BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Wissenschaftszentrum
Ahrstraße 45
5300 Bonn 2

Aufgaben und Lösungen 1991
1. Runde

Stand: 17. Mai 1991

Aufgabe 1

Gegeben sind 1991 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend zehn dieser Zahlen stets größer als 1 ist.
Man beweise, daß das Produkt aller 1991 Zahlen ebenfalls größer als 1 ist.

Erste Lösung

Wenigstens eine der gegebenen 1991 Zahlen ist nicht kleiner als 1, da sonst alle Produkte aus jeweils 10 der Zahlen kleiner als 1 wären. Eine solche Zahl sei herausgegriffen und mit a bezeichnet. Die verbleibenden 1990 Zahlen stelle man zu 199 Folgen von jeweils 10 Zahlen zusammen; da das Produkt von jeweils 10 der Zahlen größer als 1 ist, muß dies auch für das Produkt P aller betrachteten 1990 Zahlen gelten. Wegen $a \geq 1$ ist dann aber auch das zu untersuchende Produkt $a \cdot P$ größer als 1, wie zu zeigen war.

Zweite Lösung

Man ordne die 1991 Zahlen aufsteigend. Da das Produkt der ersten zehn Zahlen größer als 1 ist, muß die zehnte Zahl größer als 1 sein; wegen der Monotonie der Folge sind dann alle weiteren Zahlen ebenfalls größer als 1. Somit ist sowohl das Produkt P_1 der ersten zehn als auch das Produkt P_2 der Zahlen von der elften bis 1991. Zahl größer als 1. Also ist auch das Produkt $P_1 \cdot P_2$ aller 1991 Zahlen größer als 1.

Dritte Lösung

Das Produkt aller 1991 Zahlen sei mit P bezeichnet. Man ordne die Zahlen zu einer beliebigen Folge und schreibe diese Folge zehnmal hintereinander auf. Die so erhaltene Folge mit 19910 Gliedern besteht aus 1991 Abschnitten von je zehn verschiedenen Folgengliedern. Da das Produkt von je zehn der Zahlen größer als 1 ist, gilt dies auch für das Produkt aller 19910 Zahlen, in dem jeder Faktor des Produktes P genau zehnmal vorkommt. Also ist P^{10} größer als 1, somit muß auch die positive Zahl P größer als 1 sein.

Bemerkungen

- Die Voraussetzung, daß die gegebenen 1991 Zahlen paarweise verschieden sind, ist nicht notwendig.
- Die Zahlen 1991 bzw. 10 können durch beliebige natürliche Zahlen n bzw. z $(n \geq z)$ ersetzt werden.
- Es genügt, anstatt der Forderung *alle Zahlen positiv* lediglich vorauszusetzen, daß nicht alle Zahlen negativ sind. Denn offensichtlich kann keine der Zahlen 0 sein, da sonst auch jedes Produkt mit diesem Faktor 0 wäre. Unter den Zahlen ist also mindestens eine positive. Gäbe es nun unter den betrachteten Zahlen eine negative, so könnte man neun positive Zahlen und eine negative oder neun negative Zahlen und eine positive auswählen und hätte somit ein negatives Produkt von zehn der gegebenen Zahlen im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 2

Es sei g eine gerade natürliche Zahl und $f(n) = g^n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$.

Man beweise, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $f(n)$ ist Teiler von jeder der Zahlen $f(3n), f(5n), f(7n), \ldots$;

b) $f(n)$ ist teilerfremd zu jeder der Zahlen $f(2n), f(4n), f(6n), \ldots$.

Anmerkung: Mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist die Menge $\{1,2,3,\ldots\}$ gemeint.

Erste Lösung

Zu a): Bekanntlich gilt für beliebige reelle Zahlen x, y und natürliche Exponenten m die Gleichung $x^m - y^m = (x-y)\cdot(x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots+y^{m-1})$.
Der Beweis dieser "Verallgemeinerung der 3. bin. Formel " erfolgt durch vollständige Induktion oder unmittelbar durch Ausmultiplizieren.
Setzt man hier $x := g^n$, $y := -1$, wobei g und n beliebige natürliche Zahlen sind, und wird m als ungerade vorausgesetzt, so ergibt sich

$$g^{mn} - (-1)^m = g^{mn} + 1 = (g^n+1)\cdot(g^{n(m-1)} - g^{n(m-2)} + - \ldots + 1), \quad \text{also}$$

$f(nm) = f(n)\cdot(g^{n(m-1)} - g^{n(m-2)} + - \ldots + 1)$. Somit ist $f(n)$ ein Teiler von $f(mn)$.
Die Voraussetzung, daß g gerade ist, erweist sich als überflüssig.

Zu b): Der Beweis wird indirekt geführt, indem zunächst angenommen wird, es gäbe zur geraden natürlichen Zahl g natürliche Zahlen n, k und m $(m>1)$, so daß $f(n)$ und $f(2k\cdot n)$ Vielfache von m sind. Diese Annahme wird nachfolgend zum Widerspruch geführt.
Aus der Annahme folgt die Existenz natürlicher Zahlen α und β mit

(1) $f(n) = g^n + 1 = \alpha\cdot m$ und (2) $f(2k\cdot n) = g^{2kn} + 1 = (g^n)^{2k} + 1 = \beta\cdot m$.

Auflösen von (1) nach g^n und Einsetzen in (2) liefert

(3) $(\alpha\cdot m - 1)^{2k} + 1 = \beta\cdot m$.

Beim Ausmultiplizieren der linken Seite von (3) enthalten alle entstehenden Summanden außer 1^{2k} mindestens einmal den Faktor m. Die linke Seite von (3) läßt sich also in der Form $\gamma\cdot m + 2$ (mit $\gamma \in \mathbb{Z}$) darstellen. Somit ergibt sich

$$\gamma\cdot m + 2 = \beta\cdot m, \quad \text{also} \quad m\cdot(\beta-\gamma) = 2 .$$

Daher ist m ein Teiler von 2, muß also wegen $m>1$ den Wert 2 haben. Aber dann wäre nach (1) g^n+1 gerade, also g ungerade. Damit ist die Annahme zum Widerspruch geführt und der Beweis zu b) erbracht.

Zweite Lösung

Zu a): Siehe erste Lösung.

Zu b): Zu den natürlichen Zahlen n und k definiere man Zahlen x und y durch

$$x := \frac{1}{2}\cdot\left(g^{2kn} - g^{(2k-1)n} + g^{(2k-2)n} - + \ldots + g^{2n} - g^n + 2\right) \quad \text{und} \quad y := \frac{1}{2}g^n .$$

Da g eine gerade natürliche Zahl ist, sind x und y ganze Zahlen. Jeder gemeinsame Teiler von $f(n)$ und $f(2kn)$ ist auch ein Teiler von $x\cdot f(n) - y\cdot f(2kn)$.

$$\begin{aligned}
&2\cdot(x\cdot f(n) - y\cdot f(2kn))\\
&= (g^{2kn} - g^{(2k-1)n} + g^{(2k-2)n} - + \ldots + g^{2n} - g^n + 2)\cdot(g^n+1) - g^n\cdot(g^{2kn}+1)\\
&= g^{(2k+1)n} - g^{2kn} + g^{(2k-1)n} - + \ldots + g^{3n} - g^{2n} + 2g^n\\
&\qquad + g^{2kn} - g^{(2k-1)n} + - \ldots - g^{3n} + g^{2n} - g^n + 2\\
&\quad - g^{(2k+1)n} \qquad\qquad\qquad\qquad - g^n\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Somit folgt $x\cdot f(n) - y\cdot f(2kn) = 1$. Jeder gemeinsame Teiler der Zahlen $f(n)$ und $f(2k\cdot n)$ ist also auch Teiler von 1, d.h. diese Zahlen sind teilerfremd, w.z.b.w.

Dritte Lösung

Man betrachte die Elemente des Restklassenrings modulo (g^n+1). Für $k \in \mathbb{Z}$ bezeichne dabei $R(k)$ die Restklasse, welche den Repräsentanten k enthält.

Wegen $g^n = (g^n+1) - 1$ gilt $R(g^n) = R(-1)$; für jede natürliche Zahl m hat man daher $R(g^{mn}) = R\left((g^n)^m\right) = R\left((-1)^m\right)$.

Somit ergibt sich für jedes $m \in \mathbb{N}$: $R\big(f(mn)\big) = R(g^{mn}+1) = R\left((-1)^m+1\right)$.

Da die Summe $(-1)^m+1$ für ungerades m den Wert 0, für gerades m den Wert 2 hat, erhält man:

a) Ist m ungerade, so gilt $R\big(f(mn)\big) = R(0)$; $f(mn)$ ist also ein Vielfaches von $f(n)$.

b) Ist m gerade, so gilt $R\big(f(mn)\big) = R(2)$; $f(mn)$ läßt also bei Division durch $f(n)$ den Rest 2. Der größte gemeinsame Teiler von $f(mn)$ und $f(n)$ ist daher auch ein Teiler von 2, beträgt also 1 oder 2. Aber 2 kann kein Teiler von $f(n)$ sein, da g gerade und somit $f(n)$ ungerade ist. $f(mn)$ und $f(n)$ sind also teilerfremd.

Vierte Lösung

Nach dem Divisionssatz für Polynome läßt ein Polynom $p(x)$ bei Division durch $x-a$ den Rest $p(a)$. Angewendet auf $x := g^n$, $p_i(x) := x^i+1$ $(i = 2, 3, 4, \dots)$ liefert dies wegen $p_{2i}(-1) = 2$, $p_{2i+1}(-1) = 0$ für $i \in \mathbb{N}$:

a) Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $p_{2i+1}(g^n)$ ohne Rest durch g^n+1 teilbar; $f(n)$ ist also ein Teiler von $f\big((2i+1)\cdot n\big)$.

b) Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $p_{2i}(g^n) - 2$ ohne Rest durch g^n+1 teilbar, $f(n)$ ist also ein Teiler von $f(2i\cdot n) - 2$. Da $f(n)$ ungerade ist, ist 2 teilerfremd zu $f(n)$. Somit ist $f(2i\cdot n)$ darstellbar als Summe aus einem Vielfachen von $f(n)$ und einer zu $f(n)$ teilerfremden Zahl $\big(f(n) = (f(2i\cdot n) - 2) + 2\big)$ und daher teilerfremd zu $f(n)$.

Fünfte Lösung (mit Hilfe des binomischen Satzes)

Für beliebige natürliche Zahlen n, m ist die folgende Umformung richtig:

$$\begin{aligned}
f(m\cdot n) = \left(g^n\right)^m + 1 &= \big(f(n) - 1\big)^m + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \big(f(n)\big)^{m-i} (-1)^i + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \big(f(n)\big)^{m-i} (-1)^i + \binom{m}{m}(-1)^m + 1 \\
&= z\cdot f(n) + (-1)^m + 1 \qquad \text{mit } z := \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \big(f(n)\big)^{m-i-1} (-1)^i \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Falls m ungerade ist, gilt daher $f(m\cdot n) = s\cdot f(n)$ mit $s \in \mathbb{Z}$; damit ist a) nachgewiesen. Falls dagegen m ungerade ist, hat man $f(m\cdot n) = s\cdot f(n) + 2$. Jeder gemeinsame Teiler t von $f(m\cdot n)$ und $f(n)$ muß daher auch ein Teiler von 2 sein. Da $f(n)$ ungerade ist, folgt $t = 1$; damit ist auch b) gezeigt.

Bemerkung zu den eingereichten Lösungen

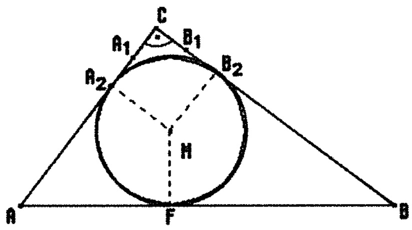
Häufig wurde beim Teil b) lediglich nachgewiesen, daß $f(n)$ kein Teiler von $f(2n)$, $f(4n)$, ... ist. Zu zeigen war aber, daß $f(n)$ zu $f(2n)$, $f(4n)$, ... teilerfremd ist, d.h. keinen gemeinsamen Teiler (außer natürlich 1) hat.

Aufgabe 3

In einer Ebene mit quadratischem Gitter, bei dem die Seitenlänge des Grundquadrats 1 ist, liegt ein rechtwinkliges Dreieck. Alle seine Eckpunkte sind Gitterpunkte und alle Seitenlängen sind ganzzahlig.
Man beweise, daß auch der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ein Gitterpunkt ist.

Erste Lösung

Die Seitenlängen und Eckpunkte des vorgelegten Dreiecks seien in der üblichen Weise mit a, b, c, A, B, C (C Scheitelpunkt des rechten Winkels) bezeichnet; M sei der Mittelpunkt, ρ der Radius des Inkreises von ΔABC. Mit *ganzzahligen Vielfachen* einer Zahl p sind im nachfolgenden Text immer Produkte der Form $z \cdot p$ mit $z \in \mathbb{Z}$ gemeint.
Auf der Strecke CA liegt mindestens ein von C verschiedener Gitterpunkt (nämlich A); der von C am wenigsten weit entfernte derartige Gitterpunkt sei mit A_1 bezeichnet. Entsprechend sei B_1 auf BC der Gitterpunkt mit minimaler positiver Entfernung zu C. Da das quadratische Gitternetz bei einer Drehung um ein Vielfaches von 90° mit einem Gitterpunkt als Drehzentrum in sich übergeht, folgt aus der Minimalität von $\overline{CA_1}$ und $\overline{CB_1}$, daß B_1 und A_1 die gleiche Entfernung von C haben. Diese Entfernung sei mit e bezeichnet.



Jede Verschiebung des Gitternetzes mit Schiebepfeil $\overrightarrow{PQ}$, wobei P und Q beliebige Gitterpunkte sind, läßt sich durch Nacheinanderausführung von Verschiebungen längs Gitterquadrat-Seiten erhalten, führt also die Gesamtheit der Gitterpunkte in sich über. Wendet man die Verschiebung, welche C in A_1 überführt, wiederholt auf die Strecke CA_1 (bzw. die entstehenden Bildstrecken an), so enthält jede der Bildstrecken genau zwei Gitterpunkte, nämlich die Randpunkte. Da A zu mindestens einer der Bildstrecken gehören muß, ist der Gitterpunkt A Randpunkt von einer der Bildstrecken. Die Entfernung von C und A ist also ein ganzzahliges Vielfaches von e.
Die analoge Überlegung gilt für B, so daß es natürliche Zahlen n, m geben muß, welche die Gleichungen $a = n \cdot e$ und $b = m \cdot e$ erfüllen. Als Quotient der natürlichen Zahlen a und n ist e eine rationale Zahl.
Nach dem Satz des Pythagoras hat man $a^2+b^2=c^2$, also $c^2 = (n^2+m^2)\cdot e^2$. Da c und e rationale Zahlen sind, ist n^2+m^2 das Quadrat einer rationalen Zahl. Das Quadrat einer positiven rationalen Zahl r ist bekanntlich genau dann ganzzahlig, wenn r eine natürliche Zahl ist. Der Quotient $\frac{c}{e}$ - er sei mit k bezeichnet - ist also eine natürliche Zahl. Daher erhält man aus $a^2+b^2=c^2$ die Gleichung $(n^2+m^2)e^2 = k^2 \cdot e^2$, also $n^2+m^2=k^2$.
Mit den Bezeichnungen der Skizze (A_2, B_2, F sind die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten von ΔABC) ergibt sich

$$c = \overline{AF} + \overline{FB} = \overline{AA_2} + \overline{BB_2} = b-\rho + a-\rho = a+b-2\rho, \text{ also } 2\rho = a+b-c.$$

Somit hat man $2\rho = n\cdot e + m\cdot e - k\cdot e$ und mithin $\rho = \frac{1}{2}(n+m-k)\cdot e$.
Wäre $n+m-k$ ungerade, wären genau eine oder alle drei der Zahlen n, m, k, also auch genau eine oder alle drei der Zahlen n^2, m^2, k^2 ungerade - im Widerspruch zur Gültigkeit von $n^2+m^2=k^2$. Also enthält $n+m-k$ den Faktor 2. Somit ist ρ ein ganzzahliges Vielfaches von e.
Daher sind A_2 und B_2 Gitterpunkte. Die Verschiebung, bei der C in A_2 übergeht, führt B_2 in den Inkreismittelpunkt M über. M ist also ebenfalls ein Gitterpunkt, qed.

Zweite Lösung

Zunächst werden drei Hilfssätze bereitgestellt.

(1) Bei Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel ω hat der Punkt (x,y) den Bildpunkt $(x\cdot\cos\omega - y\cdot\sin\omega\ ,\ x\cdot\sin\omega + y\cdot\cos\omega)$.

(2) In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen a und b und der Hypotenusenlänge c hat der Inkreis den Radius $\rho = \frac{a\cdot b}{a+b+c}$.

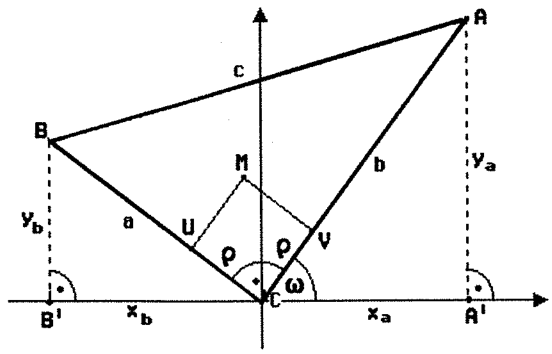
(3) Wenn die natürlichen Zahlen α, β, γ die Gleichung $\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2$ erfüllen, dann ist $\alpha+\beta+\gamma$ ein Teiler von $\alpha\cdot\beta$.

Beweis zu (3): $\alpha+\beta+\gamma$ ist ein Teiler von $2\alpha\beta$, denn es gilt:

$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha+\beta-\gamma) = (\alpha+\beta)^2-\gamma^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2 = 2\alpha\beta$.

Wäre $\alpha+\beta-\gamma$ ungerade, wären genau eine oder alle drei der Zahlen α,β,γ, also auch genau eine oder alle drei der Zahlen $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$ ungerade - im Widerspruch zur Gültigkeit von $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$. Also enthält $\alpha+\beta-\gamma$ den Faktor 2. Somit ist $\alpha+\beta+\gamma$ ein Teiler von $\alpha\beta$.

Die Ecken des Dreiecks seien mit A, B, C bezeichnet; dabei sei C der Scheitel des rechten Winkels. Die Seitenlängen seien (in üblicher Bezeichnungsweise) a, b, c. Es wird zunächst der Sonderfall betrachtet, daß eine Kathete des Dreiecks (und damit auch die andere) parallel zu einer Seite eines Gittergrundquadrats verläuft. Nach den Hilfssätzen (2) und (3) ist wegen der Ganzzahligkeit von a, b und c auch der Inkreisradius ρ ganzzahlig. Somit hat der Inkreismittelpunkt M ganzzahligen Abstand von beiden (auf Gittergeraden liegenden) Katheten, ist also selbst ein Gitterpunkt.



Zu betrachten bleibt der Fall, daß die Katheten nicht auf Gittergeraden liegen. Man lege in diesem Fall zwei orthogonale, zu den Seiten eines Gittergrundquadrats parallele Achsen durch die Ecke C. Da bei jeder Drehung um ein Vielfaches von 90° mit einem Gitterpunkt als Drehzentrum jeder Gitterpunkt wieder in einen Gitterpunkt übergeht und Seitenlängen erhalten bleiben, darf man annehmen, daß weder A noch B unterhalb der x-Achse liegen. Das zu betrachtende Dreieck hat dann eine Lage wie oben dargestellt. Die Koordinaten der Punkte A bzw. B seien x_a, y_a bzw. x_b, y_b.

Die Größe des Winkels, um den man die positive x-Achse um das Zentrum C drehen muß, um den Strahl $\overrightarrow{CA}$ zu erhalten, sei mit ω bezeichnet $(0<\omega<90^\circ)$. Ist nun ρ der Inkreisradius des betrachteten Dreiecks, dann ist das Urbild des Inkreismittelpunkts M bei dieser Drehung der Punkt mit den Koordinaten (ρ,ρ). Nach Hilfssatz (1) hat daher M die Koordinaten $(\rho\cdot\cos\omega - \rho\cdot\sin\omega\ ,\ \rho\cdot\sin\omega + \rho\cdot\cos\omega)$.

Wegen $\sin\omega = \frac{1}{b}\cdot y_a$, $\cos\omega = \frac{1}{b}\cdot x_a$ ergibt sich: $M = (\frac{\rho}{b}(x_a-y_a)\ ,\ \frac{\rho}{b}(y_a+x_a))$.

B′ bzw. A′ seien die Fußpunkte der von B bzw. A auf die x-Achse gefällten Lote. Die rechtwinkligen Dreiecke CBB′ und ACA′ sind ähnlich, da Winkel CAA′ und Winkel BCB′ beide die Größe $90^\circ-\omega$ haben.

Daher gilt die Verhältnisgleichung $x_a : y_a = y_b : (-x_b)$. Die reduzierte Form des Quotienten auf beiden Seiten der Gleichung sei $\frac{p}{q}$ mit p, q $\in \mathbb{N}$. Es gibt somit natürliche Zahlen α, β, für die gilt:

$$x_a = \alpha\cdot p,\ y_a = \alpha\cdot q,\ y_b = \beta\cdot p,\ x_b = -\beta\cdot q\ .$$

Hieraus erhält man mit dem Satz des Pythagoras:
$a^2 = x_b{}^2 + y_b{}^2 = \beta^2\cdot(p^2+q^2)$; wegen $a \in \mathbb{N}$ gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ mit $d^2 = p^2+q^2$. Denn wäre p^2+q^2 keine Quadratzahl, könnte die Multiplikation mit der Quadratzahl β^2 keine Quadratzahl ergeben.
$b^2 = x_a{}^2 + y_a{}^2 = \alpha^2\cdot(p^2+q^2)$; $c^2 = a^2+b^2 = (\alpha^2+\beta^2)\cdot(p^2+q^2) = (\alpha^2+\beta^2)\cdot d$; wegen $c \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\gamma \in \mathbb{N}$ mit $\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2$.
Insbesondere hat man also $a = \beta\cdot d$, $b = \alpha\cdot d$, $c = \gamma\cdot d$.
Hiermit läßt sich nun die Ganzzahligkeit der Koordinaten von M nachweisen:

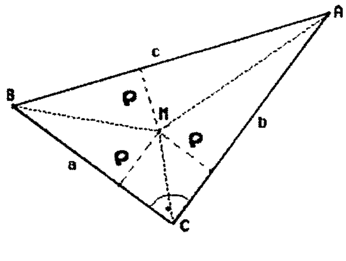
$$\begin{aligned} M &= \left(\tfrac{\rho}{b}(x_a - y_a)\ ,\ \tfrac{\rho}{b}(y_a + x_a)\right) \\ &= \left(\frac{a\cdot b}{a+b+c}\cdot\frac{1}{b}(\alpha p - \alpha q)\ ,\ \frac{a\cdot b}{a+b+c}\cdot\frac{1}{b}(\alpha q + \alpha p)\right) \\ &= \left(\frac{a}{a+b+c}\cdot(\alpha p - \alpha q)\ ,\ \frac{a}{a+b+c}\cdot(\alpha q + \alpha p)\right) \\ &= \left(\frac{\beta\cdot d}{\beta d + \alpha d + \gamma d}(\alpha p - \alpha q),\ \frac{\beta\cdot d}{\beta d + \alpha d + \gamma d}(\alpha q + \alpha p)\right) \\ &= \left(\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha+\beta+\gamma}(p-q),\ \frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha+\beta+\gamma}(q+p)\ \right). \end{aligned}$$

Wegen $\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ ist nach Hilfssatz (3) der Faktor $\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$ ganz. Da p und q ebenfalls ganze Zahlen sind, folgt damit die behauptete Ganzzahligkeit der Koordinaten von M. Das Koordinatensystem liegt so, daß genau die Gitterpunkte ganzzahlige Koordinaten haben; M ist also ein Gitterpunkt. Das war zu zeigen.

Bemerkungen zur zweiten Lösung

(1) Ein wesentlicher Bestandteil des Beweises ist die Bestimmung der Koordinaten von M mit dem Ergebnis $M = (\frac{\rho}{b}(x_a - y_a)\ ,\ \frac{\rho}{b}(y_a + x_a)\ )$. Die im Hilfssatz angegebene Formel zur ω-Drehung um den Ursprung ist bekannt. Sie ergibt sich gleichermaßen aus Überlegungen in elementarer Trigonometrie, beim Rechnen mit komplexen Zahlen (ω-Drehung um O als Multiplikation mit $\cos\omega + \mathbf{i}\cdot\sin\omega$) oder in der linearen Algebra.
Trigonometriefreie und ebenfalls nicht rechenaufwendige Wege zur Koordinatenberechnung sind z.B. die Bestimmung des Ortsvektors von M durch Zusammensetzen der Vektoren zu $\overrightarrow{CU}$ und $\overrightarrow{CV}$ (Bezeichnungen s. Skizze in der Lösung), von denen ja Betrag (ρ) und Richtung bekannt sind, oder Charakterisierung von M als Punkt auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle$ ACB mit Entfernung $\sqrt{2}\rho$ vom Ursprung.

(2) Die Formel $\rho = \frac{a\cdot b}{a+b+c}$ für den Inkreisradius des rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a, b und der Hypotenusenlänge c ist ebenfalls bekannt. Sie ergibt sich unmittelbar, wenn man den doppelten Flächeninhalt von $\triangle ABC$ einmal als Produkt $a\cdot b$ und einmal als $2\cdot(|\triangle CAM| + |\triangle ABM| + |\triangle BCM|)$ ausdrückt. Die Gleichung $a\cdot b = \rho\cdot(b+c+a)$ liefert dann durch Auflösen nach ρ die behauptete Formel.



Dritte Lösung

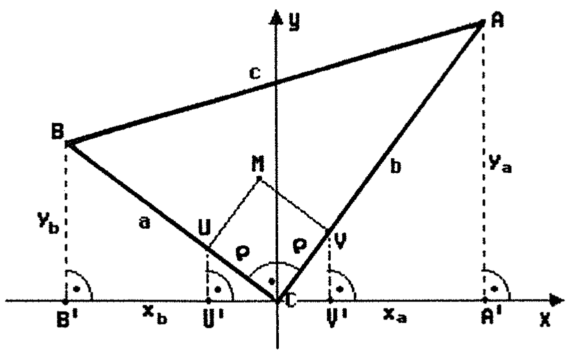
Die Ecken des Dreiecks seien in üblicher Weise mit A, B, C bezeichnet, die Seitenlängen seien entsprechend a, b, c; dabei ist c die Länge der Hypotenuse. Der Inkreimittelpunkt sei M; der Berührpunkt des Inkreises mit BC sei mit U, der mit AC sei mit V bezeichnet. Der Inkreisradius sei ρ.

Bekanntlich (vgl. zweite Lösung) gilt für den Radius ρ des Inkreises im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c die Formel $\rho = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$.

Aus der nachfolgenden Feststellung (1) ergibt sich die Ganzzahligkeit von ρ:

(1) Gilt für die natürlichen Zahlen u, v, w die Gleichung $u^2+v^2 = w^2$, so ist der Quotient $\frac{u \cdot v}{u+v+w}$ eine natürliche Zahl.

Denn wegen $(u+v+w)\cdot(u+v-w) = (u+v)^2-w^2 = (u+v)^2-u^2-v^2 = 2u\cdot v$ hat der betrachtete Quotient den Wert $\frac{1}{2}(u+v-w)$. Da die Ausdrücke $u+v-w$ und $u^2+v^2-w^2$ die gleiche Parität haben und der zweite Ausdruck den Wert 0 hat, ist auch $u+v-w$ eine gerade Zahl. Division durch 2 liefert also eine ganze Zahl, woraus die Richtigkeit von (1) folgt.



Nun wird gezeigt, daß U und V Gitterpunkte sind. Dazu werden die beiden orthogonalen Gittergeraden durch C als Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt. Die Koordinaten von A seien x_a und y_a, die von B seien x_b und y_b. Da A und B Gitterpunkte sind, sind alle vier genannten Koordinaten ganze Zahlen.

Da Drehungen mit Zentrum C und Drehwinkel 90° das Gitternetz in sich überführen, darf man o.B.d.A. annehmen, daß A im ersten und B im zweiten Quadranten des Koordinatensystems liegt. Falls A (und damit auch B) auf einer der Koordinatenachsen liegt, hat M offensichtlich das Koordinatenpaar $(-\rho,\rho)$ oder (ρ,ρ), ist also ein Gitterpunkt. In diesem Fall ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

Im folgenden darf also vorausgesetzt werden: $x_a>0,\ y_a>0,\ x_b<0,\ y_b>0$.

Die Fußpunkte der Lote von A, B, U, V auf die x-Achse seien in der angegebenen Reihenfolge mit A', B', U', V' bezeichnet. Die Koordinaten von U seien x_u und y_u.

Die Dreiecke CU'U und CB'B sind offensichtlich ähnlich, folglich gilt $x_u:\rho = x_b:a$ und $y_u:\rho = y_b:a$, also erhält man $x_u = x_b\cdot\frac{\rho}{a}$ und $y_u = y_b\cdot\frac{\rho}{a}$. Durch Einsetzen von $\rho = \frac{a\cdot b}{a+b+c}$ ergibt sich

(2) $x_u = \frac{b}{a+b+c}\cdot x_b$ und $y_u = \frac{b}{a+b+c}\cdot y_b$.

Ferner sind auch die Dreiecke CA'A und BB'C ähnlich, da ihre Seiten paarweise orthogonal sind. Folglich gilt $x_a:y_a = y_b:(-x_b)$. Die reduzierte Darstellung von $\frac{x_a}{y_a}$ sei $\frac{p}{q}$; ($p, q \in \mathbb{N}$, p teilerfremd zu q). Somit gibt es natürliche Zahlen m, n , für die

(3) $x_a = n\cdot p,\ y_a = n\cdot q,\ y_b = m\cdot p,\ -x_b = m\cdot q$ gilt.

Hieraus erhält man durch Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck CBB' : $a^2 = x_b{}^2 + y_b{}^2 = m^2\cdot(p^2+q^2)$.

Da a und m natürliche Zahlen sind, tritt bei der Primfaktorzerlegung beider Seiten der Gleichung $a^2 = m^2 \cdot (p^2+q^2)$ jeder Primfaktor geradzahlig oft auf; p^2+q^2 ist also Quadrat einer natürlichen Zahl k. Somit hat man $a = m \cdot k$.
Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck ACA' liefert mit (3) entsprechend: $b^2 = x_a{}^2 + y_a{}^2 = n^2 \cdot (p^2+q^2) = n^2 \cdot k^2$; $b = n \cdot k$.
Schließlich gelangt man mit dem Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ABC zu $c^2 = a^2 + b^2 = (m^2+n^2) \cdot k^2$. Wegen $c, k \in \mathbb{N}$ ist m^2+n^2 Quadrat einer natürlichen Zahl w; es gilt also:

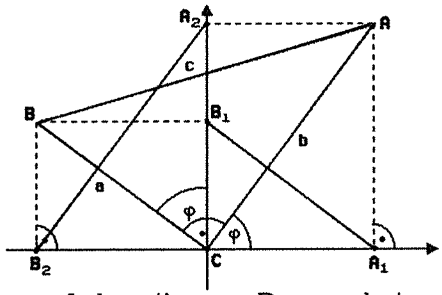
(4) $a = m \cdot k, \quad b = n \cdot k, \quad c = w \cdot k.$

Aus (2), (3), (4) folgt: $x_u = \frac{b}{a+b+c} \cdot x_b = \frac{n \cdot k}{m \cdot k + n \cdot k + w \cdot k} \cdot (-m \cdot q) = -\frac{n \cdot m}{m+n+w} \cdot q$.

Entsprechend ergibt sich $y_u = \frac{n \cdot m}{m+n+w} \cdot p$.

Da m, n, w natürliche Zahlen sind, folgt nach (1) wegen $m^2+n^2 = w^2$, daß der Quotient $\frac{n \cdot m}{m+n+w}$ eine natürliche Zahl ist. Da auch p und q in $\mathbb{N}$ liegen, sind somit x_u und y_u ganze Zahlen. Also ist U ein Gitterpunkt.
Der Nachweis, daß auch V ein Gitterpunkt ist, wird in analoger Weise geführt.
Hiermit läßt sich nun der Beweis abschließen: Bezeichnet man die Koordinaten des Inkreismittelpunkts M mit x_m und y_m, so ergeben sich wegen $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CU} + \overrightarrow{CV}$ die Gleichungen $x_m = x_u + x_v$ und $y_m = y_u + y_v$. Wegen der Ganzzahligkeit von x_u, y_u, x_v, y_v sind also auch x_m und y_m ganze Zahlen, M ist somit ein Gitterpunkt.

Vierte Lösung (skizziert)
In der zweiten Lösung wurde gezeigt, daß in einem rechtwinkligen Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen auch der Radius des Inkreises ganzzahlig ist. Dies wird in der nachfolgenden Lösung ebenso verwendet wie die Formel zur Koordinatentransformation bei einer Drehung um den Ursprung. Bei Parallelität der Katheten zu Gitterlinien folgt wegen der Ganzzahligkeit des Inkreisradius unmittelbar, daß der Inkreismittelpunkt ein Gitterpunkt ist.
Es werden daher nur noch solche Dreiecke betrachtet, deren Katheten nicht parallel zu Gitterlinien verlaufen. Ecken und Seitenlängen seien wie üblich bezeichnet.



Man lege zwei orthogonale, zu den Seiten eines Gittergrundquadrats parallele Achsen durch die Ecke C. Da bei jeder Drehung um ein Vielfaches von 90° mit einem Gitterpunkt als Drehzentrum jeder Gitterpunkt wieder in einen Gitterpunkt übergeht und Seitenlängen erhalten bleiben, darf man annehmen, daß weder A noch B unterhalb der x-Achse liegen. Das zu betrachtende Dreieck hat dann eine Lage wie oben dargestellt. Von A und B werden die Lote auf die Achsen gefällt; die Fußpunkte seien (s.Skizze) A_1, A_2, B_1, B_2.
Die Größe des Winkels, um den man die positive x-Achse um das Zentrum C drehen muß, um den Strahl $\overrightarrow{CA}$ zu erhalten, sei mit φ bezeichnet $(0 < \varphi < 90°)$.
Der Inkreisradius von Dreieck ABC sei ρ. Führt man eine Drehung dieses Dreiecks um das Zentrum C mit Drehwinkel $-\varphi$ durch, geht der Inkreismittelpunkt M offenbar in den Punkt mit den Koordinaten (ρ, ρ) über. Da umgekehrt M aus diesem Punkt durch eine Drehung mit Drehwinkel φ und dem Ursprung C als Drehzentrum hervorgeht, hat M die Koordinaten $\left(-\rho \cdot \sin(\varphi) + \rho \cdot \cos(\varphi),\ \rho \cdot \sin(\varphi) + \rho \cdot \cos(\varphi)\right)$.

Zum Nachweis der Behauptung genügt es also, die folgende Aussage (*) zu beweisen:

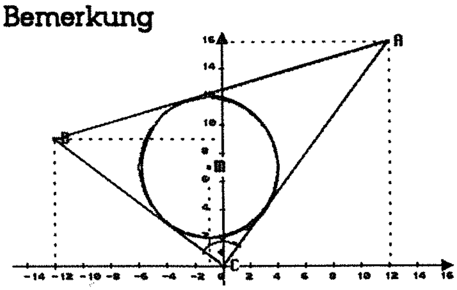
(*) $\rho\cdot\sin(\varphi)$ und $\rho\cdot\cos(\varphi)$ sind ganze Zahlen.

Wegen $\overline{A_2C} = b\cdot\sin(\varphi)$, $\overline{B_2C} = a\cdot\sin(\varphi)$, $\overline{A_1C} = b\cdot\cos(\varphi)$, $\overline{B_1C} = a\cdot\cos(\varphi)$ sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke A_2B_2C und A_1B_1C ähnlich zum Dreieck ABC mit Ähnlichkeitsfaktoren $\sin(\varphi)$ bzw. $\cos(\varphi)$.

Da die (nach Voraussetzung) ganzzahligen Kathetenlängen von Dreieck ABC in (als Differenz von Gitterpunktkoordinaten) ganzzahlige Kathetenlängen der Dreiecke A_1B_1C und A_2B_2C übergehen, sind die Ähnlichkeisfaktoren $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ rational; die Hypotenusen A_1B_1 und A_2B_2 haben also eine rationale Länge. Bekanntlich ist die Wurzel aus einer natürlichen Zahl entweder ganzzahlig oder irrational. Nach dem Satz des Pythagoras ergeben sich die Hypotenusenlängen in den Dreiecken A_1B_1C und A_2B_2C als Wurzeln natürlicher Zahlen; somit sind sie ganzzahlig.

Wegen der Ähnlichkeit zu Dreieck ABC mit den angegebenen Ähnlichkeitsfaktoren haben die Inkreise der Dreiecke A_1B_1C und A_2B_2C die Radien $\rho\cdot\cos(\varphi)$ bzw. $\rho\cdot\sin(\varphi)$. Da die Seitenlängen dieser rechtwinkligen Dreiecke ganzzahlig sind, gilt dies auch nach der obigen Feststellung für die Inkreisradien. Somit sind $\rho\cdot\cos(\varphi)$ und $\rho\cdot\sin(\varphi)$ ganzzahlig; damit ist (*) nachgewiesen.

Bemerkung



Es darf bei der Lösung keinesfalls vorausgesetzt werden, daß die Katheten des betrachteten Dreiecks auf Gitterlinien liegen. Als Gegenbeispiel betrachte man etwa das rechtwinklige Dreieck mit den Ecken $A = (12,16)$, $B = (-12,9)$, $C = (0,0)$. In diesem Falle ist $\rho = 5$, $M = (-1,7)$.

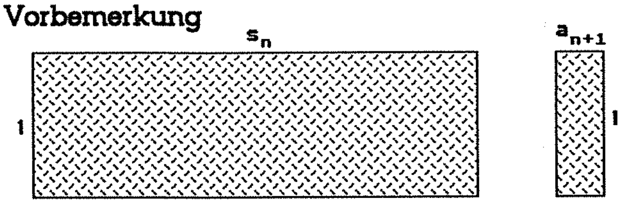
Es reicht auch nicht, den Beweis zunächst für den Fall achsenparalleler Katheten zu führen und dann lediglich zu bemerken, daß das gegebene Dreieck durch eine Drehung in die betrachtete spezielle Lage zu bringen ist. Denn nicht der Inkreismittelpunkt des gedrehten Dreiecks, sondern der des gegebenen Dreiecks ist als Gitterpunkt nachzuweisen.

Aufgabe 4

Ein Streifen der Breite 1 soll durch rechteckige Platten mit der gemeinsamen Breite 1 und den Längen $a_1, a_2, a_3, \dots$ lückenlos gepflastert werden ($a_1 \neq 1$). Von der zweiten Platte an ist jede Platte ähnlich, aber nicht kongruent zu dem schon gepflasterten Teil des Streifens. Nach Auflegen der ersten n Platten habe der gepflasterte Teil des Streifens die Länge s_n.

Gibt es - bei vorgegebenem a_1 - eine Zahl, die von keinem s_n übertroffen wird ? Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Vorbemerkung



Nach Voraussetzung der Aufgabe gilt $1:s_n = a_{n+1}:1$, wegen $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ hat man daher für alle $n \in \mathbb{N}$:

(*) $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{s_n}$

Von der Rekursionsgleichung (*) wird in den folgenden Lösungen Gebrauch gemacht.

Erste Lösung

Die Folge $(s_1, s_2, s_3, \dots)$ nimmt offensichtlich monoton zu. Wäre sie nach oben beschränkt, hätte sie als monoton wachsende, beschränkte Folge mit positiven Gliedern einen positiven Grenzwert s. Dann hätte auch die Teilfolge (s_{n+1}) den Grenzwert s; aus den Regeln über konvergente Folgen - hier Kehrwertregel und Summenregel - folgte dann $s = s + \frac{1}{s}$, also $\frac{1}{s} = 0$ ↯

Die Folge (s_n) ist also nach oben nicht beschränkt; somit ist die Frage der Aufgabenstellung zu verneinen.

Zweite Lösung

Nach (∗) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $s_{n+1}^2 = \left(s_n + \frac{1}{s_n}\right)^2 = s_n^2 + 2 + \left(\frac{1}{s_n}\right)^2 > s_n^2 + 2$ (O).

Hieraus folgt für $n = 2, 3, 4, \dots$ die Ungleichung (1) $s_n^2 > 2n - 2$.

Denn für $n = 1$ ergibt sich aus (O) die Ungleichung $s_2^2 > s_1^2 + 2$, also $s_2^2 > 2 = 2 \cdot 2 - 2$.

Die Ungleichung (1) ist somit für $n = 2$ richtig, und für $n \geq 2$ schließt die folgende Kette den Induktionsbeweis ab: $s_{n+1}^2 > s_n^2 + 2 > 2n - 2 + 2 = 2n = 2(n+1) - 2$.

Da die Folge der natürlichen Zahlen nach oben nicht beschränkt ist, überschreitet auch s_n^2 jede positive Zahl, somit ist die (positive) Folge $(s_1, s_2, s_3, \dots)$ nach oben nicht beschränkt. Es gibt also keine Zahl, die von keinem s_n übertroffen wird.

Dritte Lösung

Die Annahme der Existenz einer Zahl K, die für kein $n \in \mathbb{N}$ von s_n übertroffen wird, wird nachfolgend zum Widerspruch geführt.

Aus $s_n \leq K$ folgt mit (∗): $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{s_n} \geq s_n + \frac{1}{K}$ und somit $s_{n+1} - s_n \geq \frac{1}{K}$.

Schreibt man die zuletzt erhaltene Ungleichung für $n = 1, 2, 3, \dots, N$ untereinander und addiert alle Ungleichungen, ergibt sich $s_{N+1} - s_1 \geq \frac{N}{K}$ und somit $K \geq s_{N+1} \geq \frac{N}{K}$.

Daraus ergibt sich aber $N \leq K^2$ und damit der gewünschte Widerspruch, da die Menge der natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist und $N \in \mathbb{N}$ beliebig ist.

Bemerkungen

1) Das Verhalten der Folge (s_n) läßt sich genauer als in den Lösungen charakterisieren; daraus folgt dann insbesondere auch, daß die Folge nach oben nicht beschränkt ist:

Die Folge $\left(\frac{s_n^2}{n}\right)$ ist konvergent; der Grenzwert ist 2. Der Nachweis wird als Übungsaufgabe empfohlen.

2) Aus der zweiten Lösung läßt sich ablesen, wie viele Platten denn reichen, um eine vorgegebene Länge s zu überschreiten: wegen $s_n^2 > 2n-2$ sind hierzu N Platten ausreichend, wobei N größer als $s^2 + 2$ ist.