BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
Ahrstraße 45
5300 Bonn 2

Aufgaben und Lösungen 1992

1. Runde

Stand 25. Mai 1992

Aufgabe 1

Auf dem Tisch stehen zwei Schalen; in der einen liegen p, in der anderen q Spielsteine (p, q $\in \mathbb{N}$). Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd, wobei A beginnt.

Wer am Zug ist,

nimmt aus einer der Schalen einen Stein weg

oder nimmt aus beiden Schalen je einen Stein weg

oder legt einen Stein aus einer der Schalen in die andere.

Gewonnen hat, wer den letzten Stein wegnimmt.

Unter welchen Bedingungen kann A, unter welchen Bedingungen kann B den Gewinn erzwingen ? Die Antwort ist zu begründen.

Lösung

Die Schale mit zunächst p Steinen werde als "linke Schale", die andere als "rechte Schale" bezeichnet.. Für nichtnegative ganze Zahlen m und n bedeute die Darstellung (m, n), daß in der linken Schale m Spielsteine, in der rechten Schale n Spielsteine liegen. Offensichtlich ist so jeder Spielsituation umkehrbar eindeutig eine Darstellung (m, n) mit m, n $\in \{0, 1, 2, ..., p+q\}$ zugeordnet.

Die Startstellung des Spiels ist somit (p, q), das Spiel endet mit der Stellung (0, 0).

Eine Stellung (m, n) heiße genau dann *glatt* , wenn m und n beide gerade sind. Wenn eine Stellung (m, n) nicht glatt - also insbesondere verschieden von (0, 0) ist, gibt es einen Zug, der sie in eine glatte Stellung überführt: Man verringere - gemäß den Regeln des Spiels durch Wegnehmen von einem bzw. zwei Steinen - die ungerade(n) der Zahlen m und n um 1. Hierbei wird die Gesamtanzahl der noch in den Schalen liegenden Steine um mindestens 1 verringert.

Wenn umgekehrt eine Stellung glatt ist, wird sie von jedem der möglichen Züge in eine nichtglatte Stellung übergeführt, denn mindestens eine der beiden geraden Zahlen m und n wird durch einen erlaubten Zug um 1 verringert, also ungerade. Hierbei wird die Gesamtzahl der noch in den Schalen befindlichen Steine nicht vergrößert, sondern bleibt allenfalls - bei Umlegen eines Steines von einer Schale in die andere- gleich.

Da also jeder Spieler, wenn er am Zuge ist, notwendigerweise aus einer glatten Spielstellung in jedem Fall eine nichtglatte macht, wobei die Gesamtzahl der Steine in den Schalen nicht wächst, und stets aus einer nichtglatten Stellung eine glatte machen kann, wobei die Gesamtzahl der noch im Spiele befindlichen Steine abnimmt, ergibt sich folgende Gewinnstrategie für A, falls p oder q ungerade ist:

A erzeugt durch seinen Zug eine glatte Stellung, aus der B jeweils im Gegenzug wieder eine nichtglatte Stellung macht. Da bei jedem Zugpaar von A und B die Gesamtzahl der Steine in den Schalen abnimmt, wird irgendwann die Stellung (0, 0) erreicht - und zwar von A, da diese Stellung glatt ist. A gewinnt also.

Sind hingegen p und q beide gerade, erzeugt A mit seinem ersten Zug zwangsläufig eine nichtglatte Stellung, worauf das Spiel analog zum ersten Fall verläuft - nur mit Vertauschung von A und B.

Genau dann kann also A den Gewinn mit der oben angegebenen Strategie erzwingen, wenn mindestens eine der Zahlen p, q ungerade ist. Andernfalls kann B den Gewinn erzwingen.

Aufgabe 2

Eine natürliche Zahl n heißt genau dann gut, wenn sie sich auf eine und nur eine Weise als Summe mindestens zweier natürlicher Zahlen darstellen läßt, deren Produkt ebenfalls den Wert n hat; hierbei werden Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, als gleich angesehen.

Man bestimme alle guten natürlichen Zahlen.

Lösung

Die folgenden vier Fälle werden für die zu untersuchende natürliche Zahl n nach der Anzahl der Primfaktoren von n unterschieden; hierbei ist mit der Anzahl der Primfaktoren, die Anzahl der Faktoren in der Primfaktorzerlegung gemeint; die Primfaktoren sind also nicht notwendigerweise verschieden.

(1) $n = 1$,

(2) n ist eine Primzahl,

(3) n hat genau zwei Primfaktoren,

(4) n hat mindestens drei Primfaktoren.

Zu (1): Die Zahl 1 läßt sich auf keine Weise als Summe zweier natürlicher Zahlen darstellen; sie ist also nicht gut.

Zu (2): Die Primzahl n läßt sich nur in der Form $n = 1^k \cdot n$ mit $k \in \mathbb{N}$ als Produkt mindestens zweier natürlicher Zahlen darstellen. Da die Summe der Faktoren bei dieser Darstellung $n+k$ beträgt, ist n wegen $n<n+k$ keine gute Zahl.

Zu (3): Die Zahl n hat genau zwei Primfaktoren p und q; oBdA gelte $p \leq q$.

Dann sind $n = p \cdot q$, $n = 1^k \cdot p \cdot q$ mit $k \in \mathbb{N}$ bzw. $n = n \cdot 1^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ die drei einzigen Möglichkeiten, n als Produkt mindestens zweier natürlicher Faktoren darzustellen. Dabei liefert der Unterfall $n = n \cdot 1^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ wegen $n<n+k$ keine Zerlegung der erwünschten Art.

Allgemein gilt $p+q \leq 2q \leq p \cdot q$, wobei Gleichheit an beiden Stellen genau dann vorliegt, wenn $p=q=2$ ist. Der erste Unterfall führt also genau dann zu einer Darstellung der verlangten Art, wenn $n = 4$ ist.

Genau dann ist die Gleichung $1^k \cdot p \cdot q = k \cdot 1 + p + q$ mit $k \in \mathbb{N}$ erfüllt, wenn $k = p \cdot q - p - q$ gilt, also $k = (p-1)(q-1)-1$. Für $n=4$ ist $p=q=2$, also $(p-1)(q-1)-1 = 0$; man erhält daher in diesem Spezialfall keine weitere Darstellung; 4 ist somit gut.

Für alle von 4 verschiedenen Zahlen mit genau zwei Primfaktoren p, q ergibt sich mit $k = (p-1)(q-1)-1$ eindeutig die natürliche Zahl k, mit welcher eine Zerlegung gemäß dem betrachteten Unterfall möglich ist. Alle natürlichen Zahlen mit genau zwei Primfaktoren gehören also zu den guten Zahlen.

Zu (4): Da n mehr als 2 Primfaktoren besitzt, läßt sich für n eine Darstellung der folgenden Form finden: $n = a \cdot b \cdot c$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$, $2 \leq a \leq b \leq c$.

Man definiere die zwei ganzen Zahlen k und m durch $k := abc-a-b-c$ und $m := abc-ab-c$. Dann ist $k \geq m > 0$, wie die folgende Ungleichungskette zeigt:

$k = abc-a-b-c = abc-(a+b)-c \geq abc-ab-c = (ab-1)(c-1)-1 \geq 3 \cdot 1 - 1 = 2 > 0$.

Mit diesen natürlichen Zahlen k und m gewinnt man nun zwei verschiedene Darstellungen der betrachteten Art für n.

1) $n = a \cdot b \cdot c \cdot 1^k = a \cdot b \cdot c - a - b - c + a + b + c = a + b + c + k \cdot 1$

2) $n = (ab) \cdot c \cdot 1^m = ab + c + (abc - ab - c) = ab + c + m \cdot 1$.

Die beiden Darstellungen sind verschieden, da die erste Summe mehr Summanden hat als die zweite.

Keine der natürlichen Zahlen mit mehr als zwei Primfaktoren ist also gut.

Ergebnis: Genau die natürlichen Zahlen sind gut, die genau zwei Primfaktoren haben.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c. Drei Kugeln berühren sich paarweise und berühren außerdem die Ebene des Dreiecks in den Punkten A, B bzw. C.

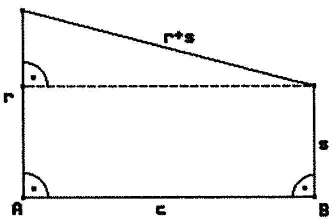
Man bestimme die Radien dieser Kugeln.

Vorbemerkung

Die Ebene des Dreiecks zerlegt den Raum in zwei Halbräume. Offensichtlich liegen alle drei Kugeln im gleichen Halbraum, denn lägen zwei der Kugeln - sie mögen sich in P berühren - in verschiedenen Halbräumen, könnte die dritte Kugel unter den gegebenen Voraussetzungen die beiden anderen ebenfalls nur in P berühren, das Dreieck ABC wäre also zu einem Punkt ausgeartet. Die die Kugeln die Ebene in drei verschiedenen Punkten berühren, ist eine Innenberührung der Kugeln ausgeschlossen.

Erste Lösung

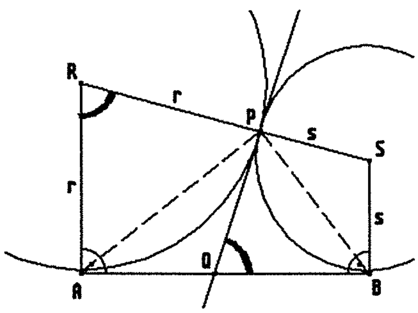
Die Radien der Kugeln über A, B, C seien in dieser Reihenfolge mit r, s, t bezeichnet. Da der Berührradius im Eckpunkt des Dreiecks jeweils senkrecht auf der Ebene des Dreiecks steht, und da die Berührradien in den gegenseitigen Berührpunkten der Kugeln jeweils auf einer Gerade durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln liegen, entsteht über jeder Dreiecksseite ein Trapez, das als parallele Seiten jeweils zwei der Kugelradien hat.



Aufgrund der Rechtwinkligkeit ergibt sich (durch Anwendung des Satzes von Pythagoras, s. Figur rechts) :
$(r + s)^2 = c^2 + (r - s)^2$; dies ist äquivalent zu $c^2 = 4rs$.
Die Gleichung $c^2 = 4rs$ setzt dabei nicht die für die Zeichnung zugrundegelegte Beziehung $r > s$ voraus, denn wegen $(r - s)^2 = (s - r)^2$ gilt die hergeleitete Gleichung auch, wenn s größer als r ist. Ist schließlich speziell $r = s$, so gilt $c = r + s = 2r$, also $c^2 = 4r^2 = 4rs$.
Unter Ausnutzung der Symmetrie der Aufgabenstellung erhält man aus $c^2 = 4rs$ durch zyklisches Weitergehen: $a^2 = 4st$ und $b^2 = 4tr$.
Damit ergibt sich $a^2b^2c^2 = 4rs \cdot 4st \cdot 4tr = 64r^2s^2t^2$, also $abc = 8rst$.
Aus $abc = 8rst$ und $c^2 = 4rs$ ergibt sich durch Einsetzen $abc = 2c^2t$, also $t = \frac{ab}{2c}$.
Analog (oder einfacher durch zyklisches Weitergehen) ergeben sich die Werte für r und s, so daß man folgendes Resultat hat:
Die gesuchten Kugelradien sind $r = \frac{bc}{2a}$, $s = \frac{ca}{2b}$ und $t = \frac{ab}{2c}$.

Zweite Lösung

Die Radien der Kugeln über A, B, C seien wie in der ersten Lösung mit r, s, t, die Mittelpunkte der zugehörigen Kugeln mit R, S, T bezeichnet. Die Skizze zeigt wieder das Trapez ABSR mit rechten Winkeln an den Ecken A und B (vgl. hierzu die erste Lösung). Die Ebene E dieses Trapezes enthält auch den Berührpunkt P der Kugeln. Die Tangentialebene schneidet die Ebene E in einer Geraden; deren Schnittpunkt mit AB sei mit Q bezeichnet.



Die Winkel ARP und BQP sind gleich groß, da sie beide jeweils vierter Winkel in einem Viereck mit zwei rechten Winkeln und dem Winkel PSB sind. Die gleichschenkligen Dreiecke APR und BPQ sind also ähnlich; entsprechend sind die Dreiecke PAQ und PBS ähnlich. Da die Vierecke AQPR und BSPQ durch orientierungstreues Aneinanderlegen dieser Dreiecke längs der Seite AP bzw. PB entstehen, sind diese Vierecke ebenfalls ähnlich.

Man erhält daher

(1) RA:AQ = QB:BS.

Da jeweils zusamengehörende Tangentenabschnitte gleiche Länge haben, sind die Strecken QA und QP gleich lang, entsprechend die Strecken QB und QP und somit auch QA und QB; Q ist also der Mittelpunkt der Strecke AB; $\overline{AQ} = \overline{QB} = \frac{c}{2}$.

Wegen (1) erhält man daher $r : \frac{c}{2} = \frac{c}{2} : s$ und somit

(2) $c^2 = 4rs$.

Aus (2) erhält man die Gleichungen $a^2 = 4st$ und $b^2 = 4tr$ durch zyklisches Weitergehen; Multiplikation der Darstellungen von a^2, b^2, c^2 miteinander und anschließendes Wurzelziehen liefert

(3) $abc = 8rst$.

Durch Division von (3) durch (2) ergibt sich $t = \frac{ab}{2c}$; analog - oder einfach wieder durch zyklisches Weitergehen - gelangt man schließlich zu $r = \frac{bc}{2a}$ und $s = \frac{ca}{2b}$.

Aufgabe 4

Eine endliche Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ natürlicher Zahlen mit $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k$ heißt genau dann alternierend, wenn $i + a_i$ für $i = 1,2,3,\ldots,k$ gerade ist. Auch die leere Menge gelte als alternierend. Die Anzahl der alternierenden Teilmengen von $\{1,2,3,\ldots,n\}$ wird mit A(n) bezeichnet.

Man entwickle ein Verfahren, mit dem sich A(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ bestimmen läßt, und berechne damit A(33).

Lösung

Die Menge $\{1\}$ hat nur die Teilmengen $\{1\}$ und $\{\}$; beide sind alternierend. Die Teilmengen von $\{1,2\}$ sind $\{1,2\}$, $\{1\}$ $\{2\}$ und $\{\}$; hiervon ist nur $\{2\}$ nicht alternierend. Man hat daher als erstes Resultat: $A(1) = 2$, $A(2) = 3$.

Es wird nun gezeigt, daß für alle natürlichen Zahlen n, die größer als 2 sind, die folgende zweigliedrige Rekursion gilt: (0) $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$.

Durch Abspulen der Rekursion erhält man

$A(33) = A(32)+A(31) = 2A(31)+A(30) = \ldots = 9\,227\,465$.

Nachfolgend wird die Richtigkeit der Rekursionsgleichung (0) nachgewiesen.

Erster Beweis:

Eine Teilmenge von $\{1,2,3,\ldots,n\}$ heiße n-passend, wenn sie alternierend ist und die Anzahl ihrer Elemente die gleiche Parität wie n hat, also zugleich mit n gerade bzw. zugleich mit n ungerade ist. Mit P(n) werde die Anzahl der n-passenden Teilmengen von $\{1,2,3,\ldots,n\}$ bezeichnet, die Anzahl der alternierenden, aber nicht n-passenden Teilmengen von $\{1,2,3,\ldots,n\}$ sei U(n).

Jede alternierende Teilmenge T von $\{1,2,3,\ldots,n\}$ ist somit entweder n-passend oder nicht n-passend. Wir betrachten zunächst den Fall, daß T n-passend ist.

Enthält T das Element n nicht, so ist T eine nicht (n-1)-passende Teilmenge von $\{1,2,3,\ldots,n-1\}$. Ist dagegen n Element von T, so ist $T \setminus \{n\}$ eine (n-1)-passende Teilmenge von $\{1,2,3,\ldots,n-1\}$. Da hiermit die n-passenden Teilmengen vollständig und ohne Doppelzählung erfaßt werden, gilt:

(1) $P(n) = U(n-1) + P(n-1) = A(n-1)$.

Ist dagegen T eine nicht n-passende Teilmenge von $\{1,2,3,\ldots,n\}$, so enthält T insbesondere nicht das Element n. Da die Elementeanzahl von T zu n verschiedene Parität hat, ist T eine (n-1)-passende Teilmenge von $\{1,2,3,\ldots,n-1\}$. Umgekehrt ist jede (n-1)-passende Teilmenge von $\{1,2,3,\ldots,n-1\}$ nicht n-passend. Man erhält somit die Gleichung $U(n) = P(n-1) = P(n-2) + U(n-2)$, wobei (1) für n-1 anstelle von n angewendet wurde, und hat daher

$$(2) \quad U(n) = A(n-2).$$

Zusammenfassung von (1) und (2) liefert

$$A(n) = P(n) + U(n) = A(n-1) + A(n-2) ;$$

das war zu zeigen.

Zweiter Beweis:

Für eine fest gewählte natürliche Zahl n ($n \geq 2$) werden (in beliebiger Reihenfolge) die alternierenden Teilmengen von $\{1,2,3,\dots,n-2\}$ mit $M_1, M_2, \dots, M_{A(n-2)}$ bezeichnet; die alternierenden Teilmengen von $\{1,2,3,\dots,n-1\}$ seien $N_1, N_2, \dots, N_{A(n-1)}$. Nachfolgend werden zunächst $A(n-1)+A(n-2)$ verschiedene alternierende Teilmengen von $\{1,2,3,\dots,n\}$ angegeben; anschließend wird gezeigt, daß hiermit alle alternierenden Teilmengen von $\{1,2,3,\dots,n\}$ erfaßt worden sind.

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M werde mit $|M|$ bezeichnet. Man konstruiere nun Mengen $M_1', M_2', \dots, M'_{A(n-2)}$, indem man für $i = 1, 2, \dots, n-2$ setzt:

$$M_i' = M_i \cup T_i \text{ ; dabei ist } T_i = \{n-1,\ n\}, \text{ wenn } n+|M_i| \text{ gerade ist, sonst } T_i = \{n\}.$$

Dann sind die Mengen $M_1', M_2', \dots, M'_{A(n-2)}$ Teilmengen von $\{1,2,3,\dots,n\}$, paarweise verschieden (, da die Mengen $M_1, \dots, M_{A(n-2)}$ paarweise verschieden sind,) und alternierend. Da sie alle nach Konstruktion das Element n enthalten, sind sie auch paarweise verschieden von $N_1, N_2, \dots, N_{A(n-1)}$.

Damit hat man zunächst $A(n-2)+A(n-1)$ verschiedene alternierende Teilmengen von $\{1,2,3,\dots,n\}$ konstruiert, nämlich $M_1', M_2', \dots, M'_{A(n-2)}, N_1, N_2, \dots, N_{A(n-1)}$.

Hierdurch sind aber alle alternierenden Teilmengen von $\{1,2,3,\dots,n\}$ erfaßt, denn ist M eine alternierende Teilmenge von $\{1,2,3,\dots,n\}$, gibt es genau vier Möglichkeiten:

1) $n \in M$ und $n-1 \in M$,
2) $n \in M$ und $n-1 \notin M$,
3) $n \notin M$ und $n-1 \in M$,
4) $n \notin M$ und $n-1 \notin M$.

Im Fall 1) ist $M \setminus \{n-1,\ n\}$ alternierend und Teilmenge von $\{1,2,3,\dots,n-2\}$, im Fall 2) ist $M \setminus \{n\}$ ebenfalls alternierend und Teilmenge von $\{1,2,3,\dots,n-2\}$. M tritt also als eine der Mengen M_i' auf.

Im Fall 3) ist M alternierende Teilmenge von $\{1,2,3,\dots,n-1\}$ und im Fall 4) ist M Teilmenge von $\{1,2,3,\dots,n-2\}$. In den letzten beiden Fällen kommt M also unter den Mengen N_i vor.

Damit ist die Gültigkeit der Formel $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$ nachgewiesen.

Dritter Beweis (skizziert):

Für $i \in \mathbb{N}$ sei die Menge $\{1, 2, 3, \dots, i\}$ mit $\mathbb{N}_i$ bezeichnet. Nachfolgend sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Jede der $A(n+2)$ alternierenden Teilmengen von $\mathbb{N}_{n+2}$ erfüllt genau eine der folgenden vier Bedingungen:

(1) Kein Element der Menge ist größer als n.
(2) Das größte Element der Menge ist n+1.
(3) Die Menge enthält die Elemente n+2 und n+1.
(4) Die Menge enthält zwar die Zahl n+2, nicht aber die Zahl n+1.

Die Anzahl der alternierenden Teilmengen von $\mathbb{N}_{n+2}$, welche die Bedingung (i) erfüllen, werde mit B(i) bezeichnet (i = 1, 2, 3, 4).

Dann hat man:

$B(1) = A(n)$, denn unter (1) werden genau die alternierenden Teilmengen von $\mathbb{N}_n$ gezählt,

$B(2) = A(n+1) - A(n)$, denn hier werden genau die alternierenden Teilmengen von $\mathbb{N}_{n+1}$ betrachtet, die keine (alternierenden) Teilmengen von $\mathbb{N}_n$ sind.

$B(3) = A(n+1) - A(n)$, denn von jeder Menge gemäß Bedingung (2) gelangt man durch Hinzufügen des Elements $n+2$ zu einer Menge gemäß Bedingung (3), zu verschiedenen Urbildern gehören bei dieser Zuordnung offenbar auch verschiedene Bilder und alle Mengen gemäß Bedingung (3) werden erfaßt; es ist also $B(2) = B(3)$.

$B(4) = A(n) - \big(A(n+1) - A(n)\big)$, denn genau diejenigen Teilmengen von $\mathbb{N}_n$ gehen durch Hinzunahme von $n+2$ in eine alternierende Teilmenge über, bei denen dies bei Hinzunahme von $n+1$ nicht der Fall wäre.

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A(n+2) &= B(1) + B(2) + B(3) + B(4) \\ &= A(n) + \big(A(n+1) - A(n)\big) + \big(A(n+1) - A(n)\big) + \big(2\cdot A(n) - A(n+1)\big) \\ &= A(n+1) + A(n), \end{aligned}$$

also $A(n+2) = A(n+1) + A(n)$.

Vierter Beweis (skizziert):

Für beliebiges $n\in\mathbb{N}$ bezeichne $\mathbf{A}(n)$ die Gesamtheit der alternierenden Teilmengen von $\{1, 2, 3, ..., n\}$. $\mathbf{A}(n)$ wird so in die beiden Mengen $\mathbf{E}(n)$ und $\mathbf{K}(n)$ zerlegt, daß in $\mathbf{E}(n)$ genau diejenigen Mengen aus $\mathbf{A}(n)$ liegen, die als Element die Zahl 1 enthalten.

Man betrachte nun Abbildungen φ von $\mathbf{A}(n+1)$ in $\mathbf{E}(n+2)$ und ψ von $\mathbf{A}(n)$ in $\mathbf{K}(n+2)$, die durch folgende Zuordnungsvorschrift gegeben sind:

Für $M\in\mathbf{A}(n+1)$ addiert man zu jedem Element die Zahl 1 und vereinigt die so erhaltene Menge mit $\{1\}$; so gelangt man zu $\varphi(M)$. Offensichtlich gehört $\varphi(M)$ zu $\mathbf{E}(n+2)$; die Abbildung φ ist bijektiv, da alle Elemente von $\mathbf{E}(n+2)$ als Bilder erfaßt werden und die Abbildung umkehrbar ist. Insbesondere sind also $\mathbf{E}(n+2)$ und $\mathbf{A}(n+1)$ von gleicher Mächtigkeit.

Um $\psi(M)$ für $M\in\mathbf{A}(n)$ zu erhalten, addiert man 2 zu jedem Element von M. Damit erhält man eine alternierende Teilmenge von $\{1, 2, 3, ..., n+2\}$, die die Zahl 1 nicht enthält, also ein Element von $\mathbf{K}(n+2)$. Da wieder alle Elemente von $\mathbf{K}(n+2)$ als Bilder vorkommen und die Abbildung umkehrbar ist, ist auch ψ bijektiv; $\mathbf{K}(n+2)$ hat also die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbf{A}(n)$.

Da $\mathbf{A}(n+2)$ sich disjunkt in $\mathbf{E}(n+2)$, $\mathbf{K}(n+2)$ zerlegen läßt, ergibt sich

$A(n+2) = \left|\mathbf{A}(n+2)\right| = \left|\mathbf{E}(n+2)\right| + \left|\mathbf{K}(n+2)\right| = \left|\mathbf{A}(n+1)\right| + \left|\mathbf{A}(n)\right| = A(n+1) + A(n)$;

hierbei wurde mit $|X|$ wieder die Anzahl der Elemente der endlichen Menge X bezeichnet.

Fünfter Beweis (skizziert):

Mit $\mathbf{S}(i)$ sei für beliebiges $i\in\mathbb{N}$ die Gesamtheit der nichtleeren alternierenden Teilmengen von $\mathbb{N}$ bezeichnet, deren größtes Element i ist. $S(i)$ sei die Mächtigkeit von $\mathbf{S}(i)$. Dann ist für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$A(n) = 1 + S(1) + S(2) + \ldots + S(n).$$

Man ordne nun jeder Menge $M\in\mathbf{S}(i+2)$ eine Menge $\gamma(M)$ auf folgende Weise zu:

- Im Falle $(i+1)\in M$ setze man $\gamma(M) = M\setminus\{i+2\}$;
- im Falle $(i+1)\notin M$ kann M nicht das Element i enthalten, da i und $i+2$ beide gerade

oder beide ungerade sind. Man erhält also aus M wieder eine alternierende Menge, indem man $i+2$ durch i ersetzt; die so konstruierte Menge sei $\gamma(M)$.
Offensichtlich ist γ eine bijektive Abbildung von $\mathbf{S}(i+2)$ in $\mathbf{S}(i) \cup \mathbf{S}(i+1)$, man erhält also die Gleichung $S(i+2) = S(i+1) + S(i)$. Für jede endliche Menge X wird mit $|X|$ wieder die Anzahl der Elemente von X (die Mächtigkeit von X) bezeichnet.
Wegen $S(1) = |\mathbf{S}(1)| = |\{\{1\}\}| = 1$ und $S(2) = |\mathbf{S}(2)| = |\{\{1,2\}\}| = 1$ hat man insgesamt: $S(1) = 1$, $S(2) = 1$, $S(i+2) = S(i+1) + S(i)$.
$(S(i))$ ist also die bekannte, durch diese Rekursionsbedingung definierte, Fibonaccifolge.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nun $A(n) = S(n+2)$, wie nachfolgend durch Induktion gezeigt wird:

Für <u>n=1</u> hat man $A(1) = |\{\{1\}, \{\}\}| = 2 = S(1) + S(2) = S(3)$.

Zum <u>Schluß von n auf n+1</u> formt man um

$$A(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} S(i) = \sum_{i=1}^{n} S(i) + S(n+1) = A(n) + S(n+1) = S(n+2) + S(n+1) = S(n+3).$$

Die häufigsten Fehler und Mängel

Bei der ersten Aufgabe wurde häufig angenommen, daß im Laufe des Spieles zwangsläufig die Konstellation (2,0) auftreten müsse. Mehrfach fehlte auch - bei richtiger Strategie - die Begründung für das Enden des Spiels nach endlich vielen Zügen; gelegentlich wurden Strategien angegeben ("symmetrisches Ziehen"), die zu einem endlosen Spiel führen konnten.

Vielfach wurden bei der Untersuchung in der **zweiten Aufgabe** die Primzahlen vergessen. Weiterhin konstruierten manche Teilnehmer bei Zahlen mit einer Primfaktorzerlegung der Form $a \cdot b \cdot c$ Zerlegungen durch Verwendung von $(ab) \cdot c$ bzw. $a \cdot (bc)$, aber dieses Verfahren ist unbrauchbar, da es z.B. bei 8 zur gleichen Zerlegung führt. Andere Zerlegungsverfahren waren zwar brauchbar, die Verschiedenheit der hierbei auftretenden Zerlegungen wurde aber nicht nachgewiesen. Schließlich wurde die für alle von 1 verschiedenen natürlichen Zahlen a, b gültige Ungleichung $a+b \leq a \cdot b$ teilweise nicht, teilweise auch trotz großem Aufwand fehlerhaft bewiesen.

Bei der **dritten Aufgabe** gab es zwar kleinere Lücken in der Darstellung, aber wenige größere Fehler. Der häufigste hiervon lag in der irrigen Vorstellung, bei senkrechter Projektion der Kugeln auf die Dreiecksebene entständen drei sich paarweise berührende Kreise.

Es reichte in der **vierten Aufgabe** nicht, anhand einer langen Tabelle die Rekursionsgleichung $A(n+2) = A(n+1) + A(n)$ für viele Fälle zu bestätigen, da ein Nachweis der Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen benötigt wurde.