)^t\cdot(m+nk)\right) = (pn+1)\cdot c_{f(t)},$$

also $c_{f(t+1)} = (pn+1)\cdot c_{f(t)}$.

Damit ist die Teilfolge $(c_{f(t)})$ als geometrische Folge nachgewiesen.

Zweite Lösung

Im Falle a=0 ist $\frac{a}{b}$ rational und die arithmetische Folge (0, b, 2b, 3b, ...) enthält die geometrische Folge (b, $2b^2$, 2^2b, 2^3b, ...). Die Behauptung der Aufgabe braucht daher nur noch für den - nachfolgend betrachteten - Fall $a \neq 0$ bewiesen zu werden.

Es wird gezeigt:

(1) Wenn $\frac{a}{b}$ irrational ist, führt die Annahme der Existenz hat einer geometrischen Teilfolge von (c_n) zum Widerspruch .

(2) Wenn $\frac{a}{b}$ rational ist, enthält (c_n) eine unendliche geometrische Teilfolge.

Zu (1): Eine Teilfolge von (c_n) läßt sich in der Form $\left(c_{n_i}\right)$ darstellen, wobei (n_i) eine unendliche streng isotone Folge natürlicher Zahlen ist. Mit $r := \frac{a}{b}$, wobei r gemäß Voraussetzung irrational ist, hat das i-te Glied der Teilfolge $\left(c_{n_i}\right)$ die Form $c_{n_i} = a + n_i \cdot b = r \cdot b + n_i \cdot b$.

Es wird nun angenommen, die Teilfolge $\left(c_{n_i}\right)$ sei eine geometrische. Dann gilt für jedes i aus $\mathbb{N}$

$c_{n_{i+1}}^{\;2} = c_{n_i} \cdot c_{n_{i+2}}$, also $(r \cdot b + n_{i+1} \cdot b)^2 = (r \cdot b + n_i \cdot b) \cdot (r \cdot b + n_{i+2} \cdot b)$;

wegen $b \neq 0$ gilt daher $(r + n_{i+1})^2 = (r + n_i) \cdot (r + n_{i+2})$

und mithin $(2 \cdot n_{i+1} - n_i - n_{i+2}) \cdot r = -n_{i+1}^2 + n_i \cdot n_{i+2}$.

Da die rechte Seite der Gleichung rational ist, kann der Koeffizient von r nicht verschieden von null sein; beide Seiten der Gleichung müssen verschwinden. Man erhält also $2 \cdot n_{i+1} = n_i + n_{i+2}$ und $n_{i+1}^2 = n_i \cdot n_{i+2}$.

Somit ist $(n_i - n_{i+2})^2 = (n_i + n_{i+2})^2 - 4 \cdot n_i \cdot n_{i+2} = (2 \cdot n_{i+1})^2 - 4 \cdot n_{i+1}^2 = 0$.

Also ist $n_i = n_{i+2}$, im Widerspruch zur strengen Monotonie der Indexfolge (n_i). Damit ist Teil (1) gezeigt.

Zu (2): Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ läßt sich in der Form $\frac{p}{q}$ darstellen, wobei p eine von null verschiedene ganze Zahl und q eine natürliche Zahl ist.

Die durch $d_n := p + n \cdot q$ definierte Folge (d_n) liegt ganz in $\mathbb{Z}$ und wächst wegen $q > 0$ streng monoton. Es gibt daher einen Index m, von dem an für alle Nummern n die Folgenglieder d_n natürliche Zahlen sind. Dann ist die durch

$$e_k := d_m \cdot \frac{b}{q} \cdot (1+q)^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

definierte geometrische Folge eine Teilfolge von (c_n), wie nachfolgend bewiesen wird. Hierzu wird durch Induktion nach k gezeigt, daß es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $e_k = c_n$ gibt; da beide betrachteten Folgen streng monoton sind, ist dies für einen Nachweis hinreichend.

Zunächst ist die Behauptung für k = 1 wahr, denn man hat

$$\begin{aligned} e_1 = d_m \cdot \frac{b}{q} \cdot (1+q) = \frac{b}{q} \cdot (p + m \cdot q) \cdot (1+q) &= \frac{b}{q} \cdot p + b \cdot p + m \cdot q \cdot b + m \cdot b \\ &= a + (d_m + m) \cdot b = c_{d_m + m}. \end{aligned}$$

Zum Schluß von k auf k+1 $(k \geq 1)$ sei bekannt, daß e_k die Darstellung c_n zuläßt. Dann erhält man

$$\begin{aligned} e_{k+1} = d_m \cdot \frac{b}{q} \cdot (1+q)^{k+1} = e_k \cdot (1+q) = (a + n \cdot b) \cdot (1+q) &= a + a \cdot q + n \cdot b + n \cdot b \cdot q \\ &= a + b \cdot p + n \cdot b + n \cdot b \cdot q \\ &= a + (p + n + nq) \cdot b \\ &= a + (d_n + n) \cdot b \\ &= c_{d_n + n}. \end{aligned}$$

Somit hat (c_n) eine unendliche geometrische Teilfolge.