BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
Ahrstraße 45
5300 Bonn 2

Aufgaben und Lösungen 1990
1. Runde

Stand: 22. Mai 1990

Aufgabe 1

Es sei $f(x) = x^2 + 2bx + c$ mit ganzen Zahlen b und c.
Man beweise : Gilt $f(n) \geq 0$ für alle ganzen Zahlen n, so gilt $f(x) \geq 0$ sogar für alle rationalen Zahlen x.

Erste Lösung

Es ist $f(-b) = b^2 - 2b^2 + c = c - b^2$.
Da nach Voraussetzung b, also auch -b eine ganze Zahl ist, kann f(-b) nicht negativ sein. Daher folgt $c - b^2 \geq 0$ bzw. $c \geq b^2$.
Somit gilt für jede rationale Zahl x:

$$f(x) = x^2 + 2bx + c \geq x^2 + 2bx + b^2 = (x+b)^2.$$

Da das Quadrat einer rationalen Zahl nicht-negativ ist, folgt $f(x) \geq 0$; dies sollte gezeigt werden.

Zweite Lösung

Die Funktion f ist ganzrational vom Grade 2, ihr Graph ist also eine Parabel; da der Koeffizient von x^2 positiv ist, ist die Parabel nach oben geöffnet. Bekanntlich hat die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$ den Scheitelpunkt $S = (-\frac{p}{2}, q - (\frac{p}{2})^2)$, im vorliegenden Fall also $S = (-b, c - b^2)$.
Da -b ganzzahlig ist, liegt der Scheitelpunkt nach Voraussetzung nicht unterhalb der x-Achse; da die Parabel nach oben geöffnet ist, liegen alle weiteren Punkte höher als der Scheitelpunkt, also ebenfalls nicht unterhalb der x-Achse. Alle Werte f(x) sind daher nicht-negativ.

Dritte Lösung

$$f(x) = x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 + c - b^2 \geq c - b^2 ,$$

da $(x+b)^2$ nie negativ wird.
Der Wert von f(x) wird also minimal für $(x+b)^2 = 0$, also für $x = -b$. Da nach Voraussetzung dieser minimale Wert wegen der Ganzzahligkeit von -b nicht negativ ist, kann für kein x der Wert f(x) negativ sein. Das war zu zeigen.

Vierte Lösung (indirekt)

Die Annahme, daß für mindestens eine rationale Zahl x_0 der Funktionswert $f(x_0)$ negativ ist, wird nachfolgend zum Widerspruch geführt.
Die Funktion f ist ganzrational vom Grade 2, hat als Graphen also eine - auf rationale Argumentellen eingeschränkte - Normalparabel. Der Definitionsbereich von f wird für die nachfolgende Überlegung auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Da es sowohl Positivstellen (nämlich alle ganzen Zahlen) als auch eine Negativstelle (nämlich x_0) gibt, hat f genau zwei Nullstellen. Die quadratische Gleichung $x^2 + 2bx + c$ hat also zwei (reelle) Nullstellen x_1 und x_2, die Diskriminante $b^2 - c$ ist positiv. Wegen der Ganzzahligkeit von b und c beträgt der positive Wert $b^2 - c$ also mindestens 1.
Die Differenz der beiden Lösungen $x_2 = -b + \sqrt{b^2 - c}$ und $x_1 = -b - \sqrt{b^2 - c}$ beträgt $2\sqrt{b^2 - c}$, ist also größer als 1. Daher enthält das offene Intervall $]x_1, x_2[$ mindestens eine ganze Zahl z. Da gemäß dem Verlauf der Parabel alle Funktionswerte über dem Intervall $]x_1, x_2[$ negativ sind, ist f(z) negativ; dies widerspricht wegen der Ganzzahligkeit von z der Voraussetzung.

Nachbemerkungen

1. Die Aussage der Aufgabe bleibt offensichtlich richtig, wenn man überall *rational* durch *reell* ersetzt.
2. Die Voraussetzung der Ganzzahligkeit von c wird bei den ersten drei Lösungen nicht benötigt; die vierte Lösung verwendet anstelle der Ganzzahligkeit von b und c die Ganzzahligkeit von $c - b^2$.

Aufgabe 2

Von der Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist bekannt:

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 1,\quad a_2 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} + a_{n-1} = 2(a_{n+1} + a_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist zu beweisen, daß alle Glieder dieser Folge Quadratzahlen sind.

Hinführung zur ersten Lösung

Berechnen der ersten Folgenglieder führt zu folgender Tabelle:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	0	1	1	4	9	25	64	169	...
$\sqrt{a_n}$	0	1	1	2	3	5	8	13	...

Für die natürlichen Zahlen von 2 bis 7 ist damit die Behauptung bestätigt; man entnimmt der Tabelle als Vermutung: $a_{n+2} = \left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}\right)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Erste Lösung

Man definiert rekursiv die Zahlenfolge (b_n) in folgender Weise:

$$b_0 := 0,\ b_1 := 1,\quad b_{n+1} := b_n + b_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich sind dann alle Glieder der Folge (b_n) nicht-negative ganze Zahlen. Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n = b_n^2$. Für $n=0$ und $n=1$ ist dies offensichtlich richtig; für $n=2$ hat man $b_n = 1$ und $a_n = 1$, die behauptete Gleichung ist also für $n = 0, 1, 2$ richtig.

Die Gleichung $a_k = b_k^2$ gelte für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Unter Verwendung dieser Induktionsvoraussetzung sowie der Rekursionsgleichungen für die Folgen (a_k) und (b_k) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2} \\
&= 2b_n^2 + 2b_{n-1}^2 - b_{n-2}^2 \\
&= 2b_n^2 + 2b_{n-1}^2 - (b_n - b_{n-1})^2 \\
&= 2b_n^2 + 2b_{n-1}^2 - b_n^2 + 2b_nb_{n-1} - b_{n-1}^2 \\
&= b_n^2 + b_{n-1}^2 + 2b_nb_{n-1} \\
&= (b_n + b_{n-1})^2 \\
&= b_{n+1}^2 .
\end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.

Zweite Lösung (mit linearer Algebra)

Es sei **V** die Menge aller unendlichen Folgen (x_n) $(n=0,1,2,\ldots)$ reeller Zahlen, deren Glieder die Gleichung

$$\text{(0)}\quad x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n - x_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

erfüllen.

Die Menge aller Folgen, die einer festen dreigliedrigen linearen Rekursion genügen, bildet mit den üblichen Operationen + und · bekanntlich einen dreidimensionalen Vektorraum.

(Zur Erinnerung bzw. Erläuterung: man zeigt leicht, daß die drei gemäß der Rekursionsbedingung mit dem vierten Glied fortgesetzten Folgen (1,0,0,...),(0,1,0,...) und (0,0,1,...) ein Erzeugendensystem von **V** bilden und linear unabhängig sind.)

Es wird nun eine Basis von **V** gesucht, die aus drei <u>geometrischen</u> Folgen besteht; eine geometrische Folge (q^n) gehört genau dann zu **V**, wenn sie der Bedingung (0) genügt, d.h. $q^{n+2} = 2q^{n+1} + 2q^n - q^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da für eine Basis nur Folgen mit von null verschiedenem q in Frage kommen, ist die Bedingung für diese betrachteten Werte äquivalent zur Gleichung

$$(1)\quad q^3 = 2q^2 + 2q - 1 \quad .$$

Man errät als erste Lösung der Gleichung $q = -1$ und hat damit mit $u_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ eine erste geometrische Folge aus **V** gefunden. Da -1 eine Lösung von (1) ist, enthält $q^3 - 2q^2 - 2q + 1$ den Linearfaktor $q+1$. Durch Polynomdivision erhält man die Faktorzerlegung $q^3 - 2q^2 - 2q + 1 = (q+1)(q^2 - 3q + 1)$. Der zweite Faktor hat die beiden Nullstellen $v := \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ und $w := \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$. Mit $v_n := v^n$ und $w_n := w^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ hat man zwei weitere geometrische Folgen aus **V** gefunden. Die drei Folgen $(u_n), (v_n), (w_n)$ sind linear unabhängig, da bereits im Raume $\mathbb{R}^3$ die Vektoren (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) linear unabhängig sind; ihre (Vandermondesche) Determinante hat nämlich den Wert $(u_1 - v_1)\cdot(u_1 - w_1)\cdot(v_1 - w_1)$, welcher verschieden von null ist, da die Zahlen u_1, v_1, w_1 paarweise verschieden sind.

Jede Folge (x_n) aus **V** läßt sich daher - mit geeigneten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ - in der Form $x_n = \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n$ darstellen.

Durch Einsetzen der ersten drei Glieder der zu untersuchenden Folge (a_n) erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta + \gamma \\ 1 &= -\alpha + \beta\cdot v + \gamma\cdot w \\ 1 &= \alpha + \beta\cdot v^2 + \gamma\cdot w^2 \ . \end{aligned}$$

Auflösen dieses linearen Gleichungssystems ergibt $\alpha = -\frac{2}{5}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{5}$, so daß man für die zu untersuchende Folge (a_n) die folgende geschlossene Form hat:

$$(2)\quad a_n = -\frac{2}{5}\cdot(-1)^n + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \ .$$

Der Ausdruck a_n läßt sich unter Benutzung der zweiten binomischen Formal als Quadrat darstellen, denn wegen $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1$ kann man umformen: $a_n = \frac{1}{5}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)^2$,

$$\text{also}\quad a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\right)^2 \ .$$

Der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) =: b_n$ ist aber gerade die Darstellung des n-ten Gliedes der Fibonacci-Folge nach der Binetschen Formel. Da die Glieder der Fibonacci-Folge alle ganzzahlig sind, sind alle Werte der Folge (a_n) Quadratzahlen. Dies war zu zeigen.

Anmerkungen zur zweiten Lösung

Die Fibonacci-Folge 0, 1, 1, 2, 3, 5, ... , benannt nach dem italienischen Mathematiker Leonardo Fibonacci von Pisa (ca.1180 - 1250), ist durch die beiden Anfangsglieder und die zweigliedrige Rekursion $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ definiert. Die verwendete Binetsche Formel, bezeichnet nach dem französischen Mathematiker J.P.M. Binet (1786 - 1856), läßt sich analog dem in der zweiten Lösung zur Ermittlung der geschlossenen Darstellung von a_n benutzten Weg bestimmen; die Rechnung ist dabei etwas kürzer, da es sich nur um eine zweigliedrige Rekursion handelt.

Aufgabe 3

Zwischen zwanzig Städten bestehen 172 direkte Flugverbindungen, die jeweils in beiden Richtungen benutzbar sind. Keine zwei von ihnen verbinden dieselben beiden Städte.

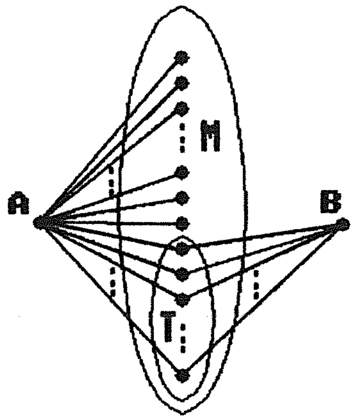
Man weise nach, daß man von jeder Stadt in jede andere Stadt fliegen kann, ohne dabei mehr als einmal umzusteigen.

Erste Lösung

Man stelle die 20 Städte als Ecken eines Graphen dar; zwei dieser Ecken seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn zwischen den entsprechenden Städten eine Flugverbindung besteht. Von jeder Ecke können dann höchstens 19 Kanten ausgehen. Gingen von jeder Ecke höchstens 17 Kanten aus, so gingen von den 20 Städten insgesamt höchstens $20 \cdot 17$, also 340 Kanten aus. Da bei dieser Zählweise jede Kante genau zweimal gezählt wird, gäbe es in dem Graphen höchstens $340 : 2$, also 170 Kanten, was der Voraussetzung widerspricht.

Es gibt also mindestens eine Ecke - sie sei mit A bezeichnet - von der 18 oder 19 Kanten ausgehen. A ist also entweder mit allen anderen Ecken durch eine Kante verbunden oder mit genau einer anderen Ecke - diese sei dann mit B bezeichnet - nicht durch eine Kante verbunden. Falls A mit allen anderen Ecken verbunden ist, ist die Behauptung der Aufgabe offensichtlich erfüllt. Von einer beliebigen Ecke X gelangt man dann zu einer beliebigen Ecke Y ($\neq$ X), falls keine direkte Verbindung besteht, auf dem Umweg X-A-Y.

Es braucht also nur noch der Fall betrachtet zu werden, bei dem von keiner Ecke des Graphen 19 Kanten ausgehen und A mit allen Ecken außer B durch eine Kante verbunden ist. Jedes Paar von B verschiedener Ecken ist also direkt durch eine Kante oder über zwei von A ausgehende Kanten verbunden, so daß nur noch zu zeigen ist, daß von B aus alle anderen 19 Ecken direkt über eine Kante oder indirekt (über zwei Kanten) zu erreichen sind.



Die Menge der 18 von A und B verschiedenen Ecken sei mit M bezeichnet; T sei die Menge der mit B verbundenen Ecken; T ist dann eine Teilmenge von M; die Anzahl ihrer Elemente (= Anzahl der von B ausgehenden Kanten) sei t. Da nach Voraussetzung und Auswahl von A und B genau 18 Verbindungskanten von A zu Elementen von M existieren, verbleiben $172 - 18 - t$ Kanten; die Anzahl der innerhalb von M verlaufenden (und in der Skizze <u>nicht</u> eingezeichneten) Kanten beträgt also $154 - t$. Von den innerhalb von M möglichen $18 \cdot 17 : 2 = 153$ Kanten fehlen also genau $t - 1$. Insbesondere ist also t positiv; es gibt

mindestens eine Kante von B zu einer Ecke aus M. Damit ergibt sich zunächst, daß A und B indirekt (über eine Ecke aus M) miteinander verbunden sind.
Es muß noch gezeigt werden, daß B mit jeder Ecke aus M direkt oder indirekt verbunden ist. Hierzu sei C eine beliebige Ecke aus M. Da andernfalls nichts mehr gezeigt zu werden braucht, sei B mit C nicht durch eine Kante verbunden. Da C mit höchstens $t-1$ Ecken aus M nicht verbunden ist, führt mindestens eine Kante von C zu einer Ecke X in der t-elementigen Menge T. Somit ist B mit C indirekt (durch den Kantenzug B-X-C) verbunden. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

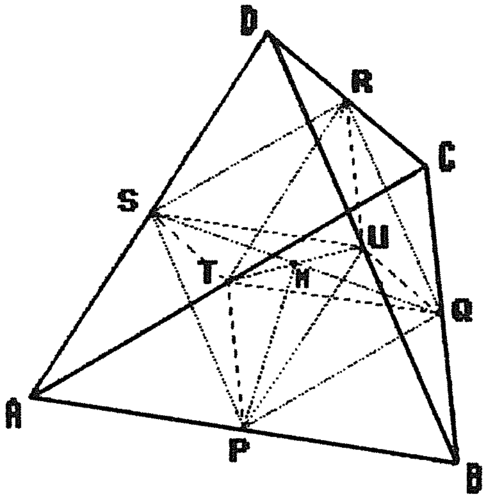
Zweite Lösung (indirekt)
Es wird angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es zwei Städte, sagen wir A und B, so daß man von A aus weder direkt noch mit einem Zwischenhalt B erreichen kann.
Dann besteht also keine Flugverbindung AB, und für jede Stadt X der weiteren 18 Städte bestehen nicht gleichzeitig die Flugverbindungen AX und BX, denn sonst könnte man ja von A über X nach B fliegen.
Wäre jede der zwanzig Städte mit jeder anderen verbunden, gäbe es genau $\binom{20}{2}$ direkte Flugverbindungen, also 190. Da die Verbindung AB sowie mindestens 18 der weiteren 36 möglichen Verbindungen von A bzw. B mit von A und B verschiedenen Städten nicht bestehen, könnte es höchstens 190-1-18, also höchstens 171 direkte Flugverbindungen geben. Da dies im Widerspruch zur Voraussetzung der Existenz von 172 direkten Verbindungen steht, ist damit die Behauptung nachgewiesen.

Dritte Lösung (Modifikation der zweiten Lösung)
Von den 190 möglichen paarweisen Verbindungen von je zwei Städten sind 172 vorhanden, es fehlen also 18 Direktverbindungen. Von einer beliebigen Stadt A zu einer beliebigen Stadt B gäbe es bei paarweiser Verbindung aller Städte eine Direktverbindung und 18 indirekte Verbindungen - jeweils über eine der restlichen 18 Städte. Diese 19 denkbaren Verbindungen haben paarweise keine Strecke gemeinsam. Durch das Fehlen von 18 Direktverbindungen können also nicht alle 19 denkbaren (direkten oder indirekten) Verbindungen wegfallen. Es gibt also mindestens eine Flugverbindung zwischen A und B.

Bemerkung
Wenn von 19 Städten jede mit jeder anderen direkt verbunden ist, bestehen insgesamt $\binom{19}{2}$, also 171 Verbindungen. Es ist somit möglich, bei 20 Städten die Direktverbindungen so vorzunehmen, daß eine Stadt völlig isoliert ist. Die Zahl 172 in der Aufgabenstellung ist also minimal.

Aufgabe 4
In einem Tetraeder sei jede Kante senkrecht zu ihrer Gegenkante.
Man beweise, daß es eine Kugel gibt, auf der die Mittelpunkte aller sechs Kanten liegen.
Erläuterung: Zwei Strecken AB und CD heißen senkrecht zueinander genau dann, wenn die durch A gezogene Parallele zu CD senkrecht auf AB steht.

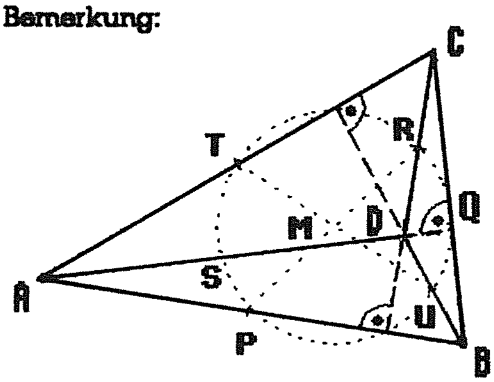
Erste Lösung (elementargeometrisch)



Die Eckpunkte des Tetraeders seien (siehe Figur) mit A, B, C, D und die Mittelpunkte seiner Kanten mit P, Q, R, S, T, U bezeichnet.
Die Strecke SR ist Mittelparallele im Dreieck ACD und daher halb so lang wie AC und parallel zu dieser Strecke. Die entsprechende Überlegung für die Mittelparallele PQ im Dreieck ABC liefert, daß PQ parallel zu AC und halb so lang ist. Die Strecken SR und PQ sind also parallel und von gleicher Länge; Viereck PQRS ist somit ein Parallelogramm.
Wegen $SR \parallel AC$, $AC \perp BD$ und $BD \parallel RQ$ ist Winkel SRQ ein rechter; mithin ist das Parallelogramm PQRS ein Rechteck.
Entsprechend zeigt man (bzw. folgert man unmittelbar aus Symmetriegründen), daß auch die Vierecke PURT und STQU Rechtecke sind. Da die Rechtecke PQRS, PURT und STQU paarweise je eine gemeinsame Diagonale haben, die Diagonalen eines Rechtecks gleich lang sind und einen gemeinsamen Mittelpunkt haben, folgt, daß alle drei genannten Rechtecke einen gemeinsamen Umkreismittelpunkt M und gleichen Umkreisradius haben.
Somit liegen auf der Kugel um M durch P die sechs Seitenmitten P, Q, R, S, T, U. Die Existenz einer solchen Kugel ist damit nachgewiesen.

Variante zu ersten Lösung: Es genügt der Nachweis, daß die vier Punkte P, Q, R, S jeweils auf Thaleskreisen (in der entsprechenden Ebene) über der Strecke TU liegen; denn dann haben alle sechs Punkte P, Q, R, S, T, U die gleiche Entfernung vom Mittelpunkt M der Strecke TU und liegen somit auf einer gemeinsamen Kugel um M.
Um den Beweis für P zu führen, beachte man die Beziehungen $PT \parallel BC$, $PU \parallel AD$ (beides nach Umkehrung des ersten Strahlensatzes) und $BC \perp AD$; der Winkel TPU ist also ein rechter. Für die Punkte Q, R, S erfolgt der Nachweis analog.

Bemerkung:

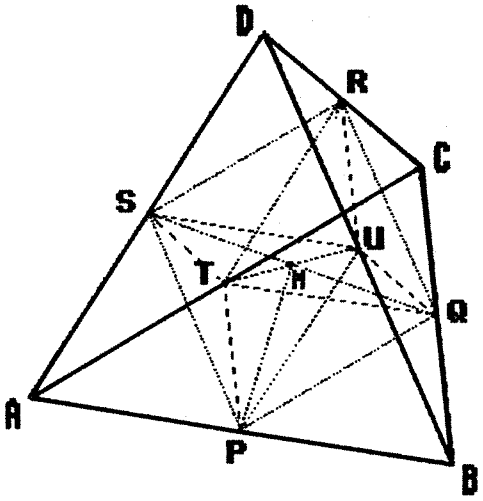


Die Punkte A, B, C, D können (im ausgearteten Fall) auch alle in einer Ebene liegen. Jeder dieser Punkte ist dann der Höhenschnittpunkt des von den anderen drei Eckpunkten bestimmten Dreiecks. Die Seitenmittelpunkte P, Q, R, S, T, U liegen dann auf dem allen vier Dreiecken BCD, ACD, ABD, ABC gemeinsamen Neunpunktekreis.

Erläuterung: Der *Neunpunktekreis* eines Dreiecks (auch *Feuerbachscher* Kreis genannt) geht durch die drei Höhenfußpunkte, die drei Seitenmittelpunkte und die Mitten der drei oberen Höhenabschnitte; sein Mittelpunkt halbiert die Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt.

Von der Existenz des Neunpunktekreises macht die folgende - zweite - Lösung Gebrauch.

Zweite Lösung



Die Eckpunkte des Tetraeders seien (siehe Figur) wieder mit A, B, C, D und die Mittelpunkte seiner Kanten wieder mit P, Q, R, S, T, U bezeichnet.
Die durch drei nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegende Punkte X, Y, Z bestimmte Ebene wird nachfolgend mit (XYZ) bezeichnet.
Die Strecke SR ist Mittelparallele im Dreieck ACD und daher parallel zu AC. Zusammen mit der entsprechenden Überlegung für die Mittelparallelen RU im Dreieck BCD und US im Dreieck ABD ergibt sich, daß (URS) parallel zu (ABC) ist.
Bei senkrechter Projektion auf (ABC) gehen - wegen der Orthogonalitätsbedingung der Aufgabe - die Kanten AD, BD und CD in die oberen Abschnitte der Höhen im Dreieck ABC über, die Bilder von U, R und S sind (nach dem ersten Strahlensatz) die Mitten der oberen Höhenabschnitte; der Höhenschnittpunkt H ist das Bild von D. Die Bilder von U, R und S liegen also auf dem Neunpunktekreis von Dreieck ABC, der auch P, Q und T enthält.
Der Kreis durch P, Q, T entsteht also durch senkrechte Projektion des Kreises durch U, R, S auf die Ebene (ABC).
Die Punkte U, R, S, P, Q und T liegen somit, wie zu beweisen war, auf einer gemeinsamen Kugel.

Dritte Lösung (vektoriell)

Die Ecken des Tetraeders seien A, B, C, D; der Ursprung O sei beliebig festgelegt; die Ortsvektoren der Tetraederecken seien entsprechend mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ bezeichnet.
Man betrachte den Punkt M mit dem Ortsvektor $\mathfrak{m} := \frac{1}{4}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$. (M ist bekanntlich der Schwerpunkt des Tetraeders.) Der Mittelpunkt P der Seite AB hat den Ortsvektor $\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$. Zum Beweis der Behauptung genügt nun der Nachweis, daß der Abstand $|\mathfrak{m}-\mathfrak{p}|$ invariant gegenüber einer Permutation der Eckenbezeichnungen A, B, C, D ist. Anstelle des Abstandes wird sein Quadrat betrachtet:

$$\begin{aligned}|\mathfrak{m}-\mathfrak{p}|^2 &= (\mathfrak{m}-\mathfrak{p})*(\mathfrak{m}-\mathfrak{p})\\ &= \left(\tfrac{1}{4}(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\right)*\left(\tfrac{1}{4}(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\right)\\ &= \tfrac{1}{16}(\mathfrak{c}*\mathfrak{c}+\mathfrak{d}*\mathfrak{d}+\mathfrak{a}*\mathfrak{a}+\mathfrak{b}*\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}*\mathfrak{d}+2\mathfrak{a}*\mathfrak{b}-2\mathfrak{a}*\mathfrak{c}-2\mathfrak{a}*\mathfrak{d}-2\mathfrak{b}*\mathfrak{c}-2\mathfrak{b}*\mathfrak{d}).\end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck durch Subtraktion von $4(\mathfrak{c}*\mathfrak{d}+\mathfrak{a}*\mathfrak{b})$ in einen gegenüber Permutationen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ invarianten Ausdruck übergeht, reicht es, die Invarianz des Wertes von $\mathfrak{a}*\mathfrak{b}+\mathfrak{c}*\mathfrak{d}$ gegenüber Permutationen der Eckenbezeichnungen nachzuweisen.
Die Kante AB hat den Richtungsvektor $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$; entsprechend sind die Richtungsvektoren der anderen Tetraederkanten festzulegen. Da AB senkrecht zu CD verläuft, sind die Richtungsvektoren $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}-\mathfrak{c}$ orthogonal, ihr Skalarprodukt ist also null:

$$(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})*(\mathfrak{d}-\mathfrak{c}) = 0 \quad \text{und somit} \quad (1) \quad \mathfrak{a}*\mathfrak{c}+\mathfrak{b}*\mathfrak{d} = \mathfrak{a}*\mathfrak{d}+\mathfrak{b}*\mathfrak{c}.$$

Entsprechend ergibt sich aus $AC \perp BD$

$(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})*(\mathfrak{d}-\mathfrak{b}) = 0$ und daher (2) $\mathfrak{a}*\mathfrak{b}+\mathfrak{c}*\mathfrak{d} = \mathfrak{a}*\mathfrak{d}+\mathfrak{b}*\mathfrak{c}$.

Aus (1) und (2) sieht man, daß der Wert von $\mathfrak{v}*\mathfrak{x}+\mathfrak{y}*\mathfrak{z}$ für jede Permutation $(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{v},\mathfrak{z})$ von $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d})$ der gleiche ist. Damit ist der Nachweis abgeschlossen.

Der Mittelpunkt der betrachteten Kugel ist gemäß der letzten Lösung der Schwerpunkt des Tetraeders; eine Vereinfachung ist daher zu erwarten, wenn man - wie nachfolgend - den Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt legt.

Vierte Lösung (auch vektoriell)

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Tetraeders, so ergibt sich für die Ortsvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ der Ecken

(§) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = \mathfrak{o}$,

denn der Schwerpunkt von ABCD hat bekanntlich den Ortsvektor $\frac{1}{4}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$.

Nach der Voraussetzung gilt $(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})*(\mathfrak{y}-\mathfrak{x}) = 0$ für jede Permutation $(\mathfrak{u},\mathfrak{v},\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ von $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d})$. Durch Einsetzen im ersten Faktor gemäß (§) und Addition von $\mathfrak{o}$ im zweiten Faktor erhält man:

$$(\mathfrak{u}+\mathfrak{y}+\mathfrak{u}+\mathfrak{x})*(\mathfrak{y}+\mathfrak{u}-\mathfrak{u}-\mathfrak{x}) = 0.$$

Anwendung der dritten binomischen Formel liefert hieraus

$$(\mathfrak{u}+\mathfrak{y})*(\mathfrak{u}+\mathfrak{y}) - (\mathfrak{u}+\mathfrak{x})*(\mathfrak{u}+\mathfrak{x}) = 0, \text{ also } |\mathfrak{u}+\mathfrak{y}| = |\mathfrak{u}+\mathfrak{x}| \quad (*).$$

Bezeichnet $\mu(AB)$ die Entfernung des Mittelpunkts der Kante AB vom Schwerpunkt des Tetraeders (entsprechend $\mu(BC)$ usw.), so liefert wegen $\mu(XY) = \frac{1}{2}|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|$ die Gleichung (*) bei den entsprechenden Einsetzungen:

$$\mu(DB) = \mu(AB),\ \mu(AB) = \mu(BC),\ \mu(BC) = \mu(CD),\ \mu(CD) = \mu(DA),\ \mu(DA) = \mu(AC).$$

Der Schwerpunkt hat also von allen sechs Kantenmitten die gleiche Entfernung; diese liegen somit auf einer gemeinsamen Kugel um den Tetraederschwerpunkt.

Fünfte Lösung (ebenfalls vektoriell)

Ein Eckpunkt des Tetraeders sei der Ursprung O eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems. Den übrigen drei Eckpunkten werden die Ortsvektoren $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ zugeordnet. Die von O ausgehende Kante mit der Richtung $\mathfrak{t}_i$ besitzt als Gegenkante die Kante mit der Richtung $(\mathfrak{t}_j - \mathfrak{t}_k)$ für alle drei zyklischen Vertauschungen von (1,2,3) zu (i,j,k). Die Orthogonalitätsbedingung der Voraussetzung liefert daher die Gleichung $\mathfrak{t}_i*(\mathfrak{t}_j-\mathfrak{t}_k) = 0$ für die betrachteten i,j,k und somit $\mathfrak{t}_1*\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2*\mathfrak{t}_3 = \mathfrak{t}_3*\mathfrak{t}_1 =: c$.

Zu den Mittelpunkten der sechs Tetraederkanten gehören die Ortsvektoren $\frac{1}{2}\mathfrak{t}_1, \frac{1}{2}\mathfrak{t}_2, \frac{1}{2}\mathfrak{t}_3, \frac{1}{2}(\mathfrak{t}_3+\mathfrak{t}_2), \frac{1}{2}(\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_3), \frac{1}{2}(\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_1)$.

Es wird nun gezeigt, daß die Mittelpunkte der sechs Tetraederkanten auf der Kugel mit dem Radius $r := \frac{1}{4}\sqrt{\mathfrak{t}_1*\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2*\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3*\mathfrak{t}_3-2c}$ und dem Mittelpunkt M mit Ortsvektor $\mathfrak{m} := \frac{1}{4}(\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3)$ liegen:

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{m}-\tfrac{1}{2}\mathfrak{t}_1|^2 &= |\tfrac{1}{4}(\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3)-\tfrac{1}{2}\mathfrak{t}_1|^2\\
&= \tfrac{1}{16}|-\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3|^2\\
&= \tfrac{1}{16}(-\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3)*(-\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3)\\
&= \tfrac{1}{16}(\mathfrak{t}_1*\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2*\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3*\mathfrak{t}_3-2\mathfrak{t}_1*\mathfrak{t}_2+2\mathfrak{t}_2*\mathfrak{t}_3-2\mathfrak{t}_3*\mathfrak{t}_1)\\
&= \tfrac{1}{16}(\mathfrak{t}_1*\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2*\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3*\mathfrak{t}_3-2c\ +\ 2c\ -\ 2c)\\
&= \tfrac{1}{16}(\mathfrak{t}_1*\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2*\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3*\mathfrak{t}_3-2c) = r^2 .
\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich $|\mathfrak{m}-\frac{1}{2}\mathfrak{t}_2|^2 = r^2$ und $|\mathfrak{m}-\frac{1}{2}\mathfrak{t}_3|^2 = r^2$.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{m}-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2)\right|^2 &= \left|\tfrac{1}{4}(\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3)-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2)\right|^2\\ &= \tfrac{1}{16}\,|-\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3|^2\\ &= |\mathfrak{m}-\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{t}_3|^2 \quad \text{(- wie sich aus der Rechnung oben ergibt)}\\ &= r^2\,.\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man $|\mathfrak{m}-\frac{1}{2}(\mathfrak{t}_2+\mathfrak{t}_3)|^2 = r^2$ und $|\mathfrak{m}-\frac{1}{2}(\mathfrak{t}_3+\mathfrak{t}_1)|^2 = r^2$, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Hinweise auf die häufigsten Fehler und Mißverständnisse

Zu Aufgabe 1: Diese vom Aufgabenausschuß als besonders leicht eingeschätzte Aufgabe wurde mehrfach von Teilnehmern nicht verstanden. Gelegentlich wurden Hilfsmittel aus der Analysis eingesetzt, gerade hierbei gab es dann aber häufig Beweislücken. Einige Teilnehmer waren der (irrigen) Auffassung, die Schreibweise $f(x) \geq 0$ sei nur dann berechtigt, wenn mindestens für einen der konkurrierenden Werte x tatsächlich der Fall $f(x) = 0$ einträte, ansonsten müsse es heißen $f(x) > 0$; (der Fall negativer Werte war ausgeschlossen).

Zu Aufgabe 2: Hier wurde mehrfach der Nachweis der Ganzzahligkeit der Folgenglieder vergessen; häufig waren auch Zirkelschlüsse, bei denen bereits Teile der Behauptung verwendet wurden, um die volle Behauptung zu gewinnen. In nicht wenigen Fällen wurde der grundlegende logische Fehler gemacht, daß aus der Behauptung auf eine bekannte wahre Aussage geschlossen wurde. Da sich sowohl aus einer falschen wie aus einer wahren Aussage eine andere wahre Aussage folgern läßt, ist ein solches Resultat ohne Wert.
Die angegebene zweite Lösung soll vor allem für interessierte Schüler der Sekundarstufe 2 einen weniger schulüblichen Anwendungsbereich der linearen Algebra zeigen.

Zu Aufgabe 3: Dies war offenbar nach Einschätzung der Teilnehmer die leichteste Aufgabe; nahezu alle Teilnehmer versuchten eine Lösung, wobei etliche Fehler auftraten. Dazu gehörte die Annahme spezieller Konstellationen, wie z.B. einer Stadt, die unmittelbar mit allen anderen 19 Städten verbunden ist, oder die Beschränkung auf Spezialfälle, die als "extremal" empfunden wurden. Manchmal ersetzte der Hinweis, daß man es sich nicht anders vorstellen könne, einen exakten Beweis.

Zu Aufgabe 4: Das *Tetraeder*, häufiger Untersuchungsgegenstand in der analytischen Geometrie und linearen Algebra, wird in anderen Zusammenhängen (z.B. als einer der fünf platonischen Körper) für den regulären Spezialfall, also mit sechs gleichlangen Kanten definiert. Gelegentlich finden sich sogar beide - vom Zusammenhang abhängigen - Definitionen nebeneinander im gleichen Buch (z.B. bei Bartsch: Taschenbuch mathematischer Formeln). Trotz der Orthogonalitätsbedingung der Kanten, die ja in einem regulären Tetraeder überflüssig wäre, haben einige Teilnehmer die Aufgabe nur für den (wesentlich einfacheren) Spezialfall des regelmäßigen Tetraeders gelöst.
Die Korrekturkommission hat dafür Sorge getragen, daß dieses durch manche Mathematikbücher begünstigte Mißverständnis nicht zum Ausscheiden von Teilnehmern aus dem Wettbewerb geführt hat.