BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
Ahrstraße 45
5300 Bonn 2

Aufgaben und Lösungen 1992

2. Runde

Stand 22.10.1992

Aufgabe 1

Unter der Standarddarstellung einer positiven ganzen Zahl n wird nachfolgend die Darstellung von n im Dezimalsystem verstanden, bei der die erste Ziffer verschieden von 0 ist. Jeder positiven ganzen Zahl n wird nun eine Zahl f(n) zugeordnet, indem in der Standarddarstellung von n die letzte Ziffer vor die erste gestellt wird; Beispiele: $f(1992) = 2199$, $f(2000) = 200$.

Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl n, für die $f(n) = 2n$ gilt.

Lösung

Die gesuchte Zahl ist $n = 105\,263\,157\,894\,736\,842$. Denn zunächst gilt, wie man unmittelbar durch Nachrechnen bestätigt:

$2 \cdot 105\,263\,157\,894\,736\,842 = 210\,526\,315\,789\,473\,684$, also $f(n) = 2n$.

Außerdem ist - dies wird in den folgenden Beweisen gezeigt - die angegebene Zahl n die kleinste positive ganze Zahl mit dieser Eigenschaft.

Erster Beweis

Es sei k eine positive ganze Zahl mit der Eigenschaft $f(k) = 2k$. Mit m sei die Anzahl der Stellen von k in der Standarddarstellung bezeichnet. Da für eine einstellige positive ganze Zahl x die Beziehung $f(x) = x < 2x$ gilt, muß m größer als 1 sein.

Die Einerziffer von k sei e; man setze $a := (k-e):10$.

Dann ist $k = 10a + e$ und $f(k) = 10^{m-1}e + a$.

Somit gilt $2\cdot(10a+e) = 10^{m-1}e + a$, also (1) : $19a = (10^{m-1} - 2)\cdot e$.

Da e teilerfremd zur Primzahl 19 ist, muß 19 ein Teiler von $10^{m-1} - 2$ sein; also läßt 10^{m-1} bei Division durch 19 den Rest 2.

Die folgende Tabelle gibt für m = 2, 3, 4, ... den 19er-Rest von 10^{m-1} an:

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Rest	10	5	12	6	3	11	15	17	18	9	14	7	13	16	8	4	2

Der kleinste Wert m aus {2, 3, 4, ...}, für den 19 Teiler von $10^{m-1} - 2$ ist, ist also 18. Einsetzen von $m \geq 18$ in (1) ergibt (2): $19a \geq (10^{17} - 2)\cdot e$. Da e die erste Ziffer von 2k (in der Standarddarstellung) ist und k gleiche Stellenanzahl wie $2k\ (= f(k))$ hat, muß e größer als 1 sein. Nach (2) gilt also $19a \geq (10^{17} - 2)\cdot 2$; dies ist äquivalent zu $a \geq \frac{2}{19}(10^{17} - 2)$, somit kann man wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} k = 10a + e &\geq \tfrac{20}{19}(10^{17} - 2) + 2 \\ &= \tfrac{20}{19}(99\,999\,999\,999\,999\,998) + 2 \\ &= 20 \cdot 5\,263\,157\,894\,736\,842 + 2 \\ &= 105\,263\,157\,894\,736\,842 \\ &= n. \end{aligned}$$

Also ist, wie zu zeigen war, $k \geq n$; es gibt keine kleinere positive ganze Zahl als n mit der verlangten Eigenschaft.

Bemerkung

Der angegebene Minimalitätsbeweis zeigt zugleich eine Möglichkeit, wie man die gesuchte Zahl n finden kann.

Zweiter Beweis

Die Zahl $k = \sum_{i=1}^{m} s_i \cdot 10^{i-1}$ mit $s_m \neq 0$, $s_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ hat in ihrer Standarddarstellung m Stellen ; beginnt man die Stellennumerierung mit der Einerstelle, ist hierbei s_i die i-te Stelle. Die positive ganze Zahl k möge nun die Bedingung f(k) = 2k erfüllen. Wenn zu k in der oben angegebenen Weise die Ziffernfolge $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ gehört, ist dann 2k die Ziffernfolge $(s_2, s_3, \ldots, s_m, s_1)$ zugeordnet. Nach dem Algorithmus für die Multiplikation mit 2 erhält man zur positiven Ziffer s_1 als Startwert und mit $u_1 = 0$ die folgende Bedingung:

Für $i = 1, 2, 3, \ldots, m-1$ hat man $s_{i+1} = (2s_i + u_i)$ MOD 10, $u_{i+1} = (2s_i + u_i)$ DIV 10, hierbei ist x MOD 10 der Zehnerrest von x und x DIV 10 der ganzzahlige Bestandteil von x:10; (u_i) ist die Folge der bei der Multiplikation auftretenden Überträge.

Man betrachte nun die <u>unendlichen</u> Folgen (s_i) und (u_i) mit Startwert $s_1 = 1$, die durch die angegebene Rekursion erklärt sind:

i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19 ...
s_i:	1	2	4	8	6	3	7	4	9	8	7	5	1	3	6	2	5	0	1 ...
u_i:	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0 ...

Man stellt fest:

(1) Die Folge (s_i) ist sofort-periodisch mit Periodenlänge 18.

(2) Innerhalb der Periode tritt jede positive Ziffer einmal zugleich mit dem Übertrag 0 auf, jede von 1 verschiedene positive Startziffer s_1 führt also ebenfalls zu einer periodischen Folge mit Periodenlänge 18, wobei die Ziffernfolge innerhalb der Periode gegenüber dem Spezialfall mit $s_1 = 1$ lediglich zyklisch vertauscht ist.

Entsteht die Teilfolge $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ durch Wahl eines Anfangsstücks mit einer auf 0 endenden Periode (also bei $s_1 = 1$), so entspricht dieser Folge <u>nicht</u> die Standarddarstellung einer Zahl. Daher hat man mit n = 052631578947368421 und entsprechend 2n = 105263157894736842 <u>keine</u> Zahl mit der gewünschten Eigenschaft.

Alle Lösungen der Gleichung f(n)=2n haben offenbar 18 Stellen (oder ein Vielfaches davon); die kleinste Lösung ist die mit der kleinsten Anfangsziffer und der minimalen Stellenanzahl 18, also die zu $s_1 = 2$ gehörende Zahl n = 105263157894736842.

Dritter Beweis (skizziert)

Unter den natürlichen Zahlen sei n die kleinste mit der Eigenschaft f(n) = n; die Standarddarstellung von n sei $a_k a_{k-1} \ldots a_0$.

Für die rationale Zahl x mit der periodischen Dezimaldarstellung

$$x = 0,\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0} = \frac{n}{10^{k+1}-1} \quad \text{gilt:}$$

$$\frac{a_0 + x}{10} = \frac{1}{10} \cdot a_0,\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0} = 0,a_0\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0} = 0,\overline{a_0 a_k a_{k-1} \ldots a_1}$$

$$= \frac{a_0 a_k \ldots a_1}{10^{k+1}-1} = \frac{f(n)}{10^{k+1}-1} = \frac{2n}{10^{k+1}-1} = 2x ,$$

also $a_0 + x = 20x$ und somit (*): $x = \frac{a_0}{19}$.

$a_0 = 0$ kommt nicht in Frage, weil sonst x = 0, n = 0 wäre.

$a_0 = 1$ führt wegen $\frac{1}{19} = 0,\overline{05 \ldots 1}$ zu $a_k = 0$.

Der kleinsten Zahl n mit der gewünschten Eigenschaft entspricht die kleinste Zahl x in (*).

Folglich ist n die primitive Periode von $\frac{2}{19}$ $\left(= 0,\overline{105263157894736842} \right)$.

Aufgabe 2

Es werden alle n-stelligen Wörter aus dem Ziffern-Alphabet $\{0;1\}$ betrachtet. Diese 2^n Wörter sollen so in einer Folge $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{2^n-1}$ angeordnet werden, daß w_m aus w_{m-1} durch Ändern einer einzigen Ziffer entsteht ($m = 1, 2, 3, \ldots, 2^n-1$).
Man weise nach, daß der folgende Algorithmus dies leistet:

1. Starte mit $w_0 = 000\ldots00$.
2. Es sei $w_{m-1} = a_1a_2a_3\ldots a_n$ mit $a_i \in \{0;1\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Bestimme den Exponenten $e(m)$ der höchsten Zweierpotenz, die m teilt, und setze $j = e(m)+1$. Ersetze in w_{m-1} die Ziffer a_j durch $1-a_j$; so entsteht w_m.

Erste Lösung

Abweichend von der Behauptung wird gezeigt, daß der Algorithmus für jeden beliebigen n-stelligen Startwert w_0 alle n-stelligen Wörter aus dem Alphabet $\{0;1\}$ liefert. Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach n geführt.
Für $\mathbf{n=1}$ gibt es nur die Wörter 0 und 1. Startet man mit $w_0 = 0$ bzw. $w_0 = 1$, so erhält man $w_1 = 1$ bzw. $w_1 = 0$, da $e(1) = 0$, also $j = 1$ ist, und somit beim Übergang von w_0 zu w_1 die Ziffer a_1 zu $1-a_1$ wird.
Zum Schluß $\mathbf{n \to n+1}$ wird angenommen, daß der Algorithmus für die natürliche Zahl n und jeden beliebigen n-stelligen Startwert v_0 die 2^n Wörter $v_0, v_1, \ldots, v_{2^n-1}$ der Länge n aus dem Alphabet $\{0;1\}$ auf die verlangte Weise liefert.
Man beginnt nun mit einem beliebigen Wort w_0 der Länge $n+1$ aus dem Alphabet $\{0;1\}$. Dieses läßt sich als u_0x schreiben, wobei $x \in \{0;1\}$ und u_0 ein Wort der Länge n aus dem vorgegebenen Alphabet ist. Der vorgegebene Algorithmus liefert mit seinen ersten 2^n-1 Schritten aus w_0 ($=v_0x$) offensichtlich genau die Wörter $w_i = v_ix$ ($i = 1, 2, \ldots, 2^n-1$), die aus den entsprechenden Wörtern v_i der Länge n durch Anhängen von x erhalten werden. Der Stellenindex $j = n+1$ kann ja nicht erreicht werden, weil dann $e(m) = n$ sein müßte. Dieser Fall tritt erst ein für $m = 2^n$; hier ist $e(m) = n$, also $j = n+1$, somit wird die letzte Ziffer x durch $1-x$ ($=: y$) ersetzt.
Von $w_{2^n-1} = v_{2^n-1}x$ gelangt man also in diesem Schritt zu $w_{2^n} = v_{2^n-1}y$.
Bei den weiteren Schritten wird diese Ziffer y nie mehr verändert, da kein weiterer durch 2^n teilbarer Index auftritt - die Folge endet ja bei $w_{2^{n+1}-1}$.
Bezeichnet man v_{2^n-1} mit u_0, so ist $w_{2^n} = u_0y$ und $w_{2^n+k} = u_ky$, wobei $u_0, u_1, \ldots, u_{2^n-1}$ diejenige Folge ist, die der Algorithmus aus dem n-stelligen Wort u_0 erzeugt.
Insgesamt erhält man also für $w_0, w_1, \ldots, w_{2^{n+1}-1}$ die Folge $v_0x, v_1x, \ldots, v_{2^n-1}x, u_0y, u_1y, \ldots, u_{2^n-1}y$. Nach Induktionsvoraussetzung sind in den Folgen (v_m) und (u_m) die Glieder jeweils paarweise verschieden, außerdem ist $x \neq y$. Daher sind auch alle 2^{n+1} Glieder der Folge $w_0, w_1, \ldots, w_{2^{n+1}-1}$ paarweise verschieden.

Vorbemerkung zur Schreibweise in den weiteren Lösungen

In den nachfolgenden Lösungsbeispielen werden *Intervalle* stets in der Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen gebildet; mit $[a,b]$ ($a,b \in \mathbb{N}_0$) wird also die Menge aller $k \in \mathbb{N}_0$ mit $a \leq k \leq b$ bezeichnet.

Zweite Lösung

Die größte m teilende Zweierpotenz ($m \in \{1, 2, \ldots, 2^n-1\}$) ist genau dann 2^i, wenn m von der Form $u \cdot 2^i$ mit ungeradem u ist. Daher ändert sich genau dann die i-te Ziffer a_i beim Übergang von w_{m-1} zu w_m, wenn m die Darstellung $u \cdot 2^{i-1}$ (u un-

gerade) hat.
Da ein Intervall $\mathbf{I}$ der Form $[z\cdot 2^{i-1}, (z+1)\cdot 2^{i-1}-1]$ $(z\in\mathbb{N}_0)$ außer dem ersten Element keine durch 2^{i-1} teilbare Zahl enthält, haben alle Wörter w_m mit $m\in\mathbf{I}$ die gleiche i-te Ziffer a_i. Da $\mathbf{I}$ andererseits (für $i\geq 2$) genau eine Zahl der Form $u\cdot 2^{i-2}$ enthält, nämlich $m' = (2z+1)\cdot 2^{i-2}$, ändern sich die (i+1)-ten Ziffern nur beim Übergang von $w_{m'-1}$ zu $w_{m'}$, also in der Mitte des Indexintervalls.
Zum in der Aufgabenstellung geforderten Nachweis genügt es nun, zu zeigen, daß für verschiedene Indizes m_1, m_2 $(0\leq m_1<m_2\leq 2^n-1)$ stets $w_{m_1}\neq w_{m_2}$ gilt. Hierzu ist äquivalent, daß aus $w_{m_1}=w_{m_2}$ $(0\leq m_1\leq m_2\leq 2^n-1)$ folgt, daß m_1 und m_2 gleich sind.
Es gelte also $w_{m_1}=w_{m_2}$.
Da sich die letzten Ziffern der Wörter w_m mit Indizes m aus dem Intervall von 0 bis 2^n-1 nur einmal ändern, nämlich bei $m = 2^{n-1}$, müssen m_1 und m_2 im gleichen der beiden Intervalle $[0, 2^{n-1}-1]$ bzw. $[2^{n-1}, 2^n-1]$ liegen; es werde mit $\mathbf{I}_1$ bezeichnet. Also gilt

(n): $\quad m_2-m_1 < 2^{n-1}$.

Im Falle n=1 ist man fertig, da aus (n) dann $m_2=m_1$ folgt. Andernfalls geht man zur Betrachtung der (n-1)-ten Ziffer über. Nach der obigen Überlegung ändert sich diese Ziffer in dem Intervall $\mathbf{I}_1$ nur einmal, nämlich in der Mitte. Somit müssen m_1 und m_2 in dem gleichen, halb so großen Intervall $\mathbf{I}_2$ liegen; es gilt also

(n-1): $\quad m_2-m_1 < 2^{n-2}$.

Im Falle n=2 ist man fertig. Andernfalls geht man zur Betrachtung der (n-2)-ten Ziffer über und folgert analog (n-2): $m_2-m_1 < 2^{n-3}$. Die n-malige Durchführung dieser Betrachtung ergibt schließlich (1): $m_2-m_1 < 2^0$, also $m_1 = m_2$.

Dritte Lösung

Die 2^n-gliedrige Folge $w_0, w_1, \ldots, w_{2^n-1}$ sei gemäß dem Algorithmus der Aufgabenstellung erzeugt. Es ist zu zeigen, daß für zwei ganze Zahlen r, s mit $0\leq r<s\leq 2^n-1$ stets die Folgenglieder w_r und w_s verschieden sind.
Zu vorgegebenem r und s sei z der maximale Wert von e(m) für $m\in[r+1,s]$. Für mindestens ein m_0 aus $[r+1,s]$ gilt dann $e(m_0) = z$ und somit $m_0 = u\cdot 2^z$, wobei u eine ungerade natürliche Zahl ist. Die beiden Vielfachen von 2^z mit dem kleinsten Abstand zu m_0 sind $m_- = (u-1)\cdot 2^z$ und $m_+ = (u+1)\cdot 2^z$. Da u-1 und u+1 gerade Zahlen sind, gilt $e(m_-)\geq z+1$ und $e(m_+)\geq z+1$. Nach Definition von z müssen also m_- und m_+ außerhalb von $[r+1,s]$ liegen; wegen $m_- < m_0 < m_+$ und $m_0\in[r+1,s]$ folgt daher $m_- < r+1 \leq s < m_+$. Also ist m_0 im Intervall $[r+1,s]$ die einzige Zahl m mit e(m) = z. Somit sind gemäß Algorithmus die (z+1)-ten Ziffern von w_r und w_s verschieden.

Vierte Lösung

Jeder auftretende Index $m\in\{0,1,\ldots,2^n-1\}$ läßt sich auf genau eine Weise als Summe paarweise verschiedener Zweierpotenzen darstellen, also in der Form $m = b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\ldots+b_{n-1}\cdot 2^{n-1}$ mit $b_i\in\{0,1\}$. Umgekehrt liefert jede Wahl eines n-Tupels $(b_0,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})$ aus $\{0,1\}^n$ mit $b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\ldots+b_{n-1}\cdot 2^{n-1}$ eine positive ganze Zahl im Intervall $[0, 2^n-1]$. Definiert man nun für x, y $\in\{0,1\}$ die Verknüpfung $\vee$ durch $x \vee y := 0$, falls x=y, sonst $:= 1$ (also als Summe modulo 2 bzw. xor), so kann man hiermit die Folge (w_m) explizit angeben. Es gilt nämlich:

(*) Gehört zu $m\in\{0,1,\ldots,2^n-1\}$ im obigen Sinn das n-Tupel $(b_0,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})$, so ist $w_m = a_1a_2\ldots a_n$, wobei $a_n = b_{n-1}$ und $a_i = b_i \vee b_{i-1}$ für $i=1,2,\ldots,n-1$ ist.

Der zu m=0 gehörende Teil von (*) ist offenbar richtig, denn hier sind alle $b_i = 0$ und nach Vorgabe ist $w_0 = 000\ldots0$. Zum Beweis von (*) durch vollständige Induktion über m sei daher nun angenommen, daß für ein $m \in \{1,\ldots,2^n-1\}$ gelte:
$w_{m-1} = c_1c_2c_3\ldots c_n$ mit $c_n = d_{n-1}$ und $c_i = d_i \vee d_{i-1}$ (für $i = 1,2,\ldots,n-1$), wobei $(d_0,d_1,d_2,\ldots,d_{n-1})$ im oben angegebenen Sinne zu $m-1$ gehöre.
Gehört zu m das n-Tupel $(b_0,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})$, so folgt aus der beim Algorithmus gegebenen Definition von e (= e(m)) : $b_0 = b_1 = \ldots = b_{e-1} = 0$ und $b_e = 1$.

Daher ergibt sich $m-1 = 1+1\cdot2+1\cdot2^2+\ldots+1\cdot2^{e-1}+0\cdot2^e+b_{e+1}\cdot2^{e+1}+\ldots+b_{n-1}\cdot2^{n-1}$ und somit $(d_0,d_1,\ldots d_{e-1},d_e,d_{e+1},\ldots,d_{n-1}) = (1,1,\ldots,1,0,b_{e+1},\ldots,b_{n-1})$.
Die Anwendung der Induktionsvoraussetzung liefert hieraus
$c_1 = c_2 = \ldots = c_{e-1} = 1 \vee 1 = 0, \quad c_e = 1, \quad c_{e+1} = d_{e+1}$.
Der Algorithmus führt von $w_{m-1} = c_1c_2c_3\ldots c_n$ zum Wort $w_m = a_1a_2a_3\ldots a_n$, wobei $a_{e+1} = 1 - c_{e+1}$ und $a_i = c_i$ für $i \neq e+1$ ist.
Somit ist

$$\begin{aligned}
a_i &= 0 = 0 \vee 0 = b_i \vee b_{i-1} \quad \text{für } i = 1,2,\ldots,e-1;\\
a_e &= c_e = 1 = 1 \vee 0 = b_e \vee b_{e-1};\\
a_{e+1} &= 1 - c_{e+1} = 1 - d_{e+1} = 1 - b_{e+1} = 1 \vee b_{e+1} = b_{e+1} \vee b_e.\\
a_i &= c_i = d_i \vee d_{i-1} = b_i \vee b_{i-1} \quad \text{für } i = e+2, e+3,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Das Wort w_m läßt sich also gemäß der in (*) angegebenen Vorschrift konstruieren. Damit ist die Richtigkeit von (*) nachgewiesen.
Zu jedem n-stelligen Wort $a_1a_2a_3\ldots a_n$ gibt es einen Index $m \in \{1,\ldots,2^n-1\}$ mit $w_m = a_1a_2a_3\ldots a_n$. Denn nach Start mit $b_{n-1} = a_n$ lassen sich die weiteren Ziffern a_i für $i = n-1, n-2,\ldots,1$ rekursiv durch $b_{i-1} = a_i \vee b_i$ berechnen; die letztgenannte Gleichung ergibt sich durch Auflösung von $a_i = b_i \vee b_{i-1}$ nach b_i.
Da zu den 2^n Indizes alle 2^n n-stelligen Wörter über $\{0,1\}$ erhalten werden, liefert die Folge (w_m) eine Anordnung der betrachteten Wörter, bei der sich benachbarte Wörter in genau einer Ziffer unterscheiden (nämlich Ziffer e(m)+1 für die Wörter w_{m-1} und w_m). Damit sind die geforderten Eigenschaften nachgewiesen.

Aufgabe 3

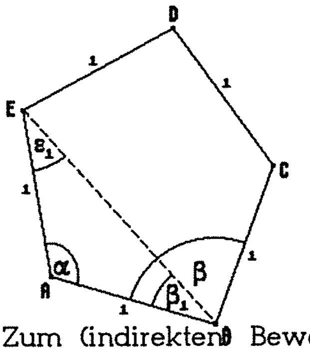
Gegeben ist ein konvexes, gleichseitiges Fünfeck. Über den Seiten dieses Fünfecks werden nach innen gleichseitige Dreiecke errichtet.
Man beweise, daß mindestens eines dieser Dreiecke nicht über den Rand des Fünfecks hinausragt.

Erste Lösung

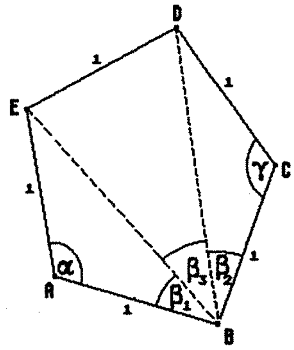
Zu den Zeichnungen in der folgenden Lösung sei bemerkt, daß lediglich die Lage von Punkten, Winkeln und Strecken dargestellt (und so besser gemerkt) werden soll; dagegen wird - im Interesse einer einheitlichen Grundfigur - die Winkelgröße stets unverändert dargestellt, unabhängig davon, ob z.B. der Winkel in der zugehörigen Überlegung als spitz oder stumpf vorausgesetzt wird.
Die Eckpunkte des Fünfecks seien mit A, B, C, D, E bezeichnet, die zugehörigen Winkelgrößen seien α, β, γ, δ und ε. Als Längeneinheit wird die Länge der Fünfecksseite gewählt, die Seitenlänge ist also 1. Als für den Beweis wesentlicher Hilfssatz wird (neben dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck) benutzt, daß im Dreieck die Größenanordnung der Seitenlängen der Größenanordnung der gegenüberliegenden Winkel entspricht.
Zunächst wird gezeigt: (1) Mindestens vier der Innenwinkel des gleichseitigen Fünfecks sind nicht kleiner als 60°.

Aus Symmetriegründen genügt es, unter der Voraussetzung $\alpha \le 60^\circ$ zu beweisen:

(1a) $\beta \ge 60^\circ$ und (1b) $\gamma \ge 60^\circ$.

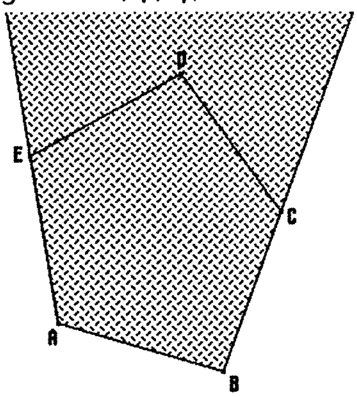


Zum Beweis von (1a) betrachte man in der links skizzierten Figur das gleichschenklige Dreieck ABE.
Wegen $\alpha \le 60^\circ$ gilt für die Größen β_1 und ε_1 der Basiswinkel in $\triangle ABE$: $\varepsilon_1 = \beta_1 \ge 60^\circ$, also $\beta > \beta_1 \ge 60^\circ$.
Somit folgt, wie zu zeigen war, : $\beta \ge 60^\circ$ (sogar $\beta > 60^\circ$).
Da im Dreieck ABE der kleinste Winkel zu A gehört, ist EB die kleinste Seite; es gilt also $\overline{EB} \le 1$.



Zum (indirekten) Beweis von (1b) nimmt man nun an, es gelte neben $\alpha \le 60^\circ$ auch noch $\gamma < 60^\circ$. Dann ergibt sich analog zur obigen Folgerung, daß $\overline{BD}$ kleiner als 1 ist. Im gleichschenkligen Dreieck BCD beträgt also die Weite β_2 des Winkels an der Ecke B mehr als 60°.
Da im Dreieck BDE die Seiten EB und BD nicht größer als 1, also nicht größer als die dritte Seite ED sind, ist der Winkel an der Ecke B der größte; für seine Weite gilt also $\beta_3 \ge 60^\circ$.
Mit $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ hat man damit einen Widerspruch zur vorausgesetzten Konvexität des gegebenen Fünfecks ABCDE. Die Annahme $\gamma < 60^\circ$ ist also falsch; es gilt (1b).

Die Eckenbezeichnung bei dem gleichseitigen Fünfeck sei nachfolgend so gewählt, daß der kleinste Innenwinkel den Scheitel D hat. Nach (1) sind dann die Winkelgrößen α, β, γ, ε nicht kleiner als 60°.

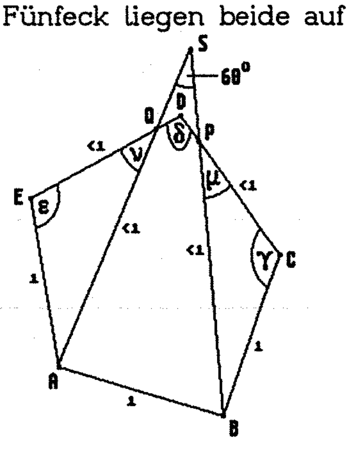


Errichtet man daher über der Seite AB ein gleichseitiges Dreieck ABS, so liegt die Ecke S in der gleichen (abgeschlossenen) Halbebene der Gerade (AE), in der gleichen Halbebene der Geraden (AB) und in der gleichen Halbebene der Geraden (BC) wie das Fünfeck; die Skizze links zeigt den (gerasterten) Bereich, in dem S liegen muß.
Es wird nun angenommen, daß S im gerasterten Bereich außerhalb des Fünfecks liegt. Wegen $\varepsilon \ge 60^\circ$ und $\gamma \ge 60^\circ$ gilt $\overline{AD} \ge 1$ und $\overline{BD} \ge 1$; S kann daher nicht auf einer der Geraden (AD), (BD) liegen.

Die folgenden beiden Fälle sind als widersprüchlich nachzuweisen:

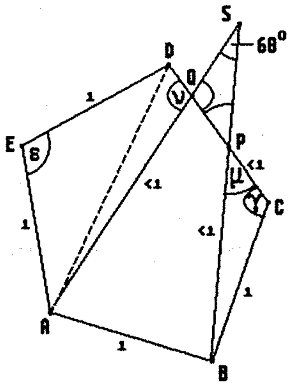
(F1) BS schneidet CD, AS schneidet DE.

(F2) Die Schnittpunkte von AS und von BS mit dem Fünfeck liegen beide auf CD; (analog: ... liegen beide auf ED).



<u>Zu (F1):</u> Der Schnittpunkt von BS mit CD sei mit P, der Schnittpunkt von AS mit DE sei mit Q bezeichnet. Der Winkel BPC habe die Größe μ, die Größe des Winkels EQA sei mit ν bezeichnet. Wegen $\gamma \ge 60^\circ$ und $\overline{BC} = \overline{BS} > \overline{BP}$ ergibt sich $\mu > 60^\circ$, analog ist $\nu > 60^\circ$. Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt und Scheitelwinkel gleich groß sind, bleiben daher im Viereck QDPS für den Winkel PDQ weniger als 180°. Somit ist δ größer als 180° - mit Widerspruch zur Konvexität des Fünfecks.

Zu (F2): Die Schnittpunkte von BS bzw AS mit CD



seien mit P bzw. Q bezeichnet. ν sei die Größe von Winkel DQA, μ sei die Größe von Winkel BPC. Analog zu (F1) ergibt sich $\mu > 60^\circ$, da $\gamma \geq 60^\circ$ ist und der Winkel der Größe μ der größten Seite im Dreieck BCP gegenüberliegt.

Im gleichschenkligen Dreieck ADE muß wegen $\varepsilon \geq 60^\circ$ die Seite AD die längste sein. Da $\overline{AQ}$ und $\overline{DQ}$ kleiner als 1 sind, ist AD länger als die beiden anderen Seiten im Dreieck AQD, es folgt also $\nu > 60^\circ$.

Da Scheitelwinkel gleich groß sind, ergibt sich für die Winkelsumme im Dreieck QPS daher der 180° übersteigende Wert $60^\circ + \nu + \mu$; damit hat man den gewünschten Widerspruch.

Der Punkt S - und somit das ganze gleichseitige Dreieck ABS - wird daher vom gegebenen gleichseitigen Fünfeck bedeckt.

Bemerkungen

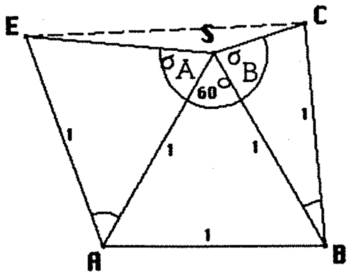
1. Aus dem Nachweis zu (1a) ergibt sich etwas schärfer als behauptet, daß die Nachbarwinkel zum kleinsten Winkel im Fünfeck sogar größer als 60° sein müssen.
2. Anstelle von (F1) und (F2) kann man schärfer zeigen, daß S unter den gleichen Voraussetzungen bezüglich δ sogar in der gleichen Halbebene von (CE) wie die Punkte A und B liegt.

Zweite Lösung

Als Einheitsstrecke wird wieder die Seite des Fünfecks verwendet. Ein Winkel im vorgegebenen gleichseitigen Fünfeck heiße *ausgezeichnet*, wenn seine Größe mindestens 60° und höchstens 120° beträgt.

(1) Wenn die zu einer Seite des gleichseitigen Fünfecks gehörenden Innenwinkel beide ausgezeichnet sind, liegt das gleichseitige Dreieck über dieser Seite ganz im Fünfeck.

Zum Nachweis von (1) seien oBdA die zur Seite AB gehörenden Innenwinkel des



Fünfecks ausgezeichnet. Die Spitze des gleichseitigen Dreiecks über AB werde mit S bezeichnet. Da die Fläche von Viereck ABCE eine konvexe Teilmenge der Fünfecksfläche ist, genügt es zu zeigen, daß S zu dieser Viereckfläche gehört, die Strecken AS und BS also (außer ggfs S) keine Schnittpunkte mit der Strecke CE haben.

Im gleichschenkligen Dreieck SEA sei σ_A die Größe des Innenwinkels an der Ecke S; entsprechend sei σ_B die Größe des Innenwinkels an der Ecke S im gleichschenkligen Dreieck CSB. Da der Winkel SAE nicht größer als 60° ist, folgt $\sigma_A \geq 60^\circ$. In analoger Weise ergibt sich $\sigma_B \geq 60^\circ$; somit ist der Winkel ESC nicht kleiner als 180°, seine Weite beträgt ja $\sigma_A + 60^\circ + \sigma_B$. S liegt also nicht außerhalb von Viereck ABCE. Damit ist (1) bewiesen.

Winkel, deren Weite weniger als 60° beträgt, werden nachfolgend als *klein*, Winkel, deren Weite mehr als 120° beträgt, werden nachfolgend als *groß* bezeichnet. Dabei kann die Weite eines großen Winkels wegen der geforderten Konvexität des Fünfecks nicht mehr als 180° betragen. Es wird nun nacheinander gezeigt:

(2) Im vorgelegten Fünfeck können nicht zwei benachbarte Winkel groß sein.

(3) Im vorgelegten Fünfeck können nicht zwei benachbarte Winkel klein sein.

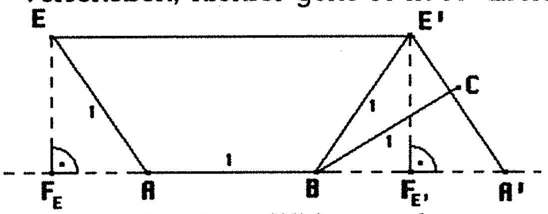
(4) Im vorgelegten Fünfeck kann ein kleiner Winkel nicht zu einem ausgezeichne-

ten Winkel benachbart sein.

Dann folgt nach (2), daß im gegebenen Fünfeck höchstens zwei Winkel groß sind, da unter drei von fünf Ecken immer zwei benachbarte sind. Es gibt also in dem Fünfeck mindestens drei nicht große Winkel. Von drei nicht großen Winkeln müssen zwei benachbart sein, von diesen kann nach (3) und (4) keiner ein kleiner sein, sie sind also beide ausgezeichnet. Nach (1) ergibt sich damit die Behauptung der Aufgabe.

Zum Abschluß der Lösung sind also nur noch die Beweise zu (2), (3) und (4) zu erbringen.

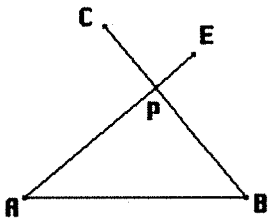
Zu (2): OBdA sei angenommen, daß die Innenwinkel an den Ecken A und B groß sind: $120^\circ < \alpha \le \beta \le 180^\circ$. E' entstehe durch Spiegelung von E an der Mittelsenkrechten von AB. Von E und E' werden die Lote auf (AB) gefällt; die Fußpunkte seien F_E und $F_{E'}$. Schließlich wird das Dreieck AEF_E um $F_EF_{E'}$ verschoben; hierbei gehe A in A' über.



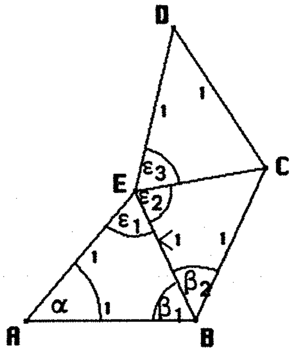
Da die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BA'E' kleiner als 60° sind, ist BA' die längste Seite, also größer als 1. Die Dreiecksungleichung liefert damit den gewünschten Widerspruch; man erhält nämlich:

$2 = \overline{CD} + \overline{DE} \ge \overline{EC} \ge \overline{EE'} = \overline{F_EF_{E'}} = \overline{AB} + \overline{BA'} = 1 + \overline{BA'} > 1 + 1 = 2$, also $2 < 2$.

Zu (3): (Indirekt) Es seien oBdA die Innenwinkel an den Ecken A und B klein. Der Schnittpunkt der Geraden (AE) und (BC) sei P. Da die Summe der Innenwinkel bei A und B kleiner als 120° ist, hat der Innenwinkel bei P eine Weite über 60°, ist also der größte Winkel im Dreieck ABP. Somit ist AB die längste Seite; die Längen von AP und BP sind also kleiner als 1. Mithin liegen C und E außerhalb der Dreiecksseiten. Die Fünfecksseiten AE und BC schneiden sich also - im Widerspruch zur Konvexität des Fünfecks.



Zu (4): OBdA sei der Innenwinkel des Fünfecks an der Ecke A klein, der Innenwinkel bei B ausgezeichnet; es gelte also $0^\circ < \alpha < 60^\circ \le \beta \le 120^\circ$. Die Größen der Innenwinkel mit Scheitel E in den Dreiecken ABE, BCE, CDE werden mit ε_1, ε_2, ε_3 bezeichnet. Wäre das Fünfeck konvex, wäre der Winkel AED nicht weiter als ein gestreckter, die Summe $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ könnte also nicht größer als 180° sein.



Im gleichschenkligen Dreieck ABE mit Basis BE müssen wegen $\alpha < 60^\circ$ beide Basiswinkel größer als 60° sein; insbesondere folgt also $\varepsilon_1 > 60^\circ$. Da die Seite BE im Dreieck ABE dem kleinsten Winkel gegenüberliegt, ist ihre Länge kleiner als 1. Wegen $60^\circ \le \beta \le 120^\circ$ und $\beta_1 > 60^\circ$ ergibt sich $\beta_2 < 60^\circ$

Wäre die Länge der Seite EC des Dreiecks BCE nicht kleiner als 1, so wäre sie längste Seite in diesem Dreieck, was wegen $\beta_2 < 60^\circ$ nicht der Fall ist. Also ist BC die längste Seite und somit $\varepsilon_2 > 60^\circ$.

Da (wegen $\overline{EC} < 1$) EC kürzeste Seite im gleichschenkligen Dreieck CDE ist, folgt schließlich $\varepsilon_3 > 60^\circ$.

Damit hat man mit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 180^\circ$ den gewünschten Widerspruch.

Aufgabe 4

Für drei Zahlenfolgen (x_n), (y_n), (z_n) mit positiven Anfangsgliedern x_1, y_1, z_1 gelte

$x_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n}$, $z_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Man beweise:

a) Keine der drei Folgen ist nach oben beschränkt.

b) Mindestens eine der Zahlen x_{200}, y_{200}, z_{200} ist größer als 20 .

Vorbemerkung

Nach Voraussetzung sind die Anfangsglieder x_1, y_1, z_1 - und somit auch ihre Kehrwerte - positiv. Da die Summe positiver Zahlen wieder positiv ist, folgt aus der rekursiven Definition hiermit unmittelbar durch Induktion, daß alle drei Folgen aus positiven Gliedern bestehen.
Wäre eine der Folgen (x_n), (y_n), (z_n) durch eine Zahl s nach oben beschränkt, so wären alle drei Folgen durch s nach oben beschränkt, denn aus der Definition der Folgen ergibt sich die Ungleichungskette $x_{n+3} > y_{n+2} > z_{n+1} > x_n$. Dann wäre durch 3s auch die Summenfolge $(x_n + y_n + z_n)$ nach oben beschränkt.
Zum Nachweis von Behauptung a) genügt es also, zu zeigen, daß eine der vier Folgen (x_n), (y_n), (z_n) , $(x_n + y_n + z_n)$ nach oben nicht beschränkt ist.
Diese Vorbemerkung ist Teil der Lösung und gehört zu den nachfolgend angegebenen Lösungsvarianten.

Erste Lösung

Für $n \in \mathbb{N}$ setze man $s_n := (x_n + y_n + z_n)^2$. Dann gilt

(1) $s_n \geq 18n$ für jedes n aus $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, wobei für $n \geq 3$ sogar schärfer ">" gilt,

wie nachfolgend durch vollständige Induktion gezeigt wird. Hierbei wird die für alle positiven Zahlen x gültige Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ benutzt, die z.B. unmittelbar aus der Kette $x + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} - 2 + 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2$ folgt.

Für <u>n=2</u> hat man
$$\begin{aligned} s_2 &= (x_2 + y_2 + z_2)^2 = \left(y_1 + \frac{1}{z_1} + z_1 + \frac{1}{x_1} + x_1 + \frac{1}{y_1}\right)^2 \\ &= \left((y_1 + \frac{1}{y_1}) + (z_1 + \frac{1}{z_1}) + (x_1 + \frac{1}{x_1})\right)^2 \\ &\geq (2+2+2)^2 = 36, \quad \text{also } s_2 \geq 18 \cdot 2. \end{aligned}$$

Gilt nun für eine natürliche Zahl n $(n \geq 2)$ die Ungleichung $s_n \geq 18n$, so ergibt sich hiermit:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= (x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1})^2 \\ &= \left(y_n + \frac{1}{z_n} + z_n + \frac{1}{x_n} + x_n + \frac{1}{y_n}\right)^2 \\ &= (y_n + z_n + x_n)^2 + \left(\frac{1}{z_n} + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}\right)^2 + 2 \cdot (y_n + z_n + x_n) \cdot \left(\frac{1}{z_n} + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}\right) \\ &> \quad s_n + 2 \cdot \left(y_n \cdot \frac{1}{z_n} + y_n \cdot \frac{1}{x_n} + 1 + 1 + z_n \cdot \frac{1}{x_n} + z_n \cdot \frac{1}{y_n} + x_n \cdot \frac{1}{z_n} + 1 + x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) \\ &\geq 18n + 2 \cdot \left(3 + (y_n \cdot \frac{1}{z_n} + z_n \cdot \frac{1}{y_n}) + (x_n \cdot \frac{1}{z_n} + z_n \cdot \frac{1}{x_n}) + (x_n \cdot \frac{1}{y_n} + y_n \cdot \frac{1}{x_n})\right) \\ &\geq 18n + 2 \cdot (3+2+2+2) \\ &= 18n + 18 = 18 \cdot (n+1). \end{aligned}$$

Die Gültigkeit von (1) ist damit nachgewiesen.

Die nach oben nicht beschränkte Folge $\left(\sqrt{18n}\right)$ ist also (für $n\geq 2$) eine Minorante zur Folge mit dem allgemeinen Glied $x_n+y_n+z_n$, die mithin ebenfalls nach oben nicht beschränkt ist. Gemäß Vorbemerkung folgt hieraus Teil a) der Behauptung.
Wegen $x_{200}+y_{200}+z_{200} = \sqrt{s_{200}} > \sqrt{18\cdot 200} = 60$ muß mindestens einer der drei Summanden x_{200}, y_{200}, z_{200} größer als 20 sein; damit ist auch Teil b) der Behauptung bewiesen.

Zweite Lösung

Man definiert rekursiv eine Vergleichsfolge (v_n), indem man setzt:

$v_1 := x_1\,,\quad v_{n+1} := v_n + \frac{1}{v_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Dann gilt:

(1) Für jedes n aus $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ gilt $v_n \geq \sqrt{2n}$; für $n\geq 3$ gilt sogar $v_n > \sqrt{2n}$.

(2) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist die Ungleichung $\max(x_n, y_n, z_n) \geq v_n$ erfüllt.

Da nach (1) die Folge (v_n) nach oben nicht beschränkt ist, können wegen (2) nicht alle drei Folgen (x_n), (y_n), (z_n) nach oben beschränkt sein. Gemäß Vorbemerkung folgt hieraus Teil a) der Behauptung in der Aufgabenstellung. Da man aus (1) und (2) speziell für $n=200$ die Kette $\max(x_{200}, y_{200}, z_{200}) \geq v_{200} > \sqrt{400} = 20$ erhält, ist mindestens eine der Zahlen x_{200}, y_{200}, z_{200} größer als 20; dies war zu Teil b) zu zeigen.

Es sind also nur noch die Nachweise zu (1) und zu (2) zu erbringen.

Zu (1): Für $n=2$ hat man $v_2 = v_1 + \frac{1}{v_1} = \left(\sqrt{v_1} - \frac{1}{\sqrt{v_1}}\right)^2 + 2 \geq 2 = \sqrt{2\cdot 2}$. Setzt man nun für eine natürliche Zahl n $(n\geq 2)$ die Gültigkeit der Ungleichung $v_n \geq \sqrt{2n}$ voraus, so erhält man

$v_{n+1}^{\,2} = \left(v_n + \frac{1}{v_n}\right)^2 = v_n^{\,2} + 2 + \left(\frac{1}{v_n}\right)^2 > 2n + 2 = 2\cdot(n+1)$, also $v_{n+1} > \sqrt{2(n+1)}$.

Damit ist der Induktionsbeweis zu (1) erbracht.

Zu (2): Die Behauptung gilt für n=1, denn man hat $\max(x_1, y_1, z_1) \geq x_1 = v_1$.
Zum Schritt von n zu n+1 sei nun für ein $n\in\mathbb{N}$ vorausgesetzt: $\max(x_n, y_n, z_n) \geq v_n$.
Zu zeigen ist dann: $\max(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \geq v_{n+1}$ Hierbei werden die drei Fälle

(x): $\max(x_n, y_n, z_n) = x_n$,
(y): $\max(x_n, y_n, z_n) = y_n$,
(z): $\max(x_n, y_n, z_n) = z_n$ unterschieden.

Im Falle (x) hat man $x_n \geq y_n$ und somit

$$\begin{aligned}\max(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) &= \max\left(y_n + \frac{1}{z_n},\, z_n + \frac{1}{x_n},\, x_n + \frac{1}{y_n}\right)\\ &\geq x_n + \frac{1}{y_n} \geq x_n + \frac{1}{x_n} \geq v_n + \frac{1}{v_n} = v_{n+1}\,.\end{aligned}$$

Dabei wird für die letzte Ungleichung neben der Induktionsannahme $x_n \geq v_n$ die Isotonie $\left(\text{d.h. aus } x\leq y \text{ folgt } f(x)\leq f(y)\right)$ der durch $x \to x+\frac{1}{x}$ auf $[1,\infty[$ definierten Funktion f benutzt. Dieses Monotonieverhalten ergibt sich durch Anwendung des globalen Monotoniesatzes $\left(\text{aus } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \text{ für } x\in[1,\infty[\text{ folgt, daß } f \text{ über } [1,\infty[\text{ isoton ist}\right)$ oder elementar durch die Umformungskette

$x\leq y \Longrightarrow xy\cdot(x-y) \leq x-y \Longrightarrow x^2y+y \leq y^2x+x \Longrightarrow x+\frac{1}{x} \leq y+\frac{1}{y}$ (für $x,y\geq 1$).

Damit ist Fall (x) abgeschlossen; die Fälle (y) und (z) werden analog behandelt; man braucht ja lediglich zyklisch innerhalb x, y, z weiterzugehen.

Hiermit ist der gesamte Beweis abgeschlossen.

Varianten zum Beweis von Teil a)

(V1): Wären alle drei Folgen (x_n), (y_n), (z_n) nach oben beschränkt, so gäbe es eine gemeinsame obere Schranke $s \in \mathbb{R}_+$. Mit $\varepsilon := \frac{1}{s}$ sind dann die Kehrwertfolgen zu den gegebenen Folgen durch die positive Zahl ε nach unten beschränkt; man hat daher gemäß der rekursiven Definition der Folgen für jede natürliche Zahl n die Ungleichungskette

$x_{n+3} \geq y_{n+2} + \varepsilon \geq z_{n+1} + 2\varepsilon \geq x_n + 3\varepsilon$, also (*) $x_{n+3} - x_n \geq 3\varepsilon$.

Summation beider Seiten der Ungleichung (*) für $n = 1, 2, 3, \ldots, k$ liefert

$$x_{k+3} + x_{k+2} + x_{k+1} - x_1 - x_2 - x_3 \geq 3k\cdot\varepsilon;$$

hieraus folgt $3s \geq 3k\cdot\varepsilon$, also $k \leq \frac{s}{\varepsilon}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind, also auch nicht durch $\frac{s}{\varepsilon}$, hat man damit den gewünschten Widerspruch; mindestens eine der Folgen (x_n), (y_n), (z_n) ist somit nicht beschränkt. Gemäß Vorbemerkung reicht dies zur Lösung von Teil a) der Aufgabe.

(V2): Wären alle drei Folgen (x_n), (y_n), (z_n) nach oben beschränkt, so wäre (da alle Folgenglieder positiv sind) auch die Produktfolge $(x_n \cdot y_n \cdot z_n)$ nach oben beschränkt. Dies ist aber nicht der Fall, denn wegen

$$\begin{aligned} x_{n+1} \cdot y_{n+1} \cdot z_{n+1} &= \left(y_n + \frac{1}{z_n}\right)\cdot\left(z_n + \frac{1}{x_n}\right)\cdot\left(x_n + \frac{1}{y_n}\right) \\ &= y_n \cdot z_n \cdot x_n + y_n + \frac{1}{z_n} + z_n + \frac{1}{x_n} + x_n + \frac{1}{y_n} + \frac{1}{z_n x_n y_n} \\ &\geq y_n \cdot z_n \cdot x_n + \left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) + \left(\frac{1}{z_n} + z_n\right) + \left(\frac{1}{x_n} + x_n\right) \\ &\geq y_n \cdot z_n \cdot x_n + 6 \end{aligned}$$

ergibt sich unmittelbar durch vollständige Induktion $y_n \cdot z_n \cdot x_n \geq 6n - 6$. Die untersuchte Produktfolge hat also eine nach oben nicht beschränkte Minorante und ist somit nach oben nicht beschränkt.

Bemerkung

Wenn man bei der letzten Lösung als Vergleichsfolge die (vielleicht manchem aus der vierten Aufgabe der ersten Runde 1991 noch bekannte) Folge mit der Rekursion $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ mit Startwert 1 wählt, mag es naheliegend erscheinen, den zur Abschätzung benötigten Wert a_{200} (= 20,05...) mit einem Taschenrechner (und viel Fleiß) oder mit einem Computer auszurechnen. Dabei ist aber zu bedenken, daß (fast) jede Rechnung mit Gleitkommazahlen auf dem Rechner mit Fehlern behaftet ist, die nur im allgemeinen durch geschicktes Runden verschleiert werden, - so daß z.B. als Resultat von $1/7 \times 7$ wieder 1 und nicht 0.999... herauskommt - , und daß damit bereits die Eingangswerte für die Folgeschritte fehlerhaft sind.

Je nach Konditionierung des jeweiligen Verfahrens kann sich das Ergebnis bei 199-facher Iteration der Rechnung weit vom richtigen Resultat entfernen. Ein solcherart fehlerbehaftetes Ergebnis kann - ohne Untersuchung von Schranken für die jeweils auftretenden Fehler - nicht für eine scharfe Abschätzung verwendet werden.