BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Wissenschaftszentrum
Ahrstraße 45
5300 Bonn 2

AUFGABEN UND LÖSUNGEN 1987 1. RUNDE

Aufgabe 1

Es sei p eine Primzahl größer als 3 und n eine natürliche Zahl; außerdem habe p^n in der Dezimalschreibweise 20 Stellen.

Man zeige, daß hierin mindestens eine Ziffer mehr als zweimal vorkommt.

Lösung

Es wird gezeigt, daß eine zwanzigstellige Zahl, bei der keine Ziffer mehr als zweimal vorkommt, durch 3 teilbar ist:

Die Primzahlpotenz p^n sei vorgelegt. Da es im Dezimalsystem genau zehn verschiedene Ziffern gibt, muß jede Ziffer in der Dezimaldarstellung von p^n genau zweimal auftreten. Für die Quersumme q von p^n ergibt sich daher:

$$q = 2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 90 \quad .$$

Da q Vielfaches von 3 ist, muß auch p^n durch 3 teilbar sein, kann also keine Potenz einer von 3 verschiedenen Primzahl sein. Ist also umgekehrt p eine von 3 verschiedene Primzahl, tritt mindestens eine Ziffer in der Dezimaldarstellung von p^n mehr als zweimal auf.

Zusatz: Da in den einzigen beiden zwanzigstelligen Potenzen von 3 ($3^{40}=12157\underline{66}5459056\underline{6}928801$ und $3^{41}=364\underline{7}2996377170786403$) jeweils ebenfalls Ziffern mehr als zweifach auftreten, gilt die Behauptung der Aufgabe für jede zwanzigstellige Primzahlpotenz.

Aufgabe 2

Es sei n eine natürliche Zahl und $M_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$. Eine Teilmenge T von M_n heiße fett, wenn kein Element von T kleiner ist als die Anzahl der Elemente von T. Die Anzahl der fetten Teilmengen von M_n werde mit f(n) bezeichnet.

Man entwickle ein Verfahren, mit dem sich f(n) für jedes n bestimmen läßt, und berechne damit f(32).

Lösung 1

Die fetten Teilmengen von M_n werden nach der Anzahl k ihrer Elemente gezählt ($0 \leq k \leq n$). Die Elemente einer k-elementigen fetten Teilmenge von M_n dürfen alle nicht kleiner als k sein, sondern müssen aus der Menge $\{k, k+1, k+2, \ldots, n\}$ gewählt werden. Da die Mächtigkeit dieser Menge n-k+1 beträgt und jede fette k-elementige Teilmenge von M_n durch eine solche Auswahl erhalten wird, ergibt sich als gesuchte Anzahl der fetten Teilmengen von M_n

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} \quad .$$

Hiermit erhält man

$$f(32) = \binom{33}{0}+\binom{32}{1}+\binom{31}{2}+\binom{30}{3}+\binom{29}{4}+\ldots+\binom{18}{15}+\binom{17}{16}+0+0\ldots.+0$$

$$= 1 + 32 + 465 + 4060 + 23751 + 98280 + 296010 + 657800$$

$$+ 1081575 + 1307504 + 1144066 + 705432 + 293930$$

$$+ 77520 + 11628 + 816 + 17$$

$$= 5702887 \quad .$$

Zusatz: Will man die ewas mühsame Berechnung der Binomialkoeffizienten vermeiden, kann man mit Hilfe einer Rekursion für f(n) die Berechnung vereinfachen:

Die bekannte Rekursionsgleichung für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n-k+2}{k+1} = \binom{n-k+1}{k+1} + \binom{n-k+1}{k}$$

wird nachfolgend zum Nachweis der Rekursion

$$(*) \qquad f(n+2) = f(n+1) + f(n)$$

verwendet. Weiterhin wird benutzt, daß jede Menge genau eine nullelementige Teilmenge besitzt und jede Menge mit weniger als k Elementen keine k-elementige Teilmenge hat.

$$f(n+2) = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n-k+3}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n+2} \binom{n-k+3}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k+2}{k+1}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k+1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k+1}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n+2} \binom{n-k+2}{k} + f(n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n-k+2}{k} + f(n)$$

$$= f(n+1) + f(n) \quad .$$

Die fetten Teilmengen von {1} sind {} und {1}, die fetten Teilmengen von {1,2} sind {}, {1} und {2}. Es ist also f(1) = 2 und f(2) = 3. Durch wiederholtes Abspulen der Rekursion (*) erhält man

n	f(n)	n	f(n)	n	f(n)	n	f(n)
1	2	9	89	17	4181	25	196418
2	3	10	144	18	6765	26	317811
3	5	11	233	19	10946	27	514229
4	8	12	377	20	17711	28	832040
5	13	13	610	21	28657	29	1346269
6	21	14	987	22	46368	30	2178309
7	34	15	1597	23	75025	31	3524578
8	55	16	2584	24	121393	32	5702887

insbesondere also f(32) = 5 702 887 .

Lösung 2

Die zweigliedrige Rekursion f(n+2) = f(n+1) + f(n) läßt sich ohne Verwendung von Binomialkoeffizienten durch die nachfolgende Überlegung gewinnen:

Man betrachtet diejenigen fetten Teilmengen von M_{n+2}, die keine fetten Teilmengen von M_{n+1} sind, also jene, die das Element n+2 enthalten. Die Anzahl dieser Mengen ist f(n+2) - f(n+1). Eine solche Menge kann offensichtlich nicht das Element 1 enthalten, da sie dann nicht fett wäre. Man bilde nun zu einer derartigen Menge T die Menge T' , indem zuerst von allem Elementen die Zahl 1 subtrahiert wird und dann das Element n+1 gestrichen wird. T' ist dann offenbar eine fette Teilmenge von M_n. Da auf diese Weise alle fetten Teilmengen von M_n erhalten werden und der Übergang T --> T' umkehrbar ist, beträgt die Anzahl der betrachteten Mengen f(n); somit gilt

$$(*) \qquad f(n+2) = f(n+1) + f(n) \quad .$$

Zur Berechnung von f(32) verfährt man dann gemäß Lösung 1.

Ergänzung: Zur expliziten Darstellung von $f(n)$:

Vielen Teilnehmern wird die Fibonaccifolge und vor allem ihre explizite Darstellung nicht geläufig sein; der nachfolgende Weg zur Herleitung könnte für Schüler nach einem Leistungskurs Lineare Algebra gewählt werden:

Die Menge M aller Folgen, die einer vorgegebenen zweigliedrigen linearen Rekursion genügen - hier sei speziell (*) gewählt -, bildet einen zweidimensionalen Vektorraum. Zwei beliebige linear unabhängige Folgen in M bilden somit eine Basis von M; wegen der besonders einfachen Berechenbarkeit sucht man nach geometrischen Folgen $(1,q,q^2,q^3,...)$ in M. Die Folge $(1,q,q^2,q^3,...)$ liegt genau dann in M, wenn für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$q^{n+1} = q^n + q^{n-1}.$$

Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn q eine Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ ist, also für die Werte q_1 und q_2 mit

$$q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Die durch q_1 und q_2 bestimmten geometrischen Folgen sind linear unabhängig, da dies bereits für die zweidimensionalen Vektoren $(1,q_1)$ und $(1,q_2)$ gilt. Die gesuchte Folge $(f(1),f(2),f(3),...)$ läßt sich also als Linearkombination der beiden geometrischen Folgen mit geeigneten Koeffizienten α und β darstellen. Wegen $f(1)=2$ und $f(2)=3$ gilt also insbesondere:

$$\alpha + \beta = 2 \qquad (n = 1 \text{ eingesetzt}),$$
$$\alpha q_1 + \beta q_2 = 3 \qquad (n = 2 \text{ eingesetzt}) .$$

Als Lösungen dieses linearen Gleichungssystems erhält man

$$\alpha = \frac{2q_2 - 3}{q_2 - q_1} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \qquad \beta = \frac{3 - 2q_1}{q_2 - q_1} = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} .$$

Damit hat man für $f(n)$ die folgende Darstellung:

$$f(n) = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Hiermit läßt sich nun $f(32)$ berechnen:

$$\begin{aligned} f(32) &= \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{32-1} + \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{32-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}(1-\sqrt{5})}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{32} + \frac{2(2+\sqrt{5})}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{32} \\ &= \frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}-5}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{16} + \frac{4+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{16} \\ &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{16} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{16} \end{aligned}$$

$$= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^8 + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^8$$

$$= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{47-21\sqrt{5}}{2}\right)^4 + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{47+21\sqrt{5}}{2}\right)^4$$

$$= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{2207-987\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{2207+987\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{4870847-2178309\sqrt{5}}{2} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{4870847+2178309\sqrt{5}}{2}$$

$$= (10\cdot 4870847 + 6\cdot 5\cdot 2178309)/20$$

$$= (4870847 + 3\cdot 2178309)/2 = (4870847 + 6534927)/2$$

$= 11405774/2 = 5702887$; damit ist $f(32)$ berechnet.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein konvexes Vieleck mit mindestens drei Ecken. Durch je drei aufeinanderfolgende Ecken wird jeweils ein Kreis gelegt. Man beweise, daß mindestens eine der dadurch entstandenen Kreisscheiben das Vieleck ganz überdeckt.

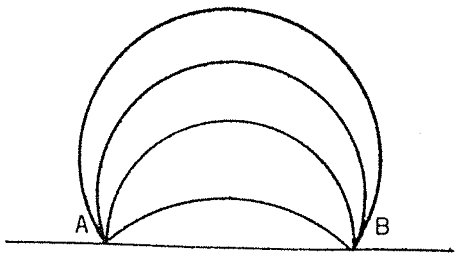
Lösung 1

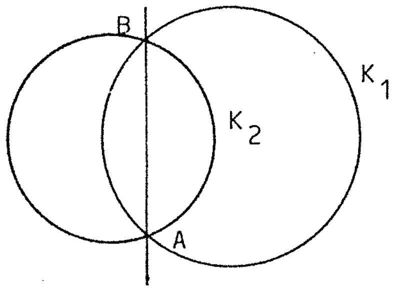
Es werden zunächst zwei Überdeckungs- und Anordnungsbeziehungen von Kreissegmenten formuliert.

(1) Die Menge aller Kreissegmente über einer gemeinsamen Sehne AB und in der gleichen Halbebene von (AB) ist bezüglich der Mengeninklusion vollständig geordnet.

(2) Sind K_1 und K_2 zwei verschiedene Kreisscheiben mit gemeinsamer Sehne AB, so wird in genau einer der beiden durch (AB) bestimmten Halbebenen das dort liegende Segment von K_1 durch das dort liegende Segment von K_2 überdeckt, während in der anderen die Rollen von K_1 und K_2 gerade vertauscht sind.

Auf einen Beweis zu (1), etwa mit Hilfe von Stetigkeits- und Anordnungsaxiomen und ggfs. Verwendung des Umfangswinkelsatzes oder mit analytischen Verfahren unter Ausnutzung der Stetigkeit der Abstandsfunktion und des Zwischenwertsatzes wird verzichtet.





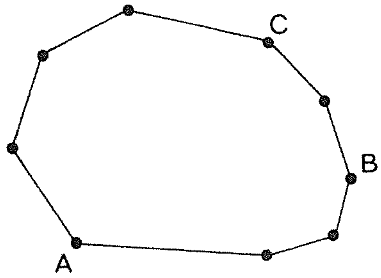
Wäre (2) falsch, müßte es zwei Kreise mit zwei gemeinsamen Punkten geben, bei denen von den zugehörigen Kreisscheiben die eine die andere ganz überdeckt. Genau wie man in (1) drei gemeinsame Punkte bei zwei verschiedenen Kreisen ausschließen kann, kann man hier die Berührung zweier verschiedener Kreise in zwei verschiedenen Punkten ausschließen.

Zu dem vorgelegten konvexen Vieleck, es sei nachfolgend stets mit V bezeichnet, wird definiert:

Ein Punktetripel (ABC) heiße <u>ausgezeichnet</u>, wenn A, B und C Ecken von V sind und kein Punkt von V außerhalb der durch A, B und C bestimmten Kreisscheibe liegt.

A, B, C seien Eckpunkte von V. Unter dem <u>Überhang</u> des Punktetripels (ABC) sei die Summe k + m verstanden, wobei k die Anzahl der Eckpunkte auf dem C nicht enthaltenden Weg auf V von A nach B, m die Anzahl der Eckpunkte auf dem A nicht enthaltenden Weg auf V von B nach C ist. Anfangs- und Endpunkt des Weges werden dabei jeweils nicht mitgezählt, so daß genau dann das Punktetripel (ABC) den Überhang 0 hat, wenn A, B und C unmittelbar in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Ecken von V sind.

Im rechts skizzierten Beispiel ist V ein Vieleck mit 9 Ecken. Gemäß der Definition ergibt sich für das Punktetripel (ABC) mit k=2 und m=1 ein Überhang von 3; für das Punktetripel (BCA) beträgt der Überhang 4, für das Punktetripel (CAB) hat er den Wert 5.



Es wird nun bewiesen:

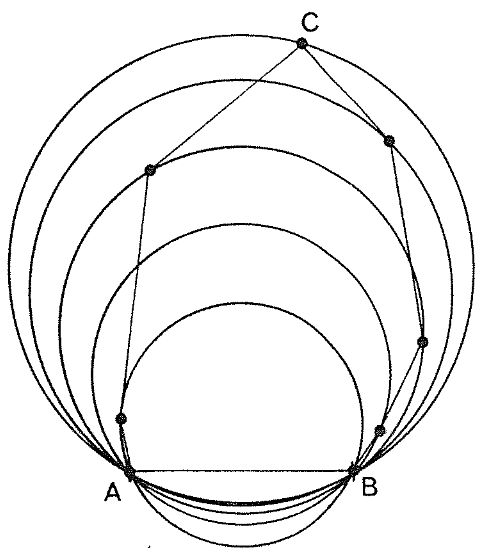
1) Es gibt zum vorgelegten konvexen Vieleck V ein ausgezeichnetes Punktetripel.

2) Zu jedem ausgezeichneten Punktetripel mit positivem Überhang gibt es ein ausgezeichnetes Punktetripel mit kleinerem Überhang.

Da der Überhang eine nicht negative <u>ganze</u> Zahl ist, folgt aus 1) und 2) dann unmittelbar die Existenz eines ausgezeichneten Punktetripels mit Überhang 0.

Zu 1):

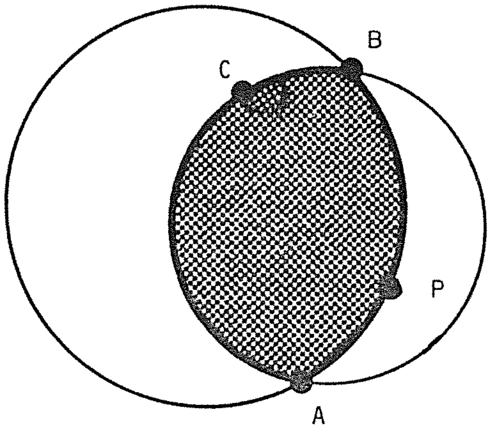
Man wähle A und B als beliebige benachbarte Eckpunkte von V. Wegen der Konvexität des Vielecks liegen dann alle seine Eckpunkte auf der gleichen Seite der Geraden (AB). Man betrachte nun für alle von A und B verschiedenen Eckpunkte X von V zunächst den Kreis durch A, B, X und dann jenes Segment der durch diesen Kreis bestimmten Scheibe, das in der gleichen Halbebene von (AB) liegt wie der Punkt X.



Das maximale Segment enthält alle anderen (vgl. (1)); die zugehörige Kreisscheibe überdeckt somit das Vieleck V. Nach Konstruktion liegt auf dem Rand dieser Scheibe außer A und B mindestens ein weiterer Eckpunkt von V; ein solcher Punkt sei mit C bezeichnet. Mit (ABC) ist ein ausgezeichnetes Punktetripel gefunden.

Zu 2):

Vorgelegt sei ein ausgezeichnetes Punktetripel (ABC) mit <u>positivem</u> Überhang. Dann gibt es auf dem C nicht enthaltenden Weg (auf V) von A nach B oder aber auf dem A nicht enthaltenden Weg (auf V) von B nach C einen weiteren Eckpunkt. Wegen der Symmetrie in A und C bei der Definition von zulässigem Punktetripel und Überhang darf oBdA angenommen werden, daß ein Eckpunkt Q_1 von V auf dem C nicht enthaltenden Weg von A nach B liegt. Mit entsprechender Bezeichnung bilden dann die Ecken $A, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, B, R_1, R_2, \ldots, R_m, C$ mit $k \geq 1$ und $m \geq 0$ eine Folge benachbarter Ecken von V. Der Überhang des ausgezeichneten Punktetripels (ABC) beträgt $k+m$.



Kein Punkt von V liegt außerhalb der gerasterten Fläche.

Man betrachte nun in der C nicht enthaltenden Halbebene von (AB) die Segmente $S_1, S_2, \ldots, S_k$, deren zugehörige Kreisbögen durch A, B, Q_i $(i=1,2,\ldots,k)$ verlaufen. Mindestens einer der Punkte Q_i liegt nach Definition der Segmente auf dem Rand des maximalen Segmentes; <u>ein</u> solcher Punkt sei mit P bezeichnet. Außerhalb des Kreises durch A,B,P liegen dann keine Punkte von V, da in der C enthaltenden Halbebene von (AB) der Deckel nicht verkleinert wird und in der Halbebene von P bei der eventuellen Verkleinerung keine Ecken von V verloren werden.

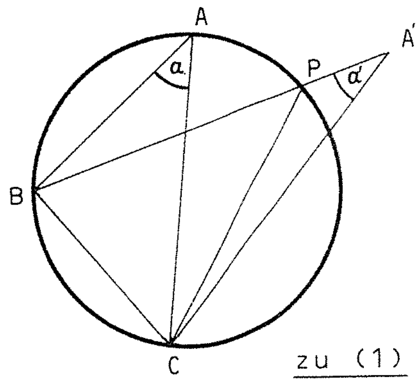
(APB) ist somit ein ausgezeichnetes Punktetripel; sein Überhang beträgt $k-1$, ist mithin kleiner als der Überhang von (ABC). Nach den bereits angegebenen Überlegungen ist damit der geforderte Nachweis erbracht.

Lösung 2 (nach Teilnehmer Martin Härterich):

Durch je drei Ecken des Vielecks werden Kreise gezeichnet. Da die Anzahl der Kreise endlich ist, gibt es mindestens einen Kreis mit maximalem Radius. Solche Kreise sollen im folgenden Maximalkreise heißen.

Hilfssatz:
A,B,C seien drei Ecken eines Vielecks, durch die ein Maximalkreis geht. $\measuredangle BAC = \alpha$ sei ein spitzer Winkel. Ist A' eine weitere Vielecksecke und $\measuredangle BA'C = \alpha'$, so gilt:

$$\alpha \leq \alpha' \leq 180° - \alpha.$$



zu (1)

Beweis:
Bezeichnet a die Länge von BC, so gilt $2R = a/\sin(\alpha)$ und $2R' = a/\sin(\alpha')$, wobei R und R' die jeweiligen Umkreisradien sind.

Da R maximal ist, folgt wegen $R \geq R'$ die Ungleichung $\sin(\alpha) \leq \sin(\alpha')$ und damit die Behauptung.

Es wird nun gezeigt:

(1) Jede Kreisscheibe eines Maximalkreises überdeckt das Vieleck vollständig.

(2) Jeder Maximalkreis geht durch drei aufeinanderfolgende Ecken des Vielecks.

Zu(1): Angenommen, es gebe eine Ecke A' des Vielecks außerhalb des Maximalkreises k. Die Eckpunkte A,B,C auf dem Maximalkreis seien so bezeichnet, daß die Punkte A,B,C,A' in dieser Reihenfolge ein konvexes Viereck bilden.

Die Diagonale BA' verläuft dann innerhalb des Winkels $\measuredangle ABC$ und schneidet den Bogen $\overset{\frown}{AC}$ von k in P.

OBdA ist α ein spitzer Winkel (sonst vertausche man die Bezeichnungen von A und C). Es gilt nun, wobei bezeichnungstechnisch nicht zwischen den Winkeln und ihrer Größe unterschieden wird:

$$\begin{aligned} \alpha = \measuredangle BAC &= \measuredangle BPC && \text{(Umfangswinkelsatz)} \\ &= \measuredangle BA'C + \measuredangle PCA' && \text{(Außenwinkelsatz)} \\ &> \measuredangle BA'C = \alpha' . \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zum Hilfssatz.

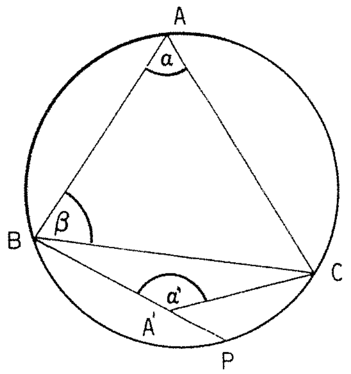
Zu(2): A,B,C seien wie in (1) gewählt. OBdA seien α und β spitze Winkel. Es wird nun (indirekt) gezeigt: Von B über C bis A liegen alle Vielecksecken auf k.

Da keine Ecke außerhalb von k liegt, ist die Annahme der Existenz eines Punktes A' "zwischen B und C" und im Inneren von k zum Widerspruch zu führen.

Die Gerade (BA') schneidet den Kreis k in einem Punkt, der P heiße. Es gilt nun nach Außenwinkelsatz und weil BPCA ein Sehnenviereck ist:

$$\begin{aligned} \alpha' = \measuredangle BA'C &= \measuredangle BPC + \measuredangle PCA' \\ &> \measuredangle BPC = 180° - \alpha. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zum Hilfssatz.

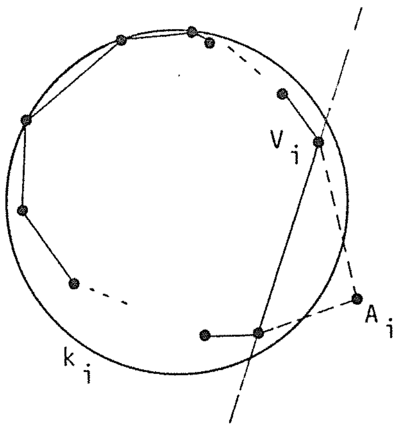


In analoger Weise zeigt man, daß jeder Punkt "zwischen" C und A auf k liegt.

Daß die Lösung der Aufgabe auch mit Hilfe vollständiger Induktion möglich ist, zeigt der nachfolgend skizzierte Beweis (nach Teilnehmer Jörg Härterich).

Lösung 3

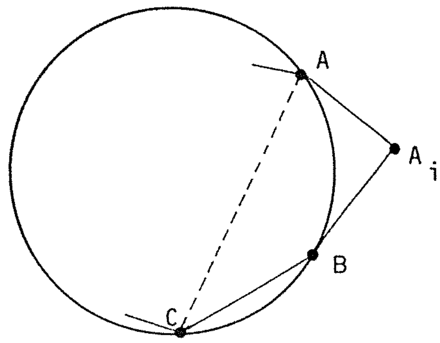
Die Behauptung ist offensichtlich richtig für n=3, da man hier den Umkreis des Dreiecks wählen kann. Es darf für die Induktion vorausgesetzt werden, daß $n \geq 3$ ist und zu jedem konvexen n-Eck ein umschließender Kreis der angegebenen Art existiert.



Vorgelegt sei ein konvexes (n+1)-Eck mit den Ecken $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$. Es sei $I := \{1,2,3,\dots,n+1\}$. Zu jeder Ecke A_i ($i \in I$) liefert der Schnitt durch die beiden Nachbarecken ein Dreieck, welches die Ecke A_i enthält , und ein konvexes n-Eck mit den gegebenen Ecken, jedoch ohne A_i. Das nach Abschneiden von A_i verbleibende n-Eck sei mit V_i bezeichnet; für jedes i sei k_i einer der gemäß Induktionsvoraussetzung existierenden V_i umschließenden und (mindestens) drei benachbarte Ecken von V_i enthaltenden Kreise. Der Begriff benachbarter Ecken wird nachfolgend, falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, stets im Bezug auf das gegebene (n+1)-Eck benutzt.

Falls nun für einen Index $i \in I$ die Ecke A_i auf k_i liegt, oder falls k_i die Ecke A_i im Inneren enthält und nicht durch die beiden Nachbarecken von A_i verläuft, ist mit k_i offenbar ein umschließender Kreis der gewünschten Art gefunden. Es bleibt also lediglich noch der Fall zu untersuchen, bei dem für alle $i \in I$ gilt: (A_i liegt außerhalb von k_i) oder (k_i verläuft durch die beiden Nachbarecken von A_i und enthält A_i im Inneren).

Gibt es einen Index $i \in I$, für den die Ecke A_i im Inneren von k_i liegt, so umschließt der Kreis durch die benachbarten Ecken A, A_i, B das gesamte Vieleck (vgl. Lösung 1).



Gibt es kein solches i, so liegt für alle $i \in I$ die Ecke A_i außerhalb des zugehörigen Kreises k_i. Sind für einen derartigen Index i zwei der drei in V_i benachbarten Punkte auf k_i im (n+1)-Eck zu A_i benachbart, (sie mögen A,B,C heißen), so ist, ggfs. nach Bezeichnungsvertauschung innerhalb A,B,C das Viereck AA_iBC konvex. Alle Punkte des Vielecks liegen in der gleichen Halbebene von BC.
Der Kreis durch A_i,B und C umschließt dann das gesamte Vieleck - zur Begründung vgl. Segmentüberlegung aus Lösung 1.

Zu erledigen bleibt nur noch der Fall, daß für alle Indizes $i \in I$ die Ecke A_i außerhalb von k_i liegt <u>und</u> die beiden Nachbarecken von A_i nicht zu den drei in V_i benachbarten Ecken gehören, die k_i bestimmen.

Für jedes $i \in I$ ist k_i durch ein Tripel von in V_i aufeinanderfolgenden Eckpunkten bestimmt. Da nicht zwei dieser Eckpunkte zu A_i benachbart sind, müssen die drei Ecken jeweils auch im (n+1)-Eck benachbart sein. Jeder der n+1 Kreise $k_1, .., k_{n+1}$ wird von zweien der n+1 Seiten des (n+1)-Ecks bestimmt. Es gibt also mindestens zwei verschiedene Indizes $i, j \in I$, so daß die Kreise k_i bzw. k_j eine Vielecksseite AB als gemeinsame Sehne haben. Da alle Ecken des konvexen Vielecks auf der gleichen Seite von (AB) liegen, müssen sich insbesondere A_i und A_j in der gleichen Halbebene von (AB) befinden. Dann überdeckt aber mindestens eine der Kreisscheiben durch A,B und einen der Punkte A_i, A_j den anderen (vgl. Anordnungsbeziehung (1) in Lösung 1); dies steht aber im Widerspruch zum letzten diskutierten Fall, der somit nicht eintreten kann.

Aufgabe 4

Vorgegeben seien n^3 Einheitwürfel $(n>1)$, die von 1 bis n^3 durchnumeriert sind. Alle diese Einheitswürfel werden zu einem Würfel der Kantenlänge n zusammengesetzt. In diesem Würfel heißen zwei Einheitswürfel benachbart, wenn sie mindestens eine Ecke gemeinsam haben. Als Abstand zweier benachbarter Einheitswürfel wird der Absolutbetrag der Differenz ihrer Nummern definiert.

Man denke sich für jede mögliche Zusammensetzung des großen Würfels den größten auftretenden Abstand benachbarter Einheitswürfel auf eine Tafel geschrieben. Was ist die kleinste Zahl, die auf dieser Tafel notiert wird ? (Beweis !)

Erläuterung: Ein <u>Einheitswürfel</u> ist ein Würfel mit der Kantenlänge 1.

Lösung

Die zu bestimmende kleinste Zahl auf der Tafel sei mit k bezeichnet. Es wird bewiesen

a) $k \geq n^2 + n + 1$

und b) $k \leq n^2 + n + 1$.

Aus a) und b) ergibt sich dann $k = n^2 + n + 1$.

<u>Zu a)</u>
Man führt ein räumliches Koordinatensystem derart ein, daß die Achsen parallel zu den Würfelkanten verlaufen und bei (0,0,0) und (n-1,n-1,n-1) die Mittelpunkte zweier raumdiagonal gegenüberliegender Eckwürfel des großen Würfels liegen.

Nach dieser Festlegung wird nicht mehr zwischen einem Würfel und dem Koordinatentripel seines Mittelpunktes unterschieden. Man definiert eine Funktion d, indem man für je zwei Würfel W_1 und W_2 (mit $W_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $W_2 = (x_2, y_2, z_2)$) setzt:

$$d(W_1, W_2) := \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

W_1 und W_2 sind offenbar genau dann benachbart bzw. identisch, wenn gilt $d(W_1,W_2) = 1$ bzw. $d(W_1,W_2) = 0$.

Es sei nun A der Würfel mit der Nummer 1, B der Würfel mit der Nummer n^3, $B = (b_x,b_y,b_z)$. Man definiert rekursiv eine Folge $W_0,W_1,W_2,\ldots,W_{n-1}$ von Einheitswürfeln durch

$$W_0 := A \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} x_i := x_{i-1} + \operatorname{sgn}(b_x - x_{i-1}) \\ y_i := y_{i-1} + \operatorname{sgn}(b_y - y_{i-1}) \\ z_i := z_{i-1} + \operatorname{sgn}(b_z - z_{i-1}) \end{array} \quad \text{für } i \in \{1,2,\ldots,n-1\} .$$

Dabei ist die sgn-Funktion (bekanntlich) so erklärt, daß sie für negative reelle Zahlen bzw. 0 bzw. positive reelle Zahlen den Wert -1 bzw. 0 bzw. 1 annimmt.

Da beim Übergang von W_{i-1} zu W_i keine Koordinate um mehr als 1 verändert wird, sind die Würfel W_{i-1} und W_i $(i=1,2,3,\ldots,n-1)$ benachbart oder gleich. Für alle $i \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ gilt dann $d(W_i,B) < n-i$, wie sich unmittelbar durch Induktion über i ergibt. Speziell hat man $d(W_{n-1},B) = 0$, also $W_{n-1} = B$.

Die Nummer von Würfel W_i $(i=0,1,2,\ldots,n-1)$ sei mit w_i bezeichnet. Dann ist $w_0=1$ und $w_{n-1}=n^3$ und man hat

$$\begin{aligned}(n-1)\cdot \max |w_i - w_{i-1}| & \\ &\geq |w_{n-1}-w_{n-2}| + |w_{n-2}-w_{n-3}| + \ldots + |w_1 - w_0| \\ &\geq |(w_{n-1}-w_{n-2}) + (w_{n-2}-w_{n-3}) + \ldots + (w_1 - w_0)| \\ &= |w_{n-1} - w_0| = n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)\end{aligned}$$

Somit folgt: $\max |w_i - w_{i-1}| \geq n^2 + n + 1$.

Es gibt also mindestens zwei benachbarte Würfel, deren Abstand größer als n^2+n ist. Da eine beliebige Anordnung zugrundelag, folgt, wie unter a) behauptet:

$$k \geq n^2 + n + 1 \quad .$$

<u>Zu b)</u>
Man weist dem Würfel mit der Nummer N $(1 \leq N \leq n^3)$ auf folgende Weise seinen Platz zu: $N-1$ hat im Stellenwertsystem mit der Basis n eine eine eindeutig bestimmte Darstellung $(x,y,z)_n$. (Die Darstellung bedeutet : $N-1=xn^2+yn+z$ mit $0 \leq x,y,z \leq n-1$). Man setzt $W = (x,y,z)$; dabei führen verschiedene Nummern N zu verschiedenen Darstellungen und umgekehrt, und benachbarte Würfel unterscheiden sich in allen drei Koordinaten höchstens um 1. Ist der eine der Würfel etwa (x,y,z), läßt sich der andere in der Form $(x+e,y+f,z+g)$ mit $e,f,g \in \{-1,0,1\}$ beschreiben. Für ihren Abstand ergibt sich daher

$$\begin{aligned}| en^2 + fn + g | &\leq |en^2| + |fn| + |g| \\ &\leq n^2 + n + 1 \quad .\end{aligned}$$

Man erhält daher

$$k \leq n^2 + n + 1 \quad ,$$

womit b) gezeigt ist.

Die kleinste auf der Tafel notierte Zahl ist mithin $n^2 + n + 1$.

Ergänzung zu a) und b)

Der anschauliche und übersichtliche Sachverhalt läßt weniger formale und damit besser lesbare Darstellungen zu. So kann als offensichtlich hingenommen werden, daß beim Übergang zu einem benachbarten Würfel alle drei Koordinaten höchstens um 1 verändert werden; ein solcher Übergang sei als Schritt bezeichnet. Von jedem beliebigen Würfel gelangt man zu jedem anderen durch höchstens n-1 Schritte. Mit i Schritten erreicht man, ausgehend vom Würfel der Nummer 1, höchstens Würfel mit Nummern $\leq 1+ik$. Da man zum Würfel mit der Nummer n^3 mit höchstens n-1 Schritten kommt, folgt

$$1 + (n-1)k \geq n^3, \quad \text{also} \quad k \geq n^2 + n + 1.$$

Damit ergibt sich die Behauptung a) .

Bei b) kann man "scheibenweise" die entsprechende Füllung des großen Würfels beschreiben: Man füllt eine unterste Scheibe des großen Würfels nach dem folgenden Schema, in dem statt der Würfel ihre Nummern angeschrieben sind:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (n-1)n+1 & \cdot & \ldots & n^2 \end{array}$$

Die zweitunterste Scheibe füllt man entsprechend mit $n^2+1,\ldots,2n^2$ usw bis zur obersten Scheibe, die entsprechend mit $(n-1)n^2+1,\ldots,n^3$ ausgefüllt wird. Dann ist der Abstand benachbarter Würfel höchstens $1n^2+1n+1$; somit ist $k \leq n^2+n+1$.